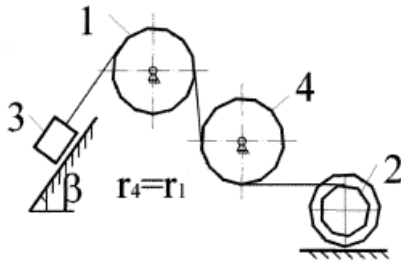


Задача Д5

Механическая система движется из состояния покоя под действием сил тяжести. Массы тел равны m_1, m_2, m_3, m_4 , размеры колес — r_1, R_2, r_2 . Радиус инерции колеса 2 — ρ_2 . Колеса, радиусы инерции которых не указаны, — однородные диски. Коэффициент трения скольжения груза 3 о плоскость равен f .

Нити невесомые, нерастяжимые и параллельны соответствующим плоскостям; проскальзыванием нитей и катящихся колес пренебречь.

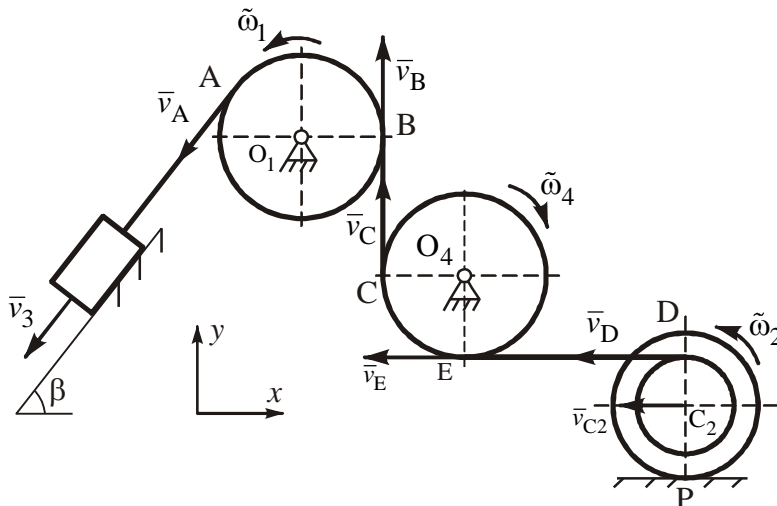
Определить ускорение груза 3.



Вариант											
0		5			6				9		
m_1 , кг	R_2 , см	m_2 , кг	r_1 , см	β , град	m_3 , кг	r_2 , см	α , град	f	m_4 , кг	ρ_2 , см	№ схемы
10	40	4,6	55	50	16	17	25	0,12	2	17	9

$$r_4 = r_1$$

Решение.



1. Рассмотрим движение механической системы, состоящей из 4 тел, в пространстве неподвижного основания.

Виды движения звеньев:

- 1 – вращательное,
- 2 – плоскопараллельное,
- 3 – поступательное,
- 4 – вращательное.

Особые кинематические точки:

Точка А движется по окружности с радиусом $O_1A = r_1$

Точка В движется по окружности с радиусом $O_1B = r_1$

Точка С движется по окружности с радиусом $O_4C = r_4$

Точка Е движется по окружности с радиусом $O_4E = r_4$

Точка D – траектория неизвестна

Точка C₂ движется по прямой.

2. Кинематический анализ.

Задача скоростей.

Выразим скорости тел механической системы и особых кинематических точек через скорость v_3 груза 3.

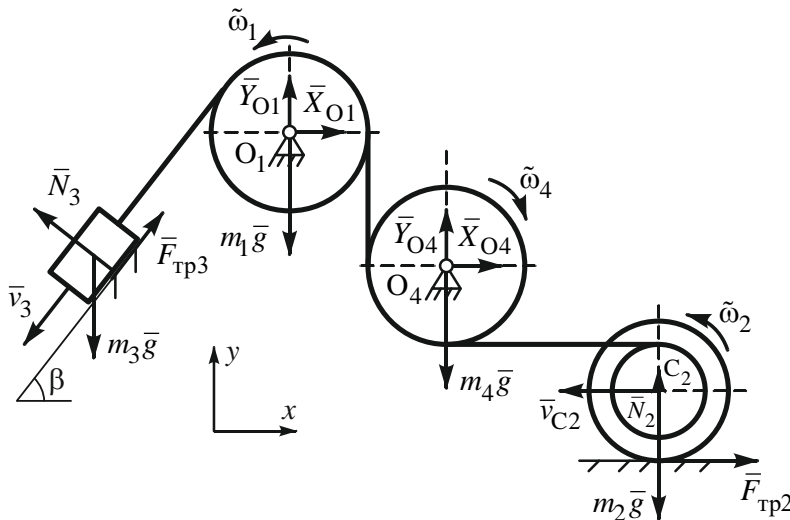
Принимаем: v_3 задана,

$$v_A = v_3, \omega_1 = \frac{v_A}{r_1} = \frac{v_3}{r_1}, v_B = \omega_1 r_1 = \frac{v_3}{r_1} r_1 = v_3,$$

