

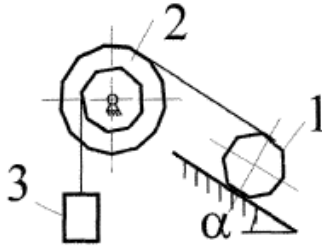
Задача Д6

Механическая система движется из состояния покоя под действием сил тяжести. Известны массы тел m_1, m_2, m_3 , размеры колес r_1, R_2, r_2 . Радиус инерции колеса 2 – ρ_2 ; колесо 1 – однородный диск. Коэффициент трения скольжения груза 3 о плоскость равен f . Коэффициент трения качения колеса 1 о плоскость равен δ .

Нити невесомые, нерастяжимые и параллельны соответствующим плоскостям; проскальзыванием нитей и катящихся колес пренебречь.

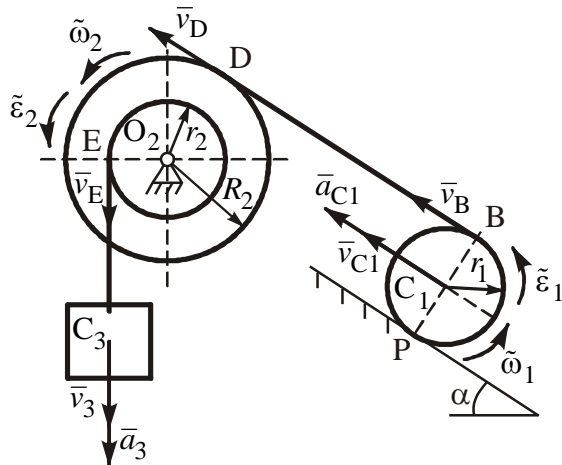
Определить:

- силу натяжения нити, на которой подвешен груз 3;
- реакцию подшипника колеса 2.



| Вариант | | | | | | | | | | | |
|---------------|---------------|---------------|---------------|-------------------|---------------|---------------|------------------|--------------------|------------------|-----|------------|
| 0 | | 5 | | | 6 | | | | 9 | | |
| m_2 , кг | r_1 , см | m_3 , кг | r_2 , см | β , град | m_1 , кг | R_2 , см | ρ_2 , см | α , град | δ , см | f | № схемы |
| 3,6 | 11 | 15 | 32 | 65 | 7 | 58 | 20 | 16 | 7 | 0 | 9 |

Решение.



1. Рассмотрим движение механической системы, состоящей из 3 тел, в инерциальной системе отсчета.

Виды движения звеньев:

- плоскопараллельное,
- вращательное,
- поступательное.

Особые кинематические точки:

Точка C_3 движется по прямой

Точка E движется по окружности с радиусом $O_2E = r_2$

Точка D движется по окружности с радиусом $O_2D = R_2$

Точка B – траектория неизвестна

Точка C_1 движется по прямой.

2. Кинематический анализ.

Задача скоростей.

Выразим скорости тел механической системы и особых кинематических точек через скорость v_3 груза 3. v_3 задана,

$$v_E = v_3, \quad \omega_2 = \frac{v_E}{r_2} = \frac{v_3}{r_2}, \quad v_D = \omega_2 R_2 = v_3 \frac{R_2}{r_2},$$

$$v_B = v_D = v_3 \frac{R_2}{r_2}, \quad P - \text{МЦС}, \quad \omega_1 = \frac{v_B}{|BP|} = \frac{v_B}{2r_1} = v_3 \frac{R_2}{2r_1 r_2}, \quad v_{C1} = \omega_1 \cdot |C_1 P_1| = \omega_1 r_1 = v_3 \frac{R_2}{2r_2}.$$

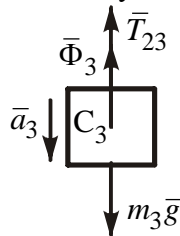
Задача ускорений.

$$\varepsilon_2 = \frac{a_3}{r_2}, \quad \varepsilon_1 = a_3 \frac{R_2}{2r_1 r_2}, \quad a_{C1} = a_3 \frac{R_2}{2r_2}.$$

3. Динамический анализ.

Разобьем МС на части и рассмотрим движение каждой из частей в отдельности.

3.1. Поступательное движение груза 3.

Активные силы: $m_3 \bar{g}$.

Связи:

(3-2) – гибкая невесомая нерастяжимая нить.

