

Методические рекомендации к решению задачи Д5

В задаче Д5 исследуем динамику механической системы твердых тел. Применяем теорему об изменении кинетической энергии в форме теоремы мощностей.

Теорема: Производная по времени кинетической энергии механической системы равна сумме мощностей всех внешних и внутренних сил, приложенных к телам системы:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{k=1}^n W_k^e + \sum_{k=1}^n W_k^i.$$

Здесь индекс «*e*» означает внешние (от англ. *external*), индекс «*i*» означает внутренние (от англ. *internal*).

Мощность силы, приложенной к твердому телу (в общем случае):

$W_{Fk} = (\bar{F}_k, \bar{v}_A) + (\bar{m}_A \bar{F}_k, \bar{\omega})$, где *A* – полюс тела, *v_A* – скорость полюса, ω – угловая скорость.

Мощность пары сил: $W_{m_k} = (\bar{m}_k, \bar{\omega})$.

В скалярной форме:

мощность силы – $W_F = Fv \cos \alpha$, где *v* – скорость движения точки приложения силы, α – угол между направлениями векторов силы \bar{F} и скорости \bar{v} ;

мощность пары сил (момента) – $W_M = M\omega$.

Кинетическая энергия твердого тела:

при поступательном движении – $T = \frac{1}{2}mv^2$, где *m* – масса тела, *v* – его скорость;

при вращательном движении – $T = \frac{1}{2}J_z\omega^2$, где *J_z* – момент инерции тела относительно оси вращения *z*, ω – угловая скорость тела;

при плоском движении – $T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_{zC}\omega^2$, где *m* – масса тела, *v_C* – скорость центра масс тела, *J_{zC}* – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс, ω – угловая скорость тела.

Момент инерции:

однородного тонкого диска массой *m*, радиусом *R* – $J_z = \frac{1}{2}mR^2$;

диска массой *m* с двумя рабочими радиусами *R* и *r* – $J_z = mr^2$, где *p* – радиус инерции диска.

План решения задачи.

1) Выполняем кинематический анализ системы – решаем задачу скоростей: определяем скорости тел и особых кинематических точек.

2) Выполняем динамический анализ системы:

- а) определяем полную кинетическую энергию механической системы,
- б) определяем суммарную мощность всех внешних сил, действующих на тела системы,
- в) применяем теорему мощностей и определяем искомое ускорение груза.

Общая структура решения задачи.

Решение задачи включает графическую и текстово-математическую части. В графической части показываем схему задачи, схему скоростей, систему внешних сил. В текстовой части приводим вычисления и необходимые комментарии. В конце отчета – ответы.

В 1 пункте решения выполняем анализ механизма и вводим особые кинематические точки.

Во 2 пункте решения показываем схему скоростей и выполняем кинематический анализ механизма.

Определяем скорости тел и особых кинематических точек.

Для тел, совершающих поступательное движение, определяем их скорости v . Для вращающихся тел определяем их угловые скорости ω . Для тел, совершающих плоскопараллельное движение, определяем скорость полюса (центра масс) v_C и угловую скорость вращательного движения вокруг полюса ω .

Скорость 3 тела v_3 считаем заданной, все остальные скорости тел и особых кинематических точек выражаем через скорость 3 тела.

В 3 пункте решения выполняем динамический анализ системы.

Рассматривая систему целиком, показываем систему внешних сил, действующих на тела системы. Там же показываем скорости тел системы.

Перечисляем активные силы, связи и реакции связей.

Связи – это ограничения, наложенные на движение тела.

В нашем примере:

(0-2) означает, что между основанием 0 и телом 2 связью является шероховатая поверхность, там действуют реакции связи:

а) сила трения $F_{тр2}$, приложенная в точке контакта тела 2 с основанием 0 и направленная против направления поступательного движения тела 2,

б) момент пары трения $M_{тр2}$, направленный против направления вращательного движения тела 2;

в) нормальная реакция основания N_2 , приложенная в точке контакта и направленная перпендикулярно плоскости основания от основания к телу 2.

(0-3) – связь с трением между основанием 0 и телом 3, там действуют реакции $F_{тр3}$ (сила трения) и N_3 (нормальная реакция основания).

(0-1) – основание 0 и тело 1 связывает неподвижная (закрепленная) ось вращения, которая препятствует перемещениям тела 1 вдоль осей x и y системы координат, но не запрещает поворот (вращение). Такая связь называется неподвижный шарнир. Реакции этой связи – силы X_{O1} и Y_{O1} приложенные в точке O_1 на оси вращения.

(0-4) – аналогичная (0-1) связь между основанием 0 и телом 4. Реакции этой связи – силы X_{O_4} и Y_{O_4} приложенные в точке O_4 на оси вращения.

(1-3) – связь (нить), через которую движение тела 3 (поступательное) вызывает движение тела 1 (вращательное).

(1-4) – связь (нить), через которую движение тела 1 (вращательное) вызывает движение тела 4 (вращательное).

(2-4) – связь (нить), через которую движение тела 4 (вращательное) вызывает движение тела 2 (плоскопараллельное).

В 4 пункте решения указываем, что используем для динамического анализа механической системы теорему мощностей.

В 5 пункте решения определяем полную кинетическую энергию механической системы T и ее производную $\frac{dT}{dt}$.

Для каждого из тел (звеньев) системы по-отдельности показываем вид движения этого тела. В зависимости от вида движения определяем кинетическую энергию этого тела (звена).

Суммируя кинетические энергии тел (звеньев), определяем полную кинетическую энергию механической системы.

Определяем производную по времени кинетической энергии механической системы. При этом следует иметь в виду, что скорость v_3 не постоянная, а зависит от времени. Поэтому функция полной кинетической энергии через v_3 зависит от времени и дифференцируется как сложная функция.

В 6 пункте решения определяем суммарную мощность внешних сил, приложенных к телам механической системы.

Для каждой внешней силы: выбираем силу, определяем скорость точки приложения этой силы, определяем (если необходимо) угол между направлением этой силы и направлением скорости точки приложения.

Вычисляем суммарную мощность всех внешних сил.

Применяем теорему мощностей, приравнивая производную кинетической энергии и суммарную мощность внешних сил. Определяем искомое ускорение тела 3.