$$v_C = v_B = v_3, \omega_4 = \frac{v_C}{r_4} = \frac{v_3}{r_1} = \omega_1, v_E = \omega_4 r_4 = \frac{v_3}{r_1} r_1 = v_3,$$

$$v_D = v_E = v_3, P - \text{МЦС}, \omega_2 = \frac{v_D}{|DP|} = \frac{v_3}{R_2 + r_2}, v_{C2} = \omega_2 |C_2 P| = v_3 \frac{R_2}{R_2 + r_2}.$$

3. Динамический анализ.



Активные силы : $m_1 \bar{g}$, $m_2 \bar{g}$, $m_3 \bar{g}$, $m_4 \bar{g}$.

Связи:

Внешние связи:

(0-2) – шероховатая поверхность,

(0-3) – шероховатая поверхность,

(0-1) – неподвижный цилиндрический шарнир в точке O₁,

(0-4) – неподвижный цилиндрический шарнир в точке O₄,

Внутренние связи:

(1-3) – гибкая невесомая нерастяжимая нить,

(1-4) – гибкая невесомая нерастяжимая нить,

(2-4) – гибкая невесомая нерастяжимая нить.

Реакции связей:

$$\bar{F}_{\text{тр}2}, \bar{N}_2, \bar{F}_{\text{тр}3}, \bar{N}_3, \bar{X}_{O1}, \bar{Y}_{O1}, \bar{X}_{O4}, \bar{Y}_{O4}.$$

$$F_{\text{тр}2} < fN_2, F_{\text{тр}3} = fN_3.$$

Система сил:

$$(m_1 \bar{g}, m_2 \bar{g}, m_3 \bar{g}, m_4 \bar{g}, \bar{F}_{\text{тр}2}, \bar{N}_2, \bar{F}_{\text{тр}3}, \bar{N}_3, \bar{X}_{O1}, \bar{Y}_{O1}, \bar{X}_{O4}, \bar{Y}_{O4}).$$

4. Применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы в дифференциальной форме (теорема мощностей):

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{k=1}^n W_k^e + \sum_{k=1}^n W_k^i, \text{ где } \sum_{k=1}^n W_k^i = 0.$$

5. Кинетическая энергия механической системы.

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4.$$

1 звено – вращательное движение:

$$T_1 = \frac{1}{2} J_{O1z} \omega_1^2, \quad J_{O1z} = \frac{m_1 r_1^2}{2}, \quad T_1 = \frac{1}{2} \frac{m_1 r_1^2}{2} \frac{v_3^2}{r_1^2} = \frac{m_1 v_3^2}{4}.$$

2 звено – плоскопараллельное движение:

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_{C2}^2 + \frac{1}{2} J_{C2z} \omega_2^2, \quad J_{C2z} = m_2 \rho_2^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} \frac{m_2 v_3^2 R_2^2}{(R_2 + r_2)^2} + \frac{1}{2} m_2 \rho_2^2 \frac{v_3^2}{(R_2 + r_2)^2}.$$

3 звено – поступательное движение:

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_3^2.$$

4 звено – вращательное движение:

$$T_4 = \frac{1}{2} J_{O4z} \omega_4^2, \quad J_{O4z} = \frac{m_4 r_4^2}{2}, \quad T_4 = \frac{1}{2} \frac{m_4 r_1^2}{2} \frac{v_3^2}{r_1^2} = \frac{m_4 v_3^2}{4}.$$

