

Контрольная работа

В задачах 1 – 10 проверить потенциальность плоского поля и вычислить работу силы при перемещении материальной точки единичной массы из точки А в точку В.

1. $\vec{F} = (x^2 - y)\vec{i} + (y^2 - x)\vec{j}; A(-1,0), B(0,1)$.
2. $\vec{F} = (x + 3y)\vec{i} + (3x - 2y)\vec{j}; A(0,0), B(1,1)$.
3. $\vec{F} = (x^2 + 2y)\vec{i} + (y^2 + 2x)\vec{j}; A(-4,0), B(0,2)$.
4. $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}; A(0,1), B(1,0)$.
5. $\vec{F} = 2y\vec{i} + (2x - y^2)\vec{j}; A(0, -1), B(1,0)$.
6. $\vec{F} = (2xy + y)\vec{i} + (x^2 + x)\vec{j}; A(-3,0), B(1,3)$.
7. $\vec{F} = (2xy - y^2)\vec{i} + (x^2 - 2xy)\vec{j}; A(0,0), B(1,2)$.
8. $\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (2xy - y^3)\vec{j}; A(0,0), B(1,1)$.
9. $\vec{F} = (6xy - x^2)\vec{i} + (3x^2 + 3y)\vec{j}; A(0,0), B(1, -1)$.
10. $\vec{F} = (x^2 - 2y)\vec{i} + (y^2 - 2x)\vec{j}; A(-2,0), B(0,1)$.

В задачах 11 – 20 вычислить криволинейный интеграл 1) по замкнутому контуру в положительном направлении (против часовой стрелки);

2) используя формулу Грина:

11. $\int_l (x - y^2)dy + (x^3 + 3y)dx; l: x=y, y=x^2$.
12. $\int_l ydx + (y + x^2)dy; l: y=1-x^2, y=0$.
13. $\int_l x^2 ydx + x^3 dy; l: x=y^2, y=x^2$.
14. $\int_l xy^2 dy - x^2 ydx; l: y=x, x=0, y=1$.
15. $\int_l 2xy^2 dx + x^2 ydy; l: y=x^3, x=0, y=1$.
16. $\int_l 3xydx + \frac{x^2}{2} dy; l: x=0, y=x-1, y=1-x$.
17. $\int_l 2x^2 y^2 dx + x^3 ydy; l: y=x^2, y=0, x=1$.
18. $\int_l (3x^2 y - y)dx + (x^3 + 3x)dy; l: y=x, x=1, y=0$.
19. $\int_l (5xy + 1)dx + (\frac{3}{2}x^2 + x)dy; l: x=0, y=0, y=1-x$.
20. $\int_l (4x^2 + y)dx + (2x - 3y^2)dy; l: x=0, y=0, x=1, y=x+1$.

В задачах 21 – 30 найти общее решение для ДУ с разделяющимися переменными:

21. $(1 - t) dy - y dt = 0$.

26. $y' = e^y / (t + 4)$.

22. $dt - \sqrt{1-t^2} dy = 0$.

23. $t\sqrt{1-y^2} dt + y\sqrt{1-t^2} dy = 0$.

24. $y' = y \cos t$.

25. $y' = t\sqrt{1-y^2}$.

27. $y' = (t^2 - t)(y^2 + 1)$.

28. $y' = e^{t+y}$.

29. $t\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{9+t^2} = 0$.

30. $(e^t + 3)dy + ye^t dt = 0$.

В задачах 31 – 40 решить задачу Коши для линейного уравнения:

31. $y' + \frac{y}{t} = \frac{1}{2}t^2 - 2t, \quad y(1) = 0$.

36. $y' + \frac{y}{t} = \frac{t+1}{t}, \quad y(1) = 1$.

32. $y' + y \operatorname{tg} t = \cos^2 t, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

37. $y' + \frac{y}{t+1} = -2t^3, \quad y(1) = \frac{1}{2}$.

33. $y' - \frac{y}{t+2} = t^2 + 2t, \quad y(-1) = 3/2$.

38. $y' - \frac{y}{t-2} = 8 - 4t, \quad y(1) = -\frac{1}{2}$.

34. $y' - \frac{y}{t+3} = 5 + t, \quad y(2) = 4$.

