1. В наборе 4 шара красного цвета, 5 шаров синего и 2 шара белого цвета. Из набора случайным образом без возвращения вынимают 4 шара. Найдите вероятность события

$$A = \{\text{синих шаров достали больше, чем красных}\},$$

$$B = \{\text{достали хотя бы три синих шара}\}$$

Решение:

$$A = \{\text{синих шаров достали больше, чем красных}\},$$

Т.е.:

4 синих; 3 синих + 1 любой (красный или белый);

2 синих + 2 белых; 2 синих + 1красный +1 белый;

$$P = \frac{m}{n},$$

Где n - число всевозможных исходов эксперимента, m – число благоприятных исходов.

$$C_N^M = \frac{N!}{M!\,(N-M)!}$$

Извлекаем 4 шара из 11, следовательно:

$$n = C_{11}^4 = \frac{11!}{4!\,7!} = \frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{2\cdot 3\cdot 4} = 330$$

$$m = C_5^4 + C_5^3\cdot C_6^1 + C_5^2\cdot C_2^2 + C_5^2\cdot C_4^1\cdot C_2^1 = 5 + 10\cdot 6 + 10 + 10\cdot 4\cdot 2 = 155$$

$$P(A) = \frac{155}{330} = \frac{31}{66} \approx 0.4697$$

$$B = \{\text{достали хотя бы три синих шара}\}$$

Т.е. или 3 или 4:

4 синих; 3 синих + 1 любой (красный или белый);

$$m = C_5^4 + C_5^3\cdot C_6^1 = 5 + 10\cdot 6 = 65$$

$$P(B) = \frac{65}{330} = \frac{13}{66} \approx 0.197$$

Ответ: $P(A) = \frac{31}{66}$; $P(B) = \frac{13}{66}$.

2. Из колоды в 52 карты наугад (без возвращения) извлекаются четыре. Найти вероятность указанных в варианте событий.

Событие A={карты трех мастей}, событие B={карты двух достоинств}

Решение:

Классическое определение вероятности

$$P = \frac{m}{n},$$

где n - число всевозможных исходов эксперимента, m – число благоприятных исходов.

$$n = C_{52}^{4} \text{ (число способов выбрать 4 карты из 52)}$$

$$C_{52}^{4} = \frac{52!}{4!\,48!} = \frac{52 * 51 * 50 * 49}{2 * 3 * 4} = 270725$$

а) A={карты трех мастей}, Сначала выбираем 3 масти из 4-х – это $C_4^3 = 4$ способа. Из 4-х карт одной масти будет две карты, а остальных по одной, значит эту масть можно выбрать 3-мя способами.

$$m = C_4^3 \cdot C_3^1 \cdot C_{13}^2 \cdot C_{13}^1 \cdot C_{13}^1 = 3 \cdot 4 \cdot 13^2 \cdot \frac{13 \cdot 12}{2} = 158184$$

$$P = \frac{158184}{270725} \approx 0.5843$$

б) B={карты двух достоинств}. Всего достоинств 13. Выбираем 2 достоинства из 13 - C_{13}^2 способов. Из 4-х карт каждого достоинства нужно выбрать или по две карты или 1 одного и 3 другого или 3 одного и 1 другого.

$$m = C_{13}^2 \cdot (C_4^2 \cdot C_4^2 + 2C_4^1 \cdot C_4^3) = \frac{13 \cdot 12}{2} \cdot (6^2 + 2 \cdot 4 \cdot 4) = 6528$$

$$P = \frac{6528}{270725} \approx 0.0241$$

Ответ: $P(A) = \frac{158184}{270725} \approx 0.5843;\ P(B) = \frac{6528}{270725} \approx 0.0241.$

3. Консультация перед экзаменом должна начаться между 11.00 и 12.00. Преподаватель и студенты забыли уточнить время. Если преподаватель приходит первым в указанное время, а студентов еще нет, то преподаватель ждет студентов не более 20 минут. Если же студенты пришли первыми, то они ждут преподавателя не более 15 минут. Найти вероятность указанного в варианте события.

Преподаватель пришел до 11.30, а студенты после 11.40, консультация была

Решение:

Пусть x - время прихода преподавателя, y – время прихода студентов. Для простоты будем считать время 11.00 нулевой точкой отсчёта времени. Тогда

$$x \in [0, 60], y \in [0, 60] \text{ (минут)}$$

Если преподаватель приходит первым ($y > x$), то консультация начинается при

$$y - x \leq 20 \Rightarrow y \leq x + 20$$

Если преподаватель приходит вторым ($y < x$), то консультация начинается при

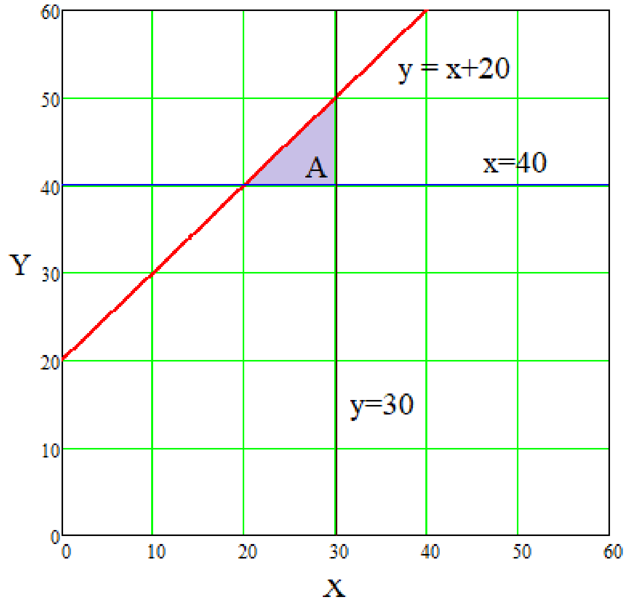
$$x - y \leq 15 \Rightarrow y \geq x - 15$$

Преподаватель пришел до 11.30 $\Rightarrow x < 30$.

студенты после 11.40$\Rightarrow y > 40$. Заметим, что $x < y$ всегда выполняется.

Изобразим область значений (x, y) на плоскости, отметим области, соответствующие условиям:

$$\begin{cases} y \leq x + 20 \\ x < 30 \\ y > 40 \end{cases}$$



Используем геометрическое определение вероятности на плоскости:

$$P = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$$

Ω - квадрат $[0, 60] \times [0, 60]$, A - заштрихована на рисунке.

$$P = \frac{0.5 \cdot 10^2}{60^2} = \frac{50}{3600} = \frac{1}{72} \approx 0.0139.$$

Ответ: $\frac{1}{72}$.

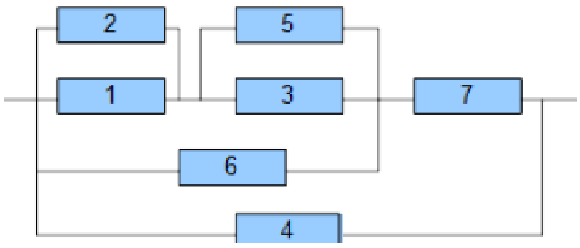
4. Система надежности состоит из 7 элементов и имеет схему, изображенную на рисунке. События A_i, $i=\overline{1,7}$,— отказы элементов за заданный промежуток времени.