Полная кинетическая энергия механической системы:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_1 v_3^2}{4} + \frac{1}{2} \frac{m_2 v_3^2 R_2^2}{(R_2 + r_2)^2} + \frac{1}{2} m_2 \rho_2^2 \frac{v_3^2}{(R_2 + r_2)^2} + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \frac{m_4 v_3^2}{4} = \\ &= \frac{1}{2} v_3^2 \left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2 R_2^2}{(R_2 + r_2)^2} + \frac{m_2 \rho_2^2}{(R_2 + r_2)^2} + m_3 + \frac{m_4}{2} \right). \\ T &= \frac{1}{2} v_3^2 \left(\frac{10}{2} + \frac{4,6 \cdot 0,4^2}{(0,4 + 0,17)^2} + \frac{4,6 \cdot 0,17^2}{(0,4 + 0,17)^2} + 16 + \frac{2}{2} \right) = \frac{1}{2} v_3^2 \cdot 24,67. \end{aligned}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} \cdot 24,67 \cdot 2v_3 \cdot \frac{dv_3}{dt} = 24,67 \cdot v_3 \cdot a_3.$$

6. Мощности всех внешних сил.

$$\Sigma W_k^e = W_{m1g} + W_{m2g} + W_{m3g} + W_{m4g} + W_{F_{\text{тп}2}} + W_{N_2} + W_{F_{\text{тп}3}} + W_{N_3} + W_{X_{O1}} + W_{Y_{O1}} + W_{X_{O4}} + W_{Y_{O4}}$$

$$W_{m1g} = m_1 \bar{g} \cdot \bar{v}_{O1} = 0, \text{ т.к. } v_{O1} = 0,$$

$$W_{m2g} = m_2 \bar{g} \cdot \bar{v}_{C2} = m_2 g \cdot v_{C2} \cdot \cos 90^\circ = 0,$$

$$W_{m3g} = m_3 \bar{g} \cdot \bar{v}_3 = m_3 g \cdot v_3 \cdot \cos(90^\circ - \beta) = m_3 g \cdot v_3 \cdot \sin \beta,$$

$$W_{m4g} = m_4 \bar{g} \cdot \bar{v}_{O4} = 0, \text{ т.к. } v_{O4} = 0,$$

$$W_{F_{\text{тп}2}} = \bar{F}_{\text{тп}2} \cdot \bar{v}_P = 0, \text{ т.к. } v_P = 0,$$

$$W_{N_2} = \bar{N}_2 \cdot \bar{v}_P = 0, \text{ т.к. } v_P = 0,$$

$$W_{F_{\text{тп}3}} = \bar{F}_{\text{тп}3} \cdot \bar{v}_3 = F_{\text{тп}3} \cdot v_3 \cdot \cos 180^\circ = -F_{\text{тп}3} \cdot v_3,$$

$$W_{N_3} = \bar{N}_3 \cdot \bar{v}_3 = N_3 \cdot v_3 \cdot \cos 90^\circ = 0,$$

$$W_{X_{O1}} = \bar{X}_{O1} \cdot \bar{v}_{O1} = 0, \text{ т.к. } v_{O1} = 0,$$

$$W_{Y_{O1}} = \bar{Y}_{O1} \cdot \bar{v}_{O1} = 0, \text{ т.к. } v_{O1} = 0,$$

$$W_{X_{O4}} = \bar{X}_{O4} \cdot \bar{v}_{O4} = 0, \text{ т.к. } v_{O4} = 0,$$

$$W_{Y_{O4}} = \bar{Y}_{O4} \cdot \bar{v}_{O4} = 0, \text{ т.к. } v_{O4} = 0.$$

Суммарная мощность всех внешних сил:

$$\Sigma W_k^e = m_3 g \cdot v_3 \cdot \sin \beta - F_{\text{тр}3} \cdot v_3,$$

$$F_{\text{тр}3} = f N_3 = f m_3 g \cos \beta,$$

$$\Sigma W_k^e = m_3 g \cdot v_3 \cdot \sin \beta - f \cdot m_3 g \cdot v_3 \cdot \cos \beta = v_3 m_3 g (\sin \beta - f \cos \beta).$$

По теореме мощностей:

$$24,67 v_3 a_3 = v_3 m_3 g (\sin \beta - f \cos \beta),$$

$$24,67 a_3 = m_3 g (\sin \beta - f \cos \beta).$$

Ускорение a_3 :

$$a_3 = \frac{1}{24,67} m_3 g (\sin \beta - f \cos \beta) = \frac{16 \cdot 9,8}{24,67} (\sin 50^\circ - 0,12 \cos 50^\circ) = 4,38 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a_3 = 4,38 \text{ м/с}^2$.