Реакция связи: \bar{T}_{23} .

Применяем принцип Даламбера.

$$\{d\bar{\Phi}_{3i}\} \sim \{\bar{\Phi}_3 = -m_3 \bar{a}_{C3}\}.$$

$$a_{C3} = a_3, \quad |\bar{\Phi}_3| = m_3 a_3.$$

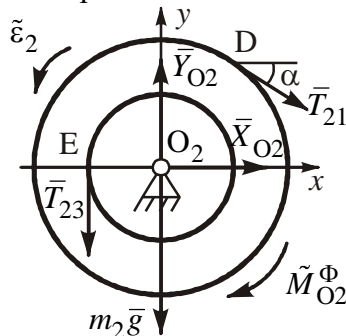
Система сил уравновешена: $(m_3 \bar{g}, \bar{T}_{23}, \bar{\Phi}_3) \sim 0$.

Уравнение равновесия:

$$\Sigma F_{ky} = 0: \quad m_3 g - \Phi_3 - T_{23} = 0,$$

$$m_3 g - m_3 a_3 - T_{23} = 0 \quad (1).$$

3.2. Вращательное движение колеса 2.

Активные силы: $m_2 \bar{g}$

Связи:

(2-3) – гибкая невесомая нерастяжимая нить,

(2-1) – гибкая невесомая нерастяжимая нить,

(0-2) – неподвижный цилиндрический шарнир в точке O_2 .

Реакции связей: $\bar{T}_{23}, \bar{T}_{21}, \bar{X}_{O2}, \bar{Y}_{O2}$.

Применяем принцип Даламбера.

$$\{d\bar{\Phi}_{2i}\} \sim \{\tilde{M}_{O2}^{\Phi} = -J_{O2z} \cdot \tilde{\varepsilon}_2\}$$

$$|M_{O2}^{\Phi}| = J_{O2z} \cdot \varepsilon_2 = m_2 \rho_2^2 \cdot \frac{a_3}{r_2}.$$

Система сил уравновешена: $(m_2 \bar{g}, \bar{T}_{21}, \bar{T}_{23}, \bar{X}_{O2}, \bar{Y}_{O2}, \tilde{M}_{O2}^{\Phi}) \sim 0$.

Уравнения равновесия:

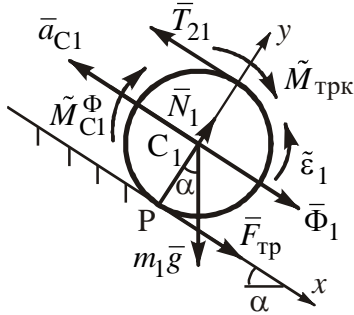
$$\Sigma F_{kx} = 0 : \quad X_{O2} + T_{21} \cos \alpha = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma F_{ky} = 0 : \quad Y_{O2} - m_2 g - T_{23} - T_{21} \sin \alpha = 0 \quad (3)$$

$$\Sigma \tilde{m}_{O2}(\bar{F}_k) = 0 : \quad T_{23} r_2 - T_{21} R_2 - M_{O2}^{\Phi} = 0$$

$$T_{23} r_2 - T_{21} R_2 - m_2 \rho_2^2 \cdot \frac{a_3}{r_2} = 0 \quad (4).$$

3.3. Плоскопараллельное движение колеса 1.



Активные силы: $m_1 \bar{g}$

Связи:

(1-2) – гибкая невесомая нерастяжимая нить,

(0-1) – шероховатая поверхность.

Реакции связей: $\bar{T}_{21}, \bar{N}_1, \bar{F}_{тр}, \tilde{M}_{трк}$.

$$F_{тр} < f N_1, \quad M_{трк} = \delta N_1.$$

Применяем принцип Даламбера.

$$\{d\bar{\Phi}_{1i}\} \sim \{\bar{\Phi}_1 = -m_1 \bar{a}_{C1}; \tilde{M}_{C1}^{\Phi} = -J_{C1z} \cdot \tilde{\varepsilon}_1\}$$

$$|\Phi_1| = m_1 a_{C1} = m_1 a_3 \frac{R_2}{2r_2}, \quad |M_{C1}^{\Phi}| = J_{C1z} \cdot \varepsilon_1 = \frac{m_1 r_1^2}{2} \cdot a_3 \frac{R_2}{2r_1 r_2} = a_3 \frac{m_1 r_1 R_2}{4r_2}.$$

Система сил уравновешена: $(m_1 \bar{g}, \bar{N}_1, \bar{F}_{тр}, \tilde{M}_{трк}, \bar{T}_{21}, \bar{\Phi}_1, \tilde{M}_{C1}^{\Phi}) \sim 0$.