1) Выразите через события A_i события A и $\overline{A}$, где A—отказ всей системы за заданный промежуток времени.

2) Считая, что события A_i независимы в совокупности и имеют вероятности $P(A_i)=p_i$, $i=\overline{1,7}$, вычислите вероятность события A.

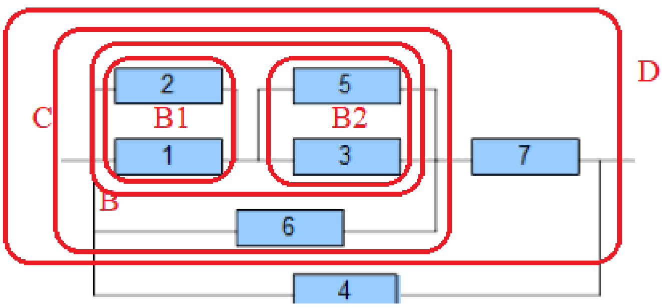
$p_1=0,1, p_2=0,2, p_3=0,1, p_4=p_5=0,3,$

$p_6=p_7=0,2.$



Решение:

Выделим в системе подсистемы как показано на рисунке:



1) События B, C, D – отказ соответствующих подсистем

$$B = B_1 + B_2$$

$$B_1 = A_1 A_2;\ B_2 = A_3 A_5$$

$$C = BA_6 = (A_1A_2 + A_3A_5)A_6$$
$$D = C + A_7 = (A_1A_2 + A_3A_5)A_6 + A_7$$
A — отказ всей системы за заданный промежуток времени.

$$A = DA_4 = \big((A_1A_2 + A_3A_5)A_6 + A_7\big) \cdot A_4$$

Противоположное событие:

$$\overline{A} = \overline{\big((A_1A_2 + A_3A_5)A_6 + A_7\big) \cdot A_4} = \overline{(A_1A_2 + A_3A_5)A_6 + A_7} + \overline{A_4}$$

$$= \overline{(A_1A_2 + A_3A_5)A_6} \cdot \overline{A_7} + \overline{A_4} = \big(\overline{A_1A_2 + A_3A_5} + \overline{A_6}\big) \cdot \overline{A_7} + \overline{A_4} =$$

$$= \big(\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_3A_5} + \overline{A_6}\big) \cdot \overline{A_7} + \overline{A_4} = \Big(\big(\overline{A_1} + \overline{A_2}\big) \cdot \big(\overline{A_3} + \overline{A_5}\big) + \overline{A_6}\Big) \cdot \overline{A_7} + \overline{A_4}$$

2)

$$P(B_1) = P(A_1)P(A_2) = 0.1 \cdot 0.2 = 0.02$$

$$P(B_2) = P(A_3)P(A_5) = 0.1 \cdot 0.3 = 0.03$$

$$P(B) = 1 - \big(1 - P(B_1)\big)\big(1 - P(B_2)\big) = 1 - 0.98 \cdot 0.97 = 0.0494$$

$$P(C) = P(B)P(A_6) = 0.0494 \cdot 0.2 = 0.00988$$

$$P(D) = 1 - \big(1 - P(C)\big)\big(1 - P(A_7)\big) = 1 - (1 - 0.00988) \cdot 0.8 = 0.207904$$

$$P(A) = P(D) \cdot P(A_4) = 0.207904 \cdot 0.3 = 0.0623712$$

Ответ: $P(A) = 0.0623712$.

5. В первой урне находятся 5 белых и 3 черных шаров, во второй урне — 3 белых и 3 черных шаров. Сначала из первой урны во вторую перекладывается наугад 5 шаров, затем так же наугад перекладывается из второй урны в первую 5 шаров.

а) Определите вероятность того, что после вскрытия первой урны в ней будет столько же белых шаров, сколько было до проведения опыта.

б) После вскрытия первой урны оказалось, что в ней столько же белых шаров, сколько было до проведения опыта. Вычислите вероятность того, что при этом условии из первой урны во вторую переложили 3 черных шаров.

Решение:

Введём следующие гипотезы:

H_i – из первой урны во вторую переложили i чёрных шаров;

$$С_8^5 = \frac{8!}{5!\,3!} = \frac{8*7*6}{2*3} = 56$$

$$P(H_0) = \frac{С_5^5}{С_8^5} = \frac{1}{56}; (\text{в } 1-\text{ой урне } 3\text{ч}, \text{во } 2-\text{ой } 8\text{б}+3\text{ч})$$

$$P(H_1) = \frac{С_5^4 С_3^1}{С_8^5} = \frac{15}{56}; (\text{в } 1-\text{ой урне } 1\text{б}+2\text{ч}, \text{во } 2-\text{ой } 7\text{б}+4\text{ч})$$

$$P(H_2) = \frac{С_5^3 С_3^2}{С_8^5} = \frac{30}{56}; (\text{в } 1-\text{ой урне } 2\text{б}+1\text{ч}, \text{во } 2-\text{ой } 6\text{б}+5\text{ч})$$

$$P(H_3) = \frac{С_5^2 С_3^3}{С_8^5} = \frac{10}{56} (\text{в } 1-\text{ой урне } 3\text{б}+0\text{ч}, \text{во } 2-\text{ой } 5\text{б}+6\text{ч})$$

Убеждаемся, что гипотезы образуют полную группу несовместных событий

$$\sum_i P(H_i) = 1.$$

а) Пусть событие A – после вскрытия первой урны в ней будет столько же белых шаров (5), сколько было до проведения опыта. Тогда при перекладке 5 шаров в первую урну во второй урне 11 шаров.

$$С_{11}^5 = \frac{11!}{5!\,6!} = 462$$

$$P(A|H_0) = \frac{С_8^5}{С_{11}^5} = \frac{56}{462};\ P(A|H_1) = \frac{С_7^4 С_4^1}{С_{11}^5} = \frac{140}{462};$$

$$P(A|H_2) = \frac{С_6^3 С_5^2}{С_{11}^5} = \frac{200}{462};\ P(A|H_3) = \frac{С_5^2 С_6^3}{С_{11}^5} = \frac{200}{462}$$

Воспользуемся формулой полной вероятности:

$$P(A) = \sum_i P(H_i) \cdot P(A|H_i)$$

$$P(A) = \frac{1}{56} \cdot \frac{56}{462} + \frac{15}{56} \cdot \frac{140}{462} + \frac{30}{56} \cdot \frac{200}{462} + \frac{10}{56} \cdot \frac{200}{462} = \frac{2539}{6468}$$

б) Вероятность того, что при этом условии из первой урны во вторую переложили 3 черных шаров можно определить по формуле Байеса:

$$P(H_3|A) = \frac{P(H_3) \cdot P(A|H_3)}{P(A)}$$

$$P(H_3|A) = \frac{\frac{10}{56} \cdot \frac{200}{462}}{\frac{2539}{6468}} = \frac{500}{2539}$$

Ответ: а) $\frac{2539}{6468}$; б) $\frac{500}{2539}$.

6. Вероятность попадания в цель при любом из 7 выстрелов равна 0,4. Найдите вероятность того, что произойдет:

а) Ровно 4 попаданий.

б) Не более 4 попаданий.