39. $y' - \frac{y}{t+1} = (t+1)^3, \quad y(0) = \frac{1}{2}$.

35. $y' + \frac{y}{t} = t + t^2, \quad y(1) = 1/2$.

40. $y' - \frac{y}{t} = -\frac{2}{t^2}, \quad y(1) = 1$.

В задачах 41 – 50 найти частное решение линейного однородного ДУ второго порядка:

41. $y'' - 10y' + 16y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2$.

42. $y'' + 2y' - 3y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3$.

43. $y'' + 4y' - 5y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2$.

44. $y'' - 2y' - 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -3$.

45. $y'' - 4y' - 12y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0$.

46. $y'' - 10y' + 9y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$.

47. $y'' + 8y' + 12y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$.

48. $y'' - 6y' + 5y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1$.

49. $y'' - 8y' + 7y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0$.

50. $y'' + 10y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$.

В задачах 51 – 60 найти общее решение линейного ДУ второго порядка, используя метод подбора:

51. $y'' - 4y' + 3y = 4e^{3t}$.

56. $y'' - 3y' = t + 5$.

52. $y'' + 3y' = 3t + 2$.

57. $y'' - 2y' - 8y = 3e^{-t}$.

53. $y'' + 2y' - 15y = 3e^t$.

58. $y'' - 4y' = 2t - 3$.

54. $y'' + 2y' = 2t - 1$.

59. $y'' + 4y' + 3y = -e^{2t}$.

55. $y'' + y' - 2y = 4e^{2t}$.

60. $y'' + 2y' + y = 4e^{-2t}$.

В задачах 61 – 70 для данных рядов найти а) радиус сходимости и указать область сходимости ряда; б) выписать первые три члена ряда:

61.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n n}{2n+1}$$

62.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n \cdot 2^n}{5^n}$$

63.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2+1}$$

64.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n+5}$$

65.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x-1)^n}{3n+1}$$

66.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n 7^n}{n \cdot 3^n}$$

67.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^2+5}$$

68.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^n \sqrt{n}}{3^n}$$

69.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (x+4)^n}{\sqrt{2n+1}}$$

70.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+5)^n \sqrt{n+1}}{6^n}$$

В задачах 71 – 80 Найти первые пять (ненулевых) членов разложения в степенной ряд решения ДУ с заданными начальными условиями:

71. $y'' - 2xy' + 2y = 0, y(0) = -1, y'(0) = 2$

72. $y'' - xy' + y - 1 = 0, y(0) = 2, y'(0) = 1$

73. $y' = y - x, y(0) = 1$

74. $y' = x + 2y, y(0) = 1$

75. $y' = 2x + y, y(0) = -1$

76. $y' - x^2 + y = 0, y(0) = 1$

77. $y'' - xy' - y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2$

78. $y' = x^2 - y, y(0) = 1$

79. $y'' = y' + xy, y(0) = 4, y'(0) = -2$

80. $y'' = y' - x^2, y(0) = 1, y'(0) = 1$

В задачах 81 – 90 1) разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье с периодом, равным длине интервала задания функции. 2) Изобразить график суммы ряда $S(x)$. 3) Спектр амплитуд при помощи диаграмм:

81.
$$f(x) = \begin{cases} -3, & -1 < x \leq 0 \\ 0, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

82.
$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi/2 < x \leq 0 \\ 4, & 0 < x \leq \pi/2 \end{cases}$$

83.
$$f(x) = \begin{cases} -3, & -3 < x \leq 0 \\ 5, & 0 < x \leq 3 \end{cases}$$

86.
$$f(x) = \begin{cases} 5, & -2 < x \leq 1 \\ 0, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

87.
$$f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x \leq 0.5 \\ 0, & 0.5 < x \leq 1 \end{cases}$$

88.
$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 3, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

84.
$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x \leq -1 \\ 3, & -1 < x \leq 2 \end{cases}$$

89.
$$f(x) = \begin{cases} 3, & -4 < x \leq 2 \\ 0, & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

85.
$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq -\pi/2 \\ -4, & -\pi/2 < x \leq \pi \end{cases}$$

90.
$$f(x) = \begin{cases} 2, & -\pi < x \leq \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < x \leq \pi \end{cases}$$