Практика для ИЗ №1

Пример 1. Проверить принадлежность последовательности $\{x_n\}$ пространству X:

а) $x_n = (1,2,3,\ldots,n,o,\ldots)$, $X = \ell_\infty$;

б) $x_n = (t) = \frac{2nt^2}{1+n^2\ t^2}$, $X = C[0,1]$;

в) $x_n = (t) = nte^{n^2\ t}$, $X = L_1[0,1]$.

□ а) Очевидно, что последовательность не является фундаментальной, так как (при m > n)

$p(x_n, x_m) = \sup\{0,0,\ldots,0,n+1,n+2,\ldots m,0,\ldots\} = m \geqslant 1$

$\forall$ n, m, ϵ ℕ , а значит и не сходится.

б) Пространство C[0,1] с метрикой $p(x,y) = \max\limits_{t\epsilon\,[0,1]} |y(t)-x(t)|$ является полным [4, стр.67]. Поэтому, если последовательность $\{x_n\}$ в нем фундаментальна, то она и сходится и наоборот.

Покажем, что $\{x_n\}$ сходится в C[0,1] к $x_0(t)=0$

$$P(x_n, 0) = \max_{t\,\epsilon\,[0,1]} \left|\frac{2nt^2}{1+n^2\ t^2}\right| = \max_{t\,\epsilon\,[0,1]} \frac{2n}{\frac{1}{t^2}+n} = \frac{2n}{1+n^2} \to 0$$

при $n \to \infty$.

в) Пространство L_1 [0,1] с метрикой $p(x,y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)|dt$ является полным [4, стр.67]. Поэтому, если последовательность $\{x_n\}$ в нем фундаментальна, то она и сходится и наоборот.

Проводим фундаментальность $\{x_n\}$ в L_1 [0,1]. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и докажем существование номера ℕ (ε) такого, что $\forall$ n, m. $n >$ ℕ, m > ℕ выполнено $p(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Пусть n > m,

$$p(x_n, x_m) = \int_0^1 |x_n(t) - x_m(t)|dt \leqslant \int_0^1 \left|x_n(t)|dt + \int_0^1 x_m(t)\right| dt =$$

$$= \int_0^1 nte^{-n^2t}\,dt + \int_0^1 mte^{-n^2t}dt = \frac{1}{n}(1 - e^{-n^2}) + \frac{1}{m}(1 - e^{-m^2}) =$$

$= \frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \left(\frac{1}{ne^{n^2}} + \frac{1}{me^{m^2}}\right) \leqslant \frac{1}{2n} < \varepsilon.$

Из этого равенства следует, что существует $\mathbb{N} = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$ для всех $t \in [0,1]$ сразу. Таким образом, $\{x_n\}$ фундаментальна в $L_1[0,1]$, а, следовательно, и сходящаяся.■

Пример 2. Найти норму элемента

а) $x(t) = \frac{1}{2}t + \cos t$ в $C[\pi/2, \pi]$;

б) $y = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \dots \frac{1}{3^n}, \dots\right)$ в ℓ_2.

□ а) Так как $x'(t) = 1/2 - \sin t = 0$ при $t = \frac{5}{6}\pi \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$,

то по определению нормы в $C[\pi/2, \pi]$

$\|x\| = max \left|\frac{1}{2}t + \cos t\right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}\pi + cos\frac{5}{6}\pi = \frac{5}{12}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\ t \in \left[\pi/2, \pi\right]$

б) По определению нормы в ℓ_2

$\|y\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}\right)^2 = \frac{1/9}{1-1/9} - \frac{1}{8}$; $\|y\| = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ ■

Пример 3. При каких $\lambda \neq 0$ отображение

$$x(t) = \lambda \int_0^1 ts\ x(s)ds + 2t$$

является сжимающим в $C_{[1,0]}$. При $\lambda = 1/2$ найти решение точностью до 10^{-2}

пологая $x_0 = f(t)$ и сравнить его с точным.

□ Определим отражение $f: C_{[1,0]} \longrightarrow C_{[1,0]}$ как

$$x(t) = \lambda \int_0^1 ts\ x(s)ds + 2t$$

Тогда исходное уравнение имеет вид $f(x) = x$. По теореме 2 сжимающее отображение f в полном метрическом пространстве имеет одну не подвижную точку, которая может быть найдена методом

последовательных приближений. Так как $C_{[1,0]}$ полное, осталось проверить что f −сжимающее.

Возьмем $x, y \epsilon C_{[1,0]}$ и оценим

$$\rho\left(f_{(x)}, f_{(y)}\right) = \max\left|f_{(x)(t)} - f_{(x)(y)}\right| = t \epsilon [0,1] = max \left|\lambda \int_0^1 ts\left(x(s) - y(s)\right)ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|\lambda|}{2} \cdot \max_{t \epsilon [0.1]} |t| \cdot \max_{s \epsilon [0.1]} |x(s) - y(s)| = \frac{\lambda}{2}\, \rho(x, y) = q\rho(x, y)$$

Следовательно, по определению 4, отображение f является сжимающим, если $|\lambda| < 2$.

Так как, по условию $\lambda = {}^{1}/_{2}$, то мы можем применить метод последовательных приближений для нахождения с точностью до 10^{-2}.

Используем оценку погрешности (2)

$$\rho(a, x_n) \leqslant \frac{q^n}{1 - q} \rho(x_1, x_\circ)$$

Возьмем $x_\circ\,(t) = 2t$,

$$x_1(t) = \frac{t}{2} \int_0^1 s \cdot 2s ds + 2t = 2\frac{1}{3} t$$

Так как $q = {}^{\lambda}/_{2} = {}^{1}/_{4}$, то

$$\rho(a, x_n) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \frac{4}{3} \cdot \max_{t \epsilon [0,1]} \left|2t - 2\frac{1}{3} t\right| = \frac{1}{9 \cdot 4^{n-1}} \leqslant \frac{1}{100}.$$

Это выполнено при n=3 , а значит x_3 будет решением исходного уравнения с точностью до 10^{-2}. Найдем его

$$x_2(t) = {}^{t}/_{2} \int_0^1 s \cdot \frac{7}{3} s ds + 2t = \frac{43}{18}\, t,$$

$$x_3(t) = {}^{t}/_{2} \int_0^1 s \cdot \frac{43}{18} s ds + 2t = \frac{43}{108}\, t.$$

Приближенное решение $x_3(t) = 2\frac{43}{108}\ t$.

Найдем точное решение, являющееся неподвижной точкой отображения f.

Так как $1/_2 \int_0^1 sx(s)ds = c = const$, то решение будем искать в виде

$$a(t) = ct + 2t = (2 + c)t.$$

Подставим $a(t)$ в наше уравнение

$$(2 + c)t = \frac{t}{2}\int_0^1 s(2 + c)sds + 2t \quad , \text{ найдем } c = \frac{2}{5}$$

Точнее решение имеет вид

$$a(t) = 2\frac{2}{5}t.$$

Сравним его с приближенным

$$\rho(a, x_3) = \max_{s\,\epsilon[0,1]} \left|2\frac{2}{5}t - 2\frac{43}{108}t\right| = \frac{1}{540}$$

Нужная точность достигнута.■