в) Не менее 4 попаданий.

г) От 2 до 5 попаданий.

Решение: по формуле Бернулли вероятность m успехов в серии из n испытаний определяется по формуле:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

а) ровно 4 попадания;

$$P_7(4) = C_7^4 0.4^4 \cdot 0.6^3 = \frac{7!}{4!\,3!} \cdot \frac{2^4 \cdot 3^3}{5^7} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 3} \cdot \frac{2^4 \cdot 3^3}{5^7} = 0.193536$$

б) Пусть событие А - не более 4-х попаданий, тогда

$$P(A) = P_7(0) + P_7(1) + P_7(2) + P_7(3) + P_7(4)$$

$$P_7(0) = 0.6^7 = 0.0279936$$

$$P_7(1) = C_7^1 \cdot 0.4 \cdot 0.6^6 = 7 \cdot 0.4 \cdot 0.6^6 = 0.1306368$$

$$P_7(2) = C_7^2 \cdot 0.4^2 \cdot 0.6^5 = 21 \cdot 0.4^2 \cdot 0.6^6 = 0.2612736$$

$$P_7(3) = C_7^3 \cdot 0.4^3 \cdot 0.6^4 = 35 \cdot 0.4^3 \cdot 0.6^4 = 0.290304$$

$$P(A) = 0.0279936 + 0.1306368 + 0.2612736 + 0.290304 + 0.193536 = \\ = 0.903744$$

в) Пусть событие В - не менее 4 попаданий, тогда $\overline{B} -$ менее 4 попаданий

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P_7(0) - P_7(1) - P_7(2) - P_7(3)$$

$$P(B) = 1 - 0.0279936 - 0.1306368 - 0.2612736 - 0.290304 = 0.289792$$

г) С - от 2 до 5 попаданий включительно,

$$P_7(5) = C_7^5 \cdot 0.4^5 \cdot 0.6^2 = 21 \cdot 0.4^5 \cdot 0.6^2 = 0.0774144$$

$$P(C) = 0.2612736 + 0.290304 + 0.193536 + 0.0774144 = 0.822528$$

Ответ: а) 0.193536; б)0.903744; в) 0.289792; г)0.822528.

7. Определите вероятность того, что среди 500 изготовленных изделий бракованными окажутся:

а) ровно 3 изделий.

б) не более 5 изделий

если вероятность брака равна 0,008 и определите вероятность того, что среди 1400 изготовленных изделий бракованными окажутся

в) ровно 105 изделий.

г) от 70 до 120 изделий

если вероятность брака равна 0,085

Решение:

а) Поскольку вероятность «успеха» - брака изделия $p = 0.008$ достаточно мала, а число испытаний велико, то будем использовать формулу Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},$$

$$\lambda = np.$$

Итак, $n = 500, p = 0.008$, следовательно, $\lambda = 4$.

Ровно 3 изделия окажутся бракованными:

$$P_{500}(3) = \frac{4^3 e^{-4}}{3!} \approx 0.1954$$

б) А – бракованными окажутся не более 5 изделий

$$P(A) = P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) + P_{500}(3) + P_{500}(4) + P_{500}(5) =$$

$$= e^{-4}\left(1 + 4 + \frac{4^2}{2} + \frac{4^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \frac{4^5}{5!}\right) = \frac{643}{15e^4} \approx 0.7851$$

в) Итак, $n = 1400, p = 0.085, np = 119, npq = 108.885$

По формуле Муавра-Лапласа вероятность m успехов в серии из n испытаний определяется по формуле:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

где $\varphi(x)$ – интегральная функция Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$. При этом считаем, что $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Значения функции находим из таблиц.

$$P_{1400}(105) \approx \frac{1}{\sqrt{108.885}} \varphi\left(\frac{105-119}{\sqrt{108.885}}\right) = \frac{1}{\sqrt{108.885}} \varphi(-1.342) \approx 0.0155$$

г) Воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа (m – число успехов в серии из n испытаний):

$$P(a < m < b) = \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\Phi(x)$ – интегральная функция Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-x^2/2}\, dx$. При этом считаем, что $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, При $x > 5$ принимаем $\Phi(x) \approx 0.5$. Значения функции находим из таблиц.

$$P(70 < m < 120) = \Phi\left(\frac{120-119}{\sqrt{108.885}}\right) - \Phi\left(\frac{70-119}{\sqrt{108.885}}\right) \approx \Phi(0.096) - \Phi(-4.696) =$$

$$= \Phi(0.096) + \Phi(4.696) \approx 0.0382 + 0.5 = 0.5382$$

Ответ: 0.5382.

8. В наборе 7 шаров белого цвета, 5 шаров синего и 3 шаров красного цвета. Из набора случайным образом без возвращения вынимают 6 шаров. Случайная величина ξ – число вынутых белых шаров. Найдите:

а) Ряд распределения случайной величины ξ.

б) Вероятность попадания случайной величины ξ в интервалы

(3; 6), [3; 6); (3; 6], [3; 6].

в) Найдите ряд распределения случайных величин $\eta = (7-\xi)^2 - 10, \mu = |\xi^3 - 6\xi^2|$.

Решение:
ξ может принимать значение от 0 до 6,

$$P(\xi = k) = \frac{C_6^k C_9^{6-k}}{C_{15}^6}$$

$$C_{15}^6 = \frac{15!}{6!\,9!} = 5005$$

Число способов $C_7^k C_8^{6-k}$:

k	0	1	2	3	4	5	6
$C_7^k C_8^{6-k}$	28	392	1470	1960	980	168	7

а) Ряд распределения случайной величины ξ.

ξ	0	1	2	3	4	5	6
p	0,005594	0,078322	0,293706	0,391608	0,195804	0,033566	0,001399

б) Вероятность попадания случайной величины ξ в интервалы

$$P(\xi \in (3;\ 6)) = P(\xi = 4) + P(\xi = 5) = 0.229371$$

$$P(\xi \in [3;\ 6)) = P(\xi = 3) + P(\xi = 4) + P(\xi = 5) = 0.620979$$

$$P(\xi \in\ (3; 6]) = P(\xi = 4) + P(\xi = 5) + P(\xi = 6) = 0.230769$$

$$P(\xi \in [3;\ 6]) = P(\xi = 3) + P(\xi = 4) + P(\xi = 5) + P(\xi = 6) = 0.622378$$

в) Ряд распределения случайных величин $\eta = (7-\xi)^2 - 10, \mu = |\xi^3 - 6\xi^2|$

Вычислим значения случайных величин η и μ:

ξ	0	1	2	3	4	5	6
η	39	26	15	6	-1	-6	-9
μ	0	5	16	27	32	25	0
p	0,005594	0,078322	0,293706	0,391608	0,195804	0,033566	0,001399

Составим ряд распределения η и μ, упорядочив значения случайных величин по возрастанию и, если надо, складывая вероятности при одинаковых значениях:

η	-9	-6	-1	6	15	26	39
p	0,001399	0,033566	0,195804	0,391608	0,293706	0,078322	0,005594

μ	0	5	16	25	27	32
p	0,006993	0,078322	0,293706	0,033566	0,391608	0,195804

9. Непрерывная случайная величина ξ имеет плотность распределения $p(x)$.

