

Лабораторная работа №3

Цель работы

Разработка, отладка и выполнение программ итерационной циклической структуры с использованием операторов цикла.

Методы численного интегрирования: методы прямоугольников и трапеций

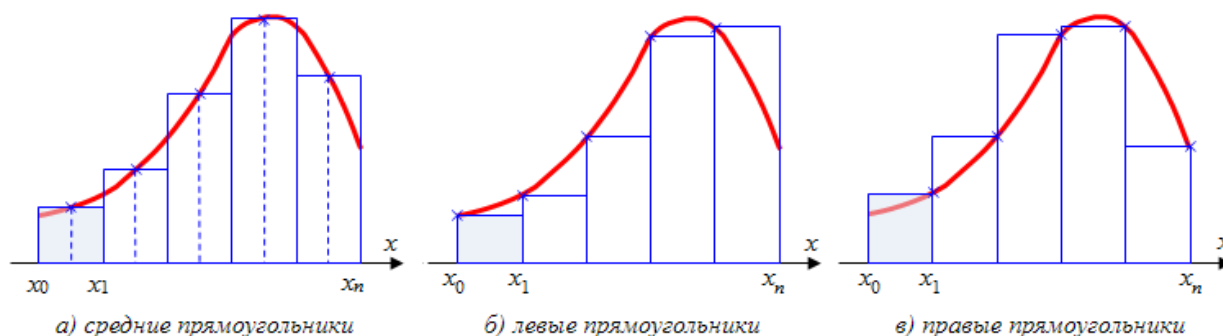
Задача: найти значение интеграла

$$I = \int_a^b f(x)dx,$$

где $f(x)$ определена на промежутке $[a,b]$. Аналитически получить решение невозможно или очень сложно.

В этом случае решение находят с помощью численных методов. Эти методы позволяют с заданной степенью точности найти приближенное значение интеграла.

Геометрический смысл определенного одномерного интеграла – площадь фигуры, ограниченная подынтегральной функцией. Можно разделить всю фигуру на множество простых фигур (прямоугольников или трапеций) и найти сумму их площадей.



Площадь прямоугольника – произведение ширины на длину. Задаем шаг дискретизации h или количество точек N .

$$x_{i+1} = x_i + h, i = 1 \dots N,$$

$$h = \frac{b-a}{N} \text{ или } N = \frac{b-a}{h}.$$

Площадь «левого» прямоугольника:

$$S_i = f(x_i)h, i = 1 \dots N.$$

Площадь «правого» прямоугольника:

$$S_i = f(x_{i+1})h, i = 1 \dots N.$$

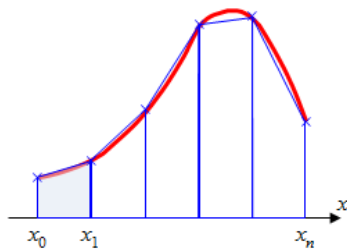
Площадь «среднего» прямоугольника:

$$S_i = f\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right)h, i = 1 \dots N.$$

Значение интеграла:

$$I = \sum_{i=0}^{N-1} S_i = h \sum_{i=0}^{N-1} f_i = \frac{b-a}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f_i.$$

Площадь трапеции – произведение полусуммы оснований на высоту.



$$S_i = \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} h, i = 1 \dots N.$$

Значение интеграла:

$$\begin{aligned} I &= \sum_{i=0}^{N-1} S_i = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (f(x_{i+1}) + f(x_i)) = \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_{N-1})) + h \sum_{i=1}^{N-2} f(x_i) = \\ &= \frac{b-a}{2N} (f(x_0) + f(x_{N-1})) + \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^{N-2} f(x_i). \end{aligned}$$

Пример выполнения:

Вычислить приближенно на отрезке $[a, b]$ площадь фигуры, ограниченной функциями $f(x) = x^2 + 1$ и $f(x) = x + 3$.

Предварительно находим точки $M_1(-1, 2)$ и $M_2(2, 5)$ пересечения графиков, решая систему двух уравнений. Отсюда следует, что на отрезке $[-1, 2]$ требуется определить площадь фигуры между прямой и параболой. Площадь данной фигуры $S = S_1 - S_2$, где S_1 – площадь фигуры на отрезке $[-1, 2]$ ограниченной прямой, а S_2 – площадь фигуры на отрезке $[-1, 2]$, ограниченной параболой. Площадь данных фигур определяется по формулам приближенного вычисления интеграла от функции $f(x)$.