Уравнения равновесия:

$$\Sigma F_{kx} = 0 : \quad m_1 g \sin \alpha + \Phi_1 - T_{21} + F_{тр} = 0 \quad (5)$$

$$\Sigma F_{ky} = 0 : \quad -m_1 g \cos \alpha + N_1 = 0 \quad (6)$$

$$\Sigma \tilde{m}_P(\bar{F}_k) = 0 : \quad -m_1 g r_1 \sin \alpha - \Phi_1 r_1 + 2T_{21} r_1 - M_{трк} - M_{C1}^{\Phi} = 0.$$

$$-m_1 g r_1 \sin \alpha - m_1 a_3 \frac{R_2}{2r_2} r_1 + 2T_{21} r_1 - \delta N_1 - a_3 \frac{m_1 r_1 R_2}{4r_2} = 0 \quad (7).$$

4. Решаем систему уравнений (1)-(7) относительно T_{23}, X_{O2} и Y_{O2} .

(7) =>

$$T_{21} = \frac{1}{2r_1} \left(m_1 g r_1 \sin \alpha + m_1 a_3 \frac{R_2}{2r_2} r_1 + \delta m_1 g \cos \alpha + a_3 \frac{m_1 r_1 R_2}{4r_2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 0,11} \left(7 \cdot 9,8 \cdot 0,11 \cdot \sin 16 + 7 \cdot a_3 \frac{0,58}{2 \cdot 0,32} \cdot 0,11 + 0,07 \cdot 7 \cdot 9,8 \cdot \cos 16 + a_3 \frac{7 \cdot 0,11 \cdot 0,58}{4 \cdot 0,32} \right) =$$

$$= \frac{1}{0,22} (2,08 + 0,7a_3 + 4,62 + 0,35a_3) = 4,77a_3 + 30,45.$$

$$(1) \Rightarrow T_{23} = m_3 g - m_3 a_3 = 15 \cdot 9,8 - 15 \cdot a_3 = 147 - 15a_3.$$

 T_{21} и $T_{23} \rightarrow (4)$

$$(147 - 15a_3)r_2 - (4,77a_3 + 30,45)R_2 - m_2 \rho_2^2 \cdot \frac{a_3}{r_2} = 0,$$

$$(147 - 15a_3) \cdot 0,32 - (4,77a_3 + 30,45) \cdot 0,58 - 3,6 \cdot 0,2^2 \cdot \frac{a_3}{0,32} = 0,$$

$$47,04 - 4,8a_3 - 2,77a_3 - 17,66 - 0,45a_3 = 0,$$

$$29,38 - 8,02a_3 = 0, \quad a_3 = 3,66 \text{ м/с}^2.$$

 T_{21} и T_{23} :

$$T_{21} = 4,77a_3 + 30,45 = 4,77 \cdot 3,66 + 30,45 = 47,9 \text{ Н},$$

$$T_{23} = 147 - 15a_3 = 147 - 15 \cdot 3,66 = 92,1 \text{ Н}.$$

(2) и (3) => X_{O2} и Y_{O2} :

$$X_{O2} = -T_{21} \cos \alpha = -47,9 \cdot \cos 16 = -46,04 \text{ Н},$$

$$Y_{O2} = m_2 g + T_{23} + T_{21} \sin \alpha = 3,6 \cdot 9,8 + 92,1 + 47,9 \cdot \sin 16 = 140,58 \text{ Н}.$$

Сила X_{O2} направлена противоположно показанному на чертеже.

Реакция подшипника колеса 2:

$$R_{O2} = \sqrt{X_{O2}^2 + Y_{O2}^2} = \sqrt{46,04^2 + 140,58^2} = 147,93 \text{ Н}.$$

Ответ:

$$T_{23} = 92,1 \text{ Н}, \quad X_{O2} = 46,04 \text{ Н}, \quad Y_{O2} = 140,58 \text{ Н}, \quad R_{O2} = 147,93 \text{ Н}.$$