$$p(x) = \begin{cases} A(x-1)^2, & -2 \le x \le 2 \\ 0, & x \le -2, x > 2 \end{cases}.$$

Найдите:

а) Константу A

По условию нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1,$$

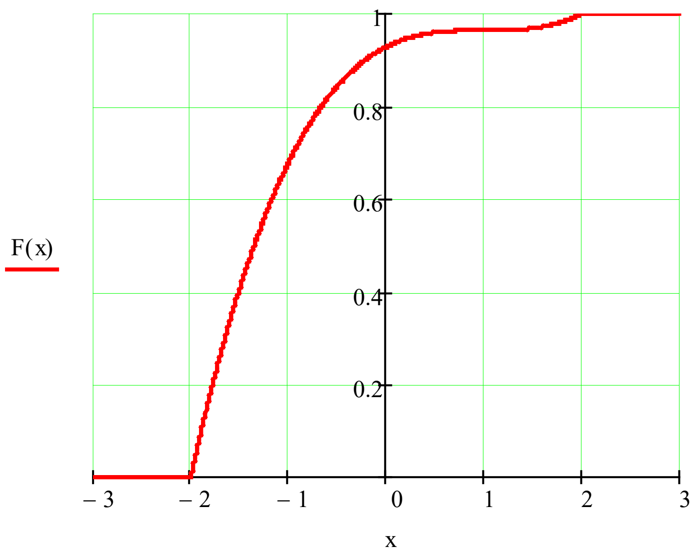
$$A\int_{-2}^{2}(x-1)^2dx = \frac{A(x-1)^3}{3}\bigg|_{-2}^{2} = \frac{28A}{3} \Rightarrow A = \frac{3}{28}$$

б) Функцию распределения случайной величины ξ и постройте ее график.

Найдём функцию распределения:

$$F_\xi(x) = \frac{3}{28}\int_{-2}^{x}(x-1)^2dx = \frac{(x-1)^3}{28}\bigg|_{-2}^{x} = \frac{(x-1)^3+27}{28}$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2 \\ \dfrac{(x-1)^3+27}{28}, & x \in (-2, 2] \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$



в) Вычислите функцию распределения и плотность распределения случайной величины $\eta = 2(\xi - 1)^3 + 2$.

$$F_\eta(y) = P(\eta < y) = P(2(\xi - 1)^3 + 2 < y) = P(2(\xi - 1)^3 < y - 2) =$$

$$= P\left(\xi < 1 + \sqrt[3]{\frac{y-2}{2}}\right) = F_\xi\left(1 + \sqrt[3]{\frac{y-2}{2}}\right) = \frac{\left(1 + \sqrt[3]{\frac{y-2}{2}} - 1\right)^3 + 27}{28} = \frac{y + 52}{56}$$

$$x = -2 \Rightarrow y = -52, \qquad x = 2 \Rightarrow y = 4$$

Функция распределения:

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le -52 \\ \dfrac{y+52}{56}, & y \in (-52, 4] \\ 1, & y > 4 \end{cases}$$

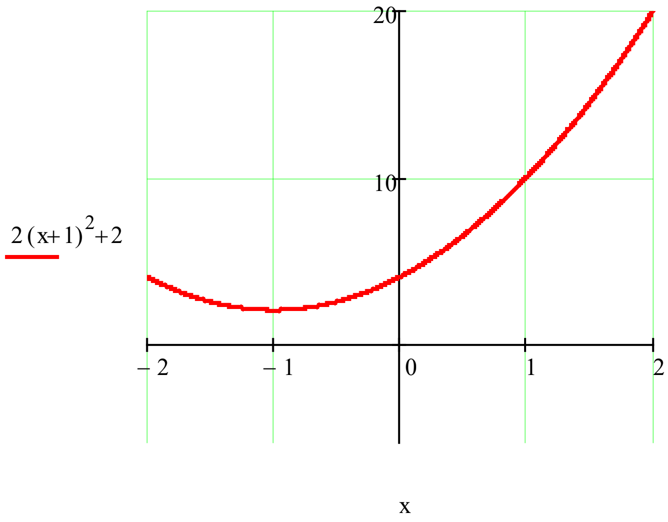
$$p_\eta(y) = F'_\eta(y)$$

$$p_\eta(y) = \frac{1}{56}$$

Плотность распределения:

$$p_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le -52 \\ \dfrac{1}{56}, & y \in (-52, 4] \\ 0, & y > 4 \end{cases}$$

г) Вычислите функцию распределения и плотность распределения случайной величины $\mu = 2(\xi + 1)^2 + 2$



$$y = 2(x+1)^2 + 2 \Longrightarrow g(y) = \begin{cases} -1 + \sqrt{\dfrac{y-2}{2}} \text{ при } x \geq -1 \\ -1 - \sqrt{\dfrac{y-2}{2}} \text{ при } x < -1 \end{cases}$$

$$p_\mu(y) = p_\xi(g(y))|g'(y)|$$

$$|g'(y)| = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{y-2}}$$

$$x = -2 \Longrightarrow y = 4, x = 0 \Longrightarrow y = 4$$

$$x = -1 \Longrightarrow y = 2\,, x = 2 \Longrightarrow y = 20$$

При $-2 \leq x \leq 0$, $y \in [2; 4]$.

$$p_\mu(y) = \left(\frac{3}{28}\left(-1 + \sqrt{\frac{y-2}{2}} - 1\right)^2 + \frac{3}{28}\left(-1 - \sqrt{\frac{y-2}{2}} - 1\right)^2\right)\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{y-2}} =$$

$$= \frac{3\sqrt{2}(y+6)}{112\sqrt{y-2}}$$

При $0 \leq x \leq 2$, $y \in [4; 20]$.

$$p_\mu(y) = \frac{3}{28}\left(-1 - \sqrt{\frac{y-2}{2}} - 1\right)^2 \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{y-2}} = \frac{3\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{y-2}{2}} - 2\right)^2}{112\sqrt{y-2}}$$

Плотность распределения:

$$p_\mu(y) = \begin{cases} 0, & y \notin [2, 20] \\ \dfrac{3\sqrt{2}(y+6)}{112\sqrt{y-2}}, & y \in [2, 4] \\ \dfrac{3\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{y-2}{2}} - 2\right)^2}{112\sqrt{y-2}}, & y \in (4, 20] \end{cases}$$

При $y \in (2; 4]$:

$$F_\mu(y) = \int_2^y \frac{3\sqrt{2}(y+6)}{112\sqrt{y-2}} dy = 3\sqrt{2}\int_2^y \frac{(y-2)+8}{112\sqrt{y-2}} dy =$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{112}\int_2^y \left(\sqrt{y-2} + \frac{8}{\sqrt{y-2}}\right) dy = \frac{3\sqrt{2}}{112} \cdot \left(\frac{2}{3}(y-2)^{\frac{3}{2}} + 16\sqrt{y-2}\right)\Bigg|_2^y =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\sqrt{y-2}(y+22)}{56}$$

$$F_\mu(20) = \frac{13}{14}$$

При $y \in (4; 20]$:

$$\frac{3\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{y-2}{2}} - 2\right)^2}{112\sqrt{y-2}} = \frac{9\sqrt{2}}{112\sqrt{y-2}} + \frac{3\sqrt{2}}{224}\sqrt{y-2} + \frac{3\sqrt{2}}{112\sqrt{y-2}} - \frac{3}{28}$$

$$F_\mu(y) = \frac{13}{14} + \int_4^y \left(\frac{12\sqrt{2}}{112\sqrt{y-2}} + \frac{3\sqrt{2}}{224}\sqrt{y-2} - \frac{3}{28}\right) dy =$$

$$= \frac{13}{14} + \left(\frac{3\sqrt{2}}{14}\sqrt{y-2} + \frac{3\sqrt{2}}{224} \cdot \frac{2}{3}(y-2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{28}y\right)\Bigg|_4^y =$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{14}\sqrt{y-2} + \frac{\sqrt{2}(y-2)^{3/2}}{112} + \frac{25-3y}{28}$$