Итак, требуется вычислить

$$\int_a^b f(x) dx,$$

если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Для вычисления разделим отрезок $[a, b]$ точками $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ на n равных частей, имеющих длину

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}.$$

Найдем значение функции $f(x)$ в точках $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, обозначив их следующим образом:

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n).$$

Составим суммы

$$S_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \Delta x \text{ и } S_n = \sum_{i=1}^n y_i \Delta x.$$

Суммы S_{n-1} и S_n являются интегральными суммами для $f(x)$ на $[a, b]$. Из рис. 1 видно, что S_{n-1} выражает площадь «вписанной ступенчатой фигуры», а S_n – площадь «описывающей ступенчатой фигуры» относительно «криволинейной трапеции», соответствующей $\int_a^b f(x) dx$. Следовательно, можно считать, что

$$\int_a^b f(x) dx \approx S_{n-1} = \frac{b - a}{n} (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}),$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx S_n = \frac{b - a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n).$$

Эти две формулы и есть *формулы прямоугольников*.

Для определения площади можно использовать значение функции, которая вычисляется в середине отрезка $[x_i, x_{i+1}]$, где $i = 0, 1, \dots, n$.

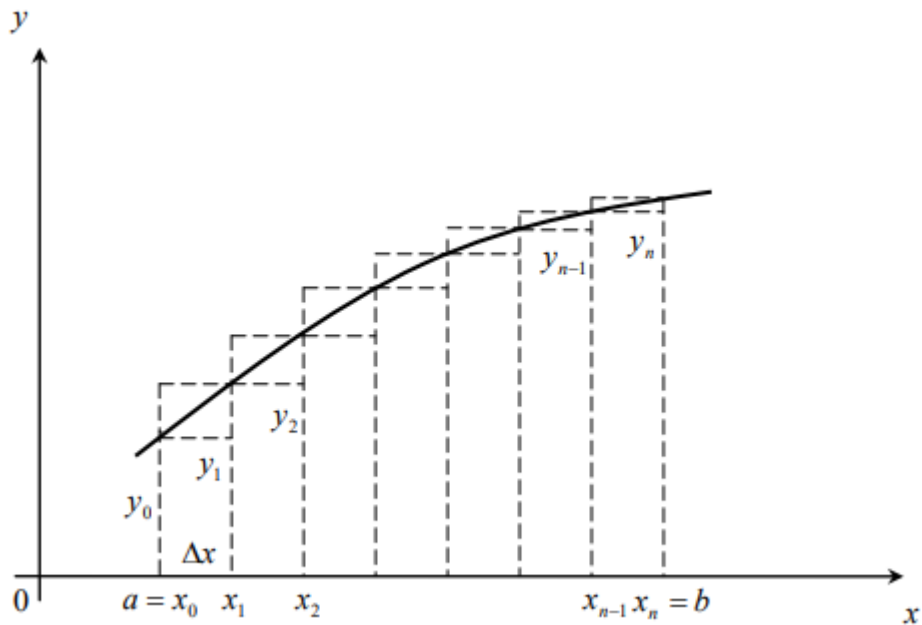


Рис. 1.

Кроме того, существуют формула трапеций для вычисления площади

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + \dots + y_{n-1} \right)$$

и формула Симпсона (формула парабол)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n} \left((y_0 + y_n) + 2(y_1 + \dots + y_{n-1}) + 4(y_{0,5} + y_{1,5} + \dots + y_{n-0,5}) \right).$$

Здесь $y_{0,5}, y_{1,5}, \dots, y_{n-0,5}$ значения функции, которые вычисляются в середине отрезков Δx .

Ниже дан код программы, которая решает поставленную задачу. Площадь S_1 вычисляется при помощи формулы трапеции, а S_2 – по формуле Симпсона.

Анализ задачи.

1. Начальные данные:

- а) переменные a и b для границ интервала;
- б) переменные $S, S1, S2$ для значений площадей;
- в) переменные $w1, w2$ для значений промежуточных сумм формулы Симпсона;
- г) переменная n для числа точек интегрирования;
- д) переменная x для значения аргумента функции;
- е) переменная h для длины интервала.

```
int main() {
    float a = -1, b = 2, h, x;
```

```

float S, S1=0, S2=0, w1 = 0, w2 =0;
int n;
clrscr();
cout << "Введи число точек на интервале n = ";
cin >> n;
h = (b-a)/n;
    // Вычисляем площадь по формуле трапеций
for (x=1;x<=N;i++) S1+= x+3.;
S1 = S1 + (a+3. + b+3. )*0.5;
S1 = S1*h;
    // Вычисляем площадь по формуле Симпсона
x=a+h;
while (x<=b-h) {
    w1=w1+x*x+1.; // Вычисляется первая
                  // сумма в формуле Симпсона
    x+=h;
}
w1=w1*2.;
x=a+h*0.5;
while (x<=b-h*0.5) {
    w2= w2+x*x+1.; // Вычисляется вторая
                  // сумма в формуле Симпсона
    x+=h;
}
w2 =w2*4.;
S2 = w1 + w2 + a*a + 1 +b*b + 1;
S2 = h*S2/6.;
S = S1-S2;
cout << "Площадь фигуры S = " << S << endl;
getch();
}

```

В данном примере рассматриваются функции, интегралы которых определяются точно. Это очень удобно при тестировании составленной программы, ибо результат ее работы можно сравнить с точным решением. Такой подход – рассматривать известные решения общей задачи – является основным при отладке программ.