Функция распределения:

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le 2 \\ \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{y-2}(y+22)}{56}, & y \in (2,4] \\ \dfrac{3\sqrt{2}}{14}\sqrt{y-2} + \dfrac{\sqrt{2}(y-2)^{3/2}}{112} + \dfrac{25-3y}{28}, & y \in (4,20] \\ 1, & y > 20 \end{cases}$$

10. В условиях задачи 8 выбирают $m = 6$ шаров. (В наборе 7 шаров белого цвета, 5 шаров синего и 3 шаров красного цвета). Пусть ξ число вынутых белых шаров, а через η – красных.

Найдите: а) Совместное распределение случайных величин ξ и η (ряд распределения).

ξ может принимать значение от 0 до 6, η может принимать значение от 0 до 3. Всего 15 шаров, извлекаем 5.

$$P(\xi = k, \eta = m) = \frac{C_7^k C_3^m C_5^{6-k-m}}{C_{15}^6}; \; C_{15}^6 = \frac{15!}{6!\,9!} = 5005$$

Число способов $C_7^k C_3^m C_5^{6-k-m}$:

$k \setminus m$	0	1	2	3
0		3	15	10
1	7	105	210	70
2	105	630	630	105
3	350	1050	525	35
4	350	525	105	
5	105	63		
6	7			

Совместное распределение случайных величин ξ и η

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3	Сумма
0		0,000599	0,002997	0,001998	0,005594
1	0,001399	0,020979	0,041958	0,013986	0,078322
2	0,020979	0,125874	0,125874	0,020979	0,293706
3	0,069930	0,209790	0,104895	0,006993	0,391608
4	0,069930	0,104895	0,020979		0,195804
5	0,020979	0,012587			0,033566
6	0,001399				0,001399
Сумма	0,184615	0,474725	0,296703	0,043956	1

б) Ряды распределения случайных величин ξ и η.

ξ	0	1	2	3	4	5	6
$P(\xi)$	0,005594	0,078322	0,293706	0,391608	0,195804	0,033566	0,001399

η	0	1	2	3
$P(\eta)$	0,184615	0,474725	0,296703	0,043956

в) Условные распределения случайной величины ξ при условии η, случайной величины η при условии ξ, проверить случайные величины на независимость

Условные распределения:

$$P(\xi = k|\eta = m) = \frac{P(\xi = k, \eta = m)}{P(\eta = m)}$$

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 0)$:

ξ	P
1	0,007576
2	0,113636
3	0,378788
4	0,378788
5	0,113636
6	0,007576
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 1)$:

ξ	P
0	0,001263
1	0,044192
2	0,265152
3	0,441919
4	0,220960
5	0,026515
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 2)$:

ξ	P
0	0,010101
1	0,141414
2	0,424242
3	0,353535
4	0,070707
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 3)$:

ξ	P
0	0,045455
1	0,318182
2	0,477273
3	0,159091
Сумма	1

$$P(\eta = m|\xi = k) = \frac{P(\xi = k, \eta = m)}{P(\xi = k)}$$

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 0)$:

η	1	2	3	Сумма
P	0,107143	0,535714	0,357143	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 1)$:

η	0	1	2	3	Сумма
P	0,017857	0,267857	0,535714	0,178571	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 2)$:

η	0	1	2	3	Сумма
P	0,071429	0,428571	0,428571	0,071429	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 3)$:

η	0	1	2	3	Сумма
P	0,178571	0,535714	0,267857	0,017857	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 4)$:

η	0	1	2	Сумма
P	0,357143	0,535714	0,107143	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 5)$:

η	0	1	Сумма
P	0,625	0,375	1

$$P(\eta = 0|\xi = 6) = 1$$

Для независимых случайных величин

$$P(\xi < x, \eta < y) = P(\xi < x)P(\eta < y)$$

Например

$$P(\xi < 1, \eta < 1) = 0$$

$$P(\xi < 1)P(\eta < 1) = 0.005594 \cdot 0.184615 \neq 0$$

Равенство

$$P(\xi < 1, \eta < 1) = P(\xi < 1)P(\eta < 1) - \text{неверно}$$

Следовательно, ξ и η зависимы.

г) Значения двумерной функции распределения $F_{\xi\eta}(x, y)$в заданных точках $(x, y) = (5; 3), (7; 3), (2; 6)$,

$$F_{\xi\eta}(5, 3) = P(\xi < 7, \eta < 3) = P(\eta < 3) = P(\eta = 0) + P(\eta = 1) + P(\eta = 2) =$$

$$= 0.956044$$

$$F_{\xi\eta}(2, 6) = P(\xi < 2, \eta < 6) = P(\xi < 2) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) = 0.083916$$

$$F_{\xi\eta}(5, 3) = P(\xi < 5, \eta < 3) = 0.921079$$

д) Ряд распределения новой случайной величины $\mu = |\xi - \eta^2|$

Составим таблицу значений случайной величины μ:

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3
0		1	4	9
1	1	0	3	8
2	2	1	2	7
3	3	2	1	6
4	4	3	0	
5	5	4		
6	6			

Далее определяем соответствующие вероятности, складывая вероятности при одинаковых значениях μ:

μ	0	1	2	3	4
$P(\mu)$	0,041958	0,232767	0,356643	0,216783	0,085514
μ	5	6	7	8	9
$P(\mu)$	0,020979	0,008392	0,020979	0,013986	0,001998

е) Ряд распределения новой двумерной дискретной случайной величины (μ_1; μ_2)

$$\mu_1 = \xi - (3 + \eta), \mu_2 = \eta - 2\xi + 2$$

Составим таблицу значений случайной величины μ_1:

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3
0		-4	-5	-6
1	-2	-3	-4	-5
2	-1	-2	-3	-4
3	0	-1	-2	-3
4	1	0	-1	
5	2	1		
6	3			

Далее определяем соответствующие вероятности, складывая вероятности при одинаковых значениях μ:

μ_1	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$P(\mu)$	0,001998	0,016983	0,063536	0,153846	0,232168	0,251748	0,174825	0,082517	0,020979	0,001399

Составим таблицу значений случайной величины μ_2:

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3
0		3	4	5
1	0	1	2	3
2	-2	-1	0	1
3	-4	-3	-2	-1
4	-6	-5	-4	
5	-8	-7		
6	-10			

Далее определяем соответствующие вероятности, складывая вероятности при одинаковых значениях μ:

μ_2	-10	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2
$P(\mu)$	0,001399	0,020979	0,012587	0,069930	0,104895	0,090909	0,209790	0,125874
μ_2	-1	0	1	2	3	4	5	
$P(\mu)$	0,132867	0,127273	0,041958	0,041958	0,014585	0,002997	0,001998	

Совместное распределение случайных величин μ_1 и μ_2

$\mu_1 \setminus \mu_2$	-10	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2
-6								
-5								
-4								
-3								
-2								0,10490
-1						0,02098	0,20979	0,02098
0					0,10490	0,06993		
1			0,01259	0,06993				
2		0,02098						
3	0,00140							

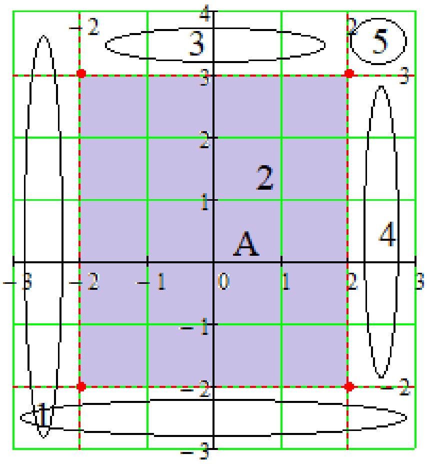
Продолжение таблицы справа:

$\mu_1 \backslash \mu_2$	-1	0	1	2	3	4	5
-6							0,001998
-5					0,01399	0,00300	
-4			0,02098	0,04196	0,00060		
-3	0,00699	0,12587	0,02098				
-2	0,12587	0,00140					
-1							
0							
1							
2							
3							

11. В четырехугольник с вершинами в точках $(-2;-2),(-2;3),(2;-2),(2;3)$ в соответствии с принципом геометрической вероятности падает частица. Пусть ξ и η - координаты по оси X и У точки падения частицы.

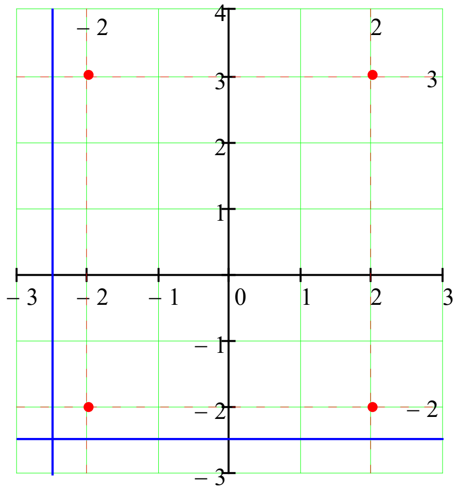
Найдите:

а) Совместную функцию распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ случайной величины (ξ,η) и совместную плотность распределения случайной величины (ξ,η).



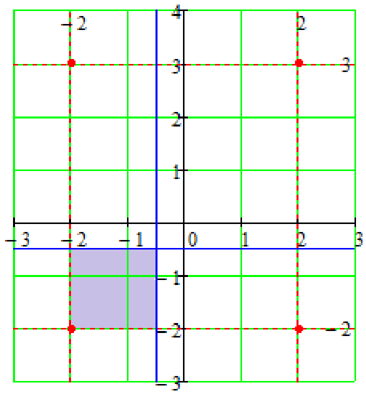
Всего имеем 5 различных областей.

Область 1: $(x<-2)$или $(y<-2)$:



Пересечения с четырёхугольником нет, $F_{\xi\eta}(x,y) = 0$.

Область 2: $(x,y) \in D$:

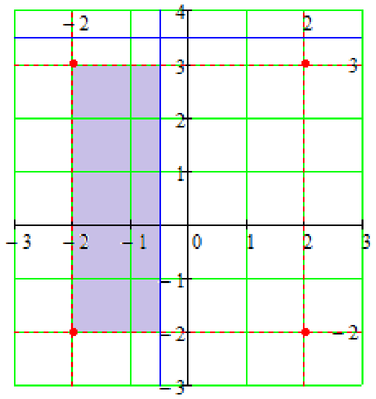


$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{S_D}\int_{-2}^{x}\int_{-2}^{y} dxdy$$

$S_D = 20 -$ площадь области.

$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{20}\int_{-2}^{x} dx \int_{-2}^{y} dy = \frac{(x+2)(y+2)}{20}.$$

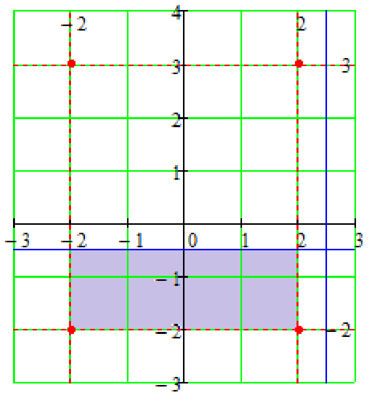
Область 3: $(-2 < x \leq 2)$и$(y > 3)$:



$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{S_D}\int_{-2}^{x}\int_{-2}^{3} dxdy$$

$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{20}\int_{-2}^{x} dx \int_{-2}^{3} dy = \frac{x+2}{4}.$$

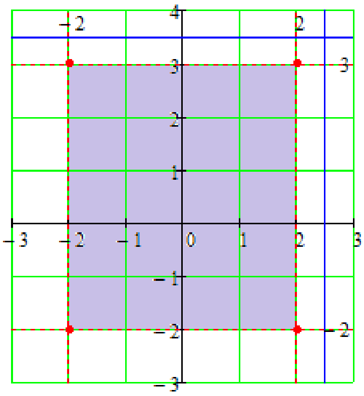
Область 4: $(x > 2)$и$(-2 < y \le 3)$:



$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{S_D}\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{y} dxdy$$

$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{20}\int_{-2}^{2} dx \int_{-2}^{y} dy = \frac{y+2}{5}.$$

Область 5: $(x > 2)$и$(y > 3)$:



$$F_{\xi\eta}(x,y)=\frac{1}{S_D}\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{3}dxdy=\frac{1}{20}\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{3}dxdy=1.$$

$$F_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}0, & (x<-2)\text{ или }(y<-2)\\ \dfrac{(x+2)(y+2)}{20}, & (x,y)\in D\\ \dfrac{x+2}{4}, & (-2<x\le 2)\text{и}(y>3)\\ \dfrac{y+2}{5}, & (x>2)\text{и}(-2<y\le 3)\\ 1, & (x>2)\text{и}(y>3)\end{cases}$$

Поскольку площадь четырёхугольника D равна 20, и точки распределены в соответствии с принципом геометрической вероятности то совместная плотность распределения имеет равномерное распределение внутри D:

$$p_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{20}, (x,y)\in D\\ 0, (x,y)\notin D\end{cases}.$$

б) Одномерные плотности и функции распределения случайных величин ξ и η.