Задание

- 1) Разработать и реализовать на языке программирования С++ алгоритм вычисления приближенного значения определенного интеграла, основываясь на его геометрическом смысле (как площади фигуры под графиком подынтегральной функции) с помощью метода прямоугольников. Использовать цикл с параметром (for).
- 2) Для построения прямоугольника в методе прямоугольника в заданиях с вариантами № 1-9 использовать левый конец отрезка, в заданиях с вариантами № 10-19 использовать середину отрезка, в заданиях с вариантами № 20-29 использовать правый конец отрезка.
- 3) Разработать и реализовать на языке программирования С++ алгоритм вычисления приближенного значения определенного интеграла, основываясь на его геометрическом смысле (как площади фигуры под графиком подынтегральной функции) с помощью метода трапеций. Использовать цикл с условием (или постусловием) (while).
- 4) С клавиатуры, помимо прочих значений, необходимо вводить количество отрезков (дискрет), на которые будет разделен весь интервал интегрирования.
- 5) Все операторы должны сопровождаться комментариями, поясняющими их предназначение.
- 6) Программный код должен быть структурирован.

Варианты заданий

- 1) $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 5x - x^2 + 14$;
- 2) $f_1(x) = x^2 + 2x + 2$, $f_2(x) = x^2 + 4x + 5$, $f_3(x) = 1$;
- 3) $f_1(x) = -x^2 + 2x + 2$, $f_2(x) = -x^2 - 4x - 1$, $f_3(x) = 3$;
- 4) $f_1(x) = 3x^2 - 4x + 2$, $f_2(x) = 20 - x$;
- 5) $f_1(x) = -2x^2 + 3x + 6$, $f_2(x) = x + 2$;
- 6) $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = \frac{x+2}{3}$.
- 7) $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = -2(x-1)^2 + 8$;
- 8) $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = -2(x-3)^2 + 2$;
- 9) $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 5x - x^2 + 14$;

- 10) $f_1(x) = x^2 + 2x + 2, f_2(x) = x^2 + 4x + 5, f_3(x) = 1;$
- 11) $f_1(x) = -x^2 + 2x + 2, f_2(x) = -x^2 - 4x - 1, f_3(x) = 3;$
- 12) $f_1(x) = 3x^2 - 4x + 2, f_2(x) = 20 - x;$
- 13) $f_1(x) = -2x^2 + 3x + 6, f_2(x) = x + 2;$
- 14) $f_1(x) = 0, f_2(x) = -2(x-1)^2 + 8;$
- 15) $f_1(x) = 0, f_2(x) = -2(x-3)^2 + 2;$
- 16) $f_1(x) = 0, f_2(x) = 5x - x^2 + 14;$
- 17) $f_1(x) = x^2 + 2x + 2, f_2(x) = x^2 + 4x + 5, f_3(x) = 1;$
- 18) $f_1(x) = -x^2 + 2x + 2, f_2(x) = -x^2 - 4x - 1, f_3(x) = 3;$
- 19) $f_1(x) = 3x^2 - 4x + 2, f_2(x) = 20 - x;$
- 20) $f_1(x) = -2x^2 + 3x + 6, f_2(x) = x + 2;$
- 21) $f_1(x) = 0, f_2(x) = -2(x-1)^2 + 8;$
- 22) $f_1(x) = 0, f_2(x) = -2(x-3)^2 + 2.$
- 23) $f_1(x) = \sqrt{x}, f_2(x) = \frac{x+2}{3}.$
- 24) $f_1(x) = x^2 + 2x + 2, f_2(x) = x^2 + 4x + 5, f_3(x) = 1;$
- 25) $f_1(x) = -x^2 + 2x + 2, f_2(x) = -x^2 - 4x - 1, f_3(x) = 3;$
- 26) $f_1(x) = 3x^2 - 4x + 2, f_2(x) = 20 - x;$
- 27) $f_1(x) = -2x^2 + 3x + 6, f_2(x) = x + 2;$
- 28) $f_1(x) = -x^2 + 2x + 2, f_2(x) = -x^2 - 4x - 1, f_3(x) = 3;$
- 29) $f_1(x) = 3x^2 - 4x + 2, f_2(x) = 20 - x;$

Контрольные вопросы

- 1) Что такое итерационный циклический процесс?
- 2) Что такое оператор цикла в языке программирования C++?

- 3) Какие существуют виды операторов цикла, что у них общего, в чем их различия? Какой общий формат?
- 4) Как можно прекратить выполнение одной итерации оператора цикла и выполнение всего оператора цикла?