$$p_{\xi}(x)=\int_{-2}^{3}p_{\xi\eta}(x,y)\,dy=\frac{1}{20}\int_{-2}^{3}1\,dy=\frac{1}{4}$$

$$p_{\xi}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, x\in[-2;2]\\ 0, x\notin[-2;2]\end{cases}.$$

$$F_{\xi}(x)=\int_{-2}^{x}p_{\xi}(x)\,dx=\frac{x+2}{4},\qquad -2<x\le 2$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2 \\ \dfrac{x+2}{4}, & -2 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$p_\eta(y) = \int_{-2}^{2} p_{\xi\eta}(x,y)\,dx = \frac{1}{20}\int_{-2}^{2} 1\,dy = \frac{1}{5}$$

$$p_\eta(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{5}, & y \in [-2;3] \\ 0, & y \notin [-2;3] \end{cases}.$$

$$F_\eta(y) = \int_{-2}^{y} p_\eta(y)\,dy = \frac{y+2}{5}, \qquad -2 < y \le 3$$

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le -2 \\ \dfrac{y+2}{5}, & -2 < y \le 3 \\ 1, & y > 3 \end{cases}$$

в) Условные функции распределения и условные плотности распределения случайной величины ξ при условии η, и случайной величины η при условии ξ. Проверьте, будут ли эти случайные величины независимыми

Условная плотность распределения

$$p_\xi(x|y) = \frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\eta(y)} = \frac{1}{4} \text{ при } (x,y) \in D$$

Условная плотность распределения

$$p_\eta(y|x) = \frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\xi(x)} = \frac{1}{5} \text{ при } (x,y) \in D$$

Для независимых случайных величин должно выполняться равенство:

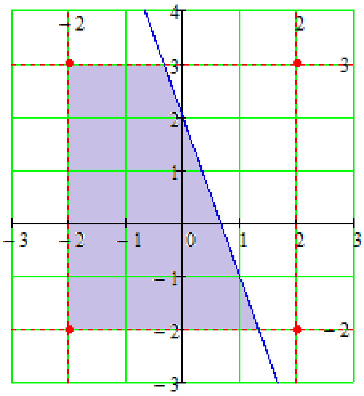
$$p_\xi(x|y) = p_\xi(x) - \text{верно}$$

Следовательно, случайные величины независимы. Условные функции распределения совпадают с одномерными:

$$F_\xi(x|y) = \begin{cases} 0, & x \le -2 \\ \dfrac{x+2}{4}, & -2 < x \le 2; \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$F_\eta(y|x) = \begin{cases} 0, & y \le -2 \\ \dfrac{y+2}{5}, & -2 < y \le 3 \\ 1, & y > 3 \end{cases}$$

г) Значение функции распределения случайной величины $\mu = 3\xi + \eta$ в точке $z = 2$.



$$F_\mu(2) = P(3\xi + \eta < 2) = P(\eta < 2 - 3\xi) = \frac{S_D}{S} = \frac{\dfrac{\frac{5}{3} + \frac{10}{3}}{2} \cdot 5}{20} = \frac{5}{8}$$

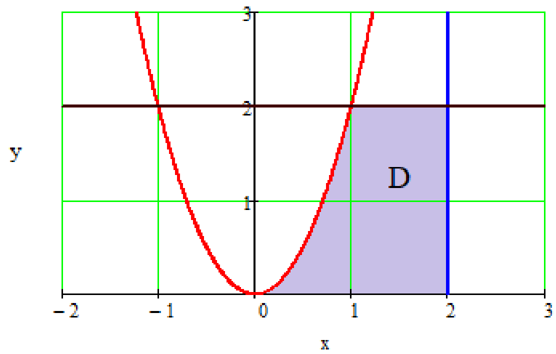
12. Совместная плотность распределения случайных величин ξ и η задана формулой

$$p_{\xi\eta}(x,y) = C(2x^2 + 3y), (x,y) \in D,$$

где область D задана в варианте. Найдите:

$$D = \{(x;y): x = 2, y = 2, y = 2x^2, y = 0\}$$

а) Постоянную C.



По закону нормировки

$$\iint\limits_D p_{\xi\eta}(x,y)dxdy = 1,$$

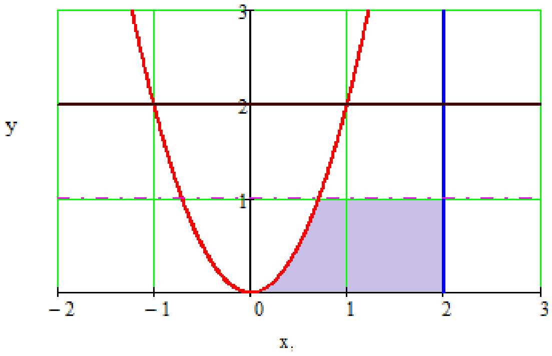
$$D: \begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ \sqrt{y/2} \le x \le 2 \end{cases}$$

$$\int_0^2 dy \int_{\sqrt{y/2}}^2 C(2x^2 + 3y)\,dx = C\int_0^2 \left(\frac{2x^3}{3} + 3yx\right)\Bigg|_{\sqrt{y/2}}^2 dy =$$

$$= C\int_0^2 \left(6y - \frac{5\sqrt{2}}{3}y^{\frac{3}{2}} + \frac{16}{3}\right)dy = C\left(3y^2 - \frac{2\sqrt{2}}{3}y^{\frac{5}{2}} + \frac{16}{3}y\right)\Bigg|_0^2 = \frac{52}{3}C$$

$$C = \frac{3}{52}$$

б) Значения двумерной функции распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ в заданных точках $(x,y) = (3;1)$



$$F_{\xi\eta}(3,1) = P(\xi < 3, \eta < 1) = P(\eta < 1) = \frac{3}{52}\int_0^1 dy \int_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^{2} (2x^2 + 3y)\,dx$$

$$= \frac{3}{52}\int_0^1 \left(\frac{2x^3}{3} + 3yx\right)\Bigg|_{\sqrt{y/2}}^{2} dy =$$

$$= \frac{3}{52}\int_0^1 \left(6y - \frac{5\sqrt{2}}{3}y^{\frac{3}{2}} + \frac{16}{3}\right)dy = \frac{3}{52}\left(3y^2 - \frac{2\sqrt{2}}{3}y^{\frac{5}{2}} + \frac{16}{3}y\right)\Bigg|_0^1 = \frac{25 - 2\sqrt{2}}{52} \approx$$

$$\approx 0.4264$$

в) Одномерные плотности и функции распределения случайных величин ξ и η.

При $0 \le x \le 1$:

$$p_\xi(x) = \int_0^{2x^2} p_{\xi\eta}(x,y)\,dy = \frac{3}{52}\int_0^{2x^2} (2x^2 + 3y)\,dy = \frac{3}{52}\left(2x^2 y + \frac{3y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2x^2} =$$

$$= \frac{15x^4}{26}$$

При $1 \le x \le 2$:

$$p_\xi(x) = \int_0^{2} p_{\xi\eta}(x,y)\,dy = \frac{3}{52}\int_0^{2} (2x^2 + 3y)\,dy = \frac{3}{52}\left(2x^2 y + \frac{3y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2} =$$

$$= \frac{6x^2 + 9}{26}$$

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{15x^4}{26}, & x \in [0;1] \\ \dfrac{6x^2+9}{26}, & x \in (1;2] \\ 0, & x \notin [0;2] \end{cases}.$$

При $0 \le x \le 1$:

$$F_\xi(x) = \frac{15}{26}\int_0^x x^4\,dx = \frac{15}{26}\left(\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^x = \frac{3x^5}{26};\ F_\xi(1) = \frac{3}{26}$$

При $1 \le x \le 2$:

$$F_\xi(x) = \frac{3}{26} + \frac{3}{26}\int_1^x (2x^2+3)\,dx = \frac{3}{26} + \frac{3}{26}\left(\frac{2x^3}{3} + 3x\right)\Bigg|_1^x = \frac{2x^3+9x-8}{26}$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{3x^5}{26}, & 0 < x \le 1 \\ \dfrac{2x^3+9x-8}{26}, & 1 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$y = 2x^2 \Longrightarrow x = \sqrt{\frac{y}{2}}$$

$$p_\eta(y) = \int_{\sqrt{y/2}}^{2} p_{\xi\eta}(x,y)\,dx = \frac{3}{52}\int_{\sqrt{y/2}}^{2} (2x^2+3y)\,dx = \frac{3}{52}\left(\frac{2x^3}{3} + 3yx\right)\Bigg|_{\sqrt{y/2}}^{2} =$$

$$= \frac{18y - 5\sqrt{2}y^{\frac{3}{2}} + 16}{52}$$

$$p_\eta(y) = \begin{cases} \dfrac{18y - 5\sqrt{2}y^{\frac{3}{2}} + 16}{52}, y \in [0;2]. \\ 0, y \notin [0;2] \end{cases}$$

$$F_\eta(y) = \int_0^y p_\eta(y)\,dy = \int_0^y \frac{18y - 5\sqrt{2}y^{\frac{3}{2}} + 16}{52}dy =$$

$$= \frac{1}{52}\left(9y^2 - 2\sqrt{2}y^{\frac{5}{2}} + 16y\right)\Bigg|_0^y = \frac{9y^2 - 2\sqrt{2}y^{\frac{5}{2}} + 16y}{52}$$

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \dfrac{9y^2 - 2\sqrt{2}y^{\frac{5}{2}} + 16y}{52}, & 0 < y \le 2 \\ 1, & y > 2 \end{cases}$$

г) Условные функции распределения и условные плотности распределения случайной величины ξ при условии η, и случайной величины η при условии ξ. Проверьте, будут ли эти случайные величины независимыми

Условная плотность распределения

$$p_{\xi}(x|y) = \frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_{\eta}(y)}$$

$$p_{\xi}(x|y) = \frac{\frac{3}{52}(2x^2+3y)}{\frac{18y-5\sqrt{2}y^{\frac{3}{2}}+16}{52}} = \frac{3(2x^2+3y)}{18y-5\sqrt{2}y^{\frac{3}{2}}+16} \text{ при } (x,y) \in D$$

Условная плотность распределения

$$p_{\eta}(y|x) = \frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_{\xi}(x)}$$

$$p_{\eta}(y|x) = \frac{\frac{3}{52}(2x^2+3y)}{\frac{15x^4}{26}} = \frac{2x^2+3y}{10x^4} \text{ при } (x,y) \in D \text{ и } 0 \le x \le 1$$

$$p_{\eta}(y|x) = \frac{\frac{3}{52}(2x^2+3y)}{\frac{6x^2+9}{26}} = \frac{2x^2+3y}{2(2x^2+3)} \text{ при } (x,y) \in D \text{ и } 1 \le x \le 2$$

Для независимых случайных величин должно выполняться равенство:

$$p_{\xi}(x|y) = p_{\xi}(x) - \text{неверно}$$

Следовательно, случайные величины зависимы.

$$F_{\xi}(x|y) = \frac{3}{18y-5\sqrt{2}y^{\frac{3}{2}}+16}\int_0^x (2x^2+3y)\,dx = \frac{3\left(\frac{2x^3}{3}+3yx\right)\Big|_0^x}{18y-5\sqrt{2}y^{\frac{3}{2}}+16} =$$

$$= \frac{(2x^3+9yx)}{18y-5\sqrt{2}y^{\frac{3}{2}}+16} \text{ при } (x,y) \in D$$

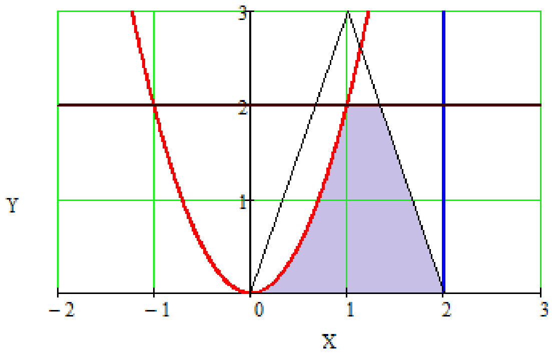
При $(x,y) \in D$ и $0 \le x \le 1$:

$$F_{\eta}(y|x) = \int_0^y \frac{2x^2+3y}{10x^4}dy = \frac{\left(2x^2y+\frac{3y^2}{2}\right)\Big|_0^y}{10x^4} = \frac{4x^2y+3y^2}{20x^4}$$

При $(x, y) \in D$ и $1 \le x \le 2$:

$$F_\eta(y|x) = \int_0^y \frac{2x^2 + 3y}{2(2x^2+3)} dy = \frac{\left(2x^2y + \frac{3y^2}{2}\right)\Big|_2^y}{2(2x^2+3)} = \frac{4x^2y + 3y^2}{4(2x^2+3)}$$

д) Вычислите вероятность попадания вектора (ξ, η) в треугольник с вершинами в точках $(2; 0), (1; 3), (0; 0)$. (Записать интеграл, расставить пределы интегрирования, считать интеграл - не надо)



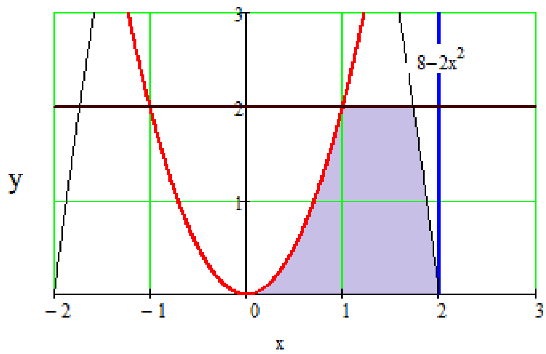
Стороны треугольника:

$$(2; 0), (1; 3): y = -3x + 6, x = \frac{-y - 6}{3} = -\frac{y}{3} - 2$$

$$P = \frac{3}{52}\int_0^2 dy \int_{\sqrt{y/2}}^{-\frac{y}{3}-2} (2x^2 + 3y)\, dx$$

е) Значение функции распределения $F_\mu(z)$ новой случайной величины $\mu = 2\xi^2 + \eta$ в точке $z = 8$. (Записать интеграл, расставить пределы интегрирования, считать интеграл - не надо)

$$F_\mu(8) = P(2\xi^2 + \eta \ < 8) = P(\eta < 8 - 2\xi^2)$$



$$y = 8 - 2x^2, x = \sqrt{\frac{8-y}{2}}$$

$$F_{\mu}(8) = \frac{3}{52}\int_0^2 dy \int_{\sqrt{y/2}}^{\sqrt{\frac{8-y}{2}}} (2x^2 + 3y)\, dx$$