Тема 2. Мера и интеграл Лебега.

Глава 1. Мера Лебега.

§ 1. Мера элементарных множеств.

Рассмотрим систему П множеств на плоскости (x, y), каждое из которых , определяется неравенствами $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ (знаки неравенств могут быть любыми, строгими, нестрогими)

Множества из системы будем называть прямоугольниками.

Для каждого из прямоугольников определим его меру:

а) мера пустого множества равна 0 ($b \le a$ или $d \le c$)

б) мера непустого прямоугольника (замкнутого, открытого или полуоткрытого) равна $(b-a)(d-c)$.

Таким образом, каждому прямоугольнику $P \in \Pi$ поставлено в соответствие число $m(P)$ - его мера. При этом выполнены следующие условия

1) $m(P)$ действительна и неотрицательна

2) $m(P)$ аддитивна, т.е., если $P = \bigcup_{k=1}^{n} P_k$ и $P_i \bigcap P_j = \varnothing$, то $m(P) = \sum_{k=1}^{n} P_k$.

Мера $m(P)$ определена для прямоугольников, попробуем распространить меру на более широкий класс множеств с сохранением свойств 1 и 2.

Попробуем распространить на элементарные множества.

Def Плоское множество называется элементарным, если его можно представить в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся прямоугольников.

Нам понадобится следующая теорема:

Теорема 1. Объединение, пересечение, разность и симметрическая разность двух элементарных множеств также являются элементарными множествами, т.е. элементарные множества образуют кольцо.

Def Определим меру $m'(A)$ для элементарных множеств следующим образом: если $A = \bigcup_k P_k$, где P_k-попарно непересекающиеся прямоугольники, то $m'(A) = \sum_k m(P_k)$. Причем $m'(A)$ не зависит от способа разложения в сумму конечного числа прямоугольников.

Легко видеть, что определенная таким образом мера элементарных множеств неотрицательна и аддитивна.

Приведем следующее важное свойство меры элементарных множеств.

Теорема 2. Если A - элементарное множество и $\{A_n\}$ конечная или счетная система элементарных множеств, такая, что $A = \bigcup_n A_n$, то $m'(A) \le \sum_n m'(A_n)$.

Свойство меры m', устанавливаемое теоремой 2 (мера множества не превосходит суммы мер, покрывающих его множеств) называется полуаддитивностью.

Из него вытекает свойство счетной аддитивности или σ- аддитивности, состоящее в следующем

Если $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ (A представлена в виде объединения счетного числа пересекающихся элементов множеств, то $m'(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n)$).

Т.е. мера суммы равна сумме мер счетного числа непересекающихся множеств.

§ 2. Лебегова мера плоских множеств.

2.1. Внешняя мера множеств.

Элементарные множества не исчерпывают всех множеств, встречающихся в анализе. Поэтому естественно попытаться распространить понятие меры, с сохранением ее основных свойств, на более широкий класс, чем конечные объединения прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат.

В дальнейшем мы будем рассматривать не только конечные, но и бесконечные объединения прямоугольников.

Def Внешней мерой множества A называется число $\mu^*(A) = \inf\limits_{A \subset \bigcup P_k} \sum\limits_k m(P_k)$, где нижняя грань берется по всевозможным покрытиям множества A конечными или счетными системами прямоугольников.

Замечание 1.

Заметим, что если A - элементарное множество, то $\mu^*(A) = m'(A)$.

Докажем этот факт. Пусть $A = \bigcup\limits_1^n P_i$, $P_i \bigcap P_j = \varnothing$, тогда по определению меры элементарных множеств (§1)

$$m'(A) = \sum_{i=1}^n m(P_i).$$

Так как прямоугольниками P_i покрывают A, то $\mu^*(A) \le \sum\limits_i^n m(P_i) = m'(A)$

($\mu^* = \inf$).

Доказали неравенство в одну сторону.

Теперь возьмем $\{Q_j\}$ произвольную конечную или счетную систему прямоугольников, покрывающую A, тогда в силу теоремы 2 (§ 1) имеем $m'(A) \le \sum\limits_j m(Q_j)$ перейдем к inf $m'(A) \le \mu^*(A)$.

Получили неравенство в другую сторону.

Следовательно $\mu^*(A) = m'(A)$.

Теорема. Если $A \subset \bigcup_n A_n$, где A_n - конечная или счетная система множеств m' и μ^x совпадают (замечание 1), то теорема 2 (§ 1) является частным случаем данной теоремы.

2.2. Измеримые множества.

Def: Множество A называется измеримым (в смысле Лебега), если $\forall \varepsilon > 0$ найдется такое элементарное множество B, что $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon'$.

Def: Функция μ^* рассматриваемая только на измеримых множествах называется лебеговой мерой и обозначается μ.

Смысл определения: множество измеримо, если его можно сколь угодно точно приблизить элементарными множествами.

Отметим важные свойства измеримых множеств и лебеговой меры:

Теорема 1. Сумма (объединение) и пересечение измеримых множеств есть измеримые множества.

Теорема 2. Если $\{A_n\}$ - последовательность попарно непересекающихся измеримых множеств и $A = \bigcup_n A_n$, то $\mu(A) = \sum\limits_n \mu(A_n)$.

Теорема 2 устанавливает счетную аддитивность или σ - аддитивность меры Лебега.

Из σ - аддитивности вытекает еще одно свойство меры, называемое непрерывностью.

Теорема 3 . если $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ - последовательность вложенных в друг друга измеримых множеств и $A = \bigcup_n A_n$, то $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Отметим еще одно очевидное, но важное свойство: всякое множество, внешняя мера которого равна нулю, измеримо.

Подведем итоги:

1) Мы распространили меру с элементарных множеств на более широкий класс, замкнутый относительно операций взятия счетных объединений и пересечений, т.е. этот класс представляет собой σ -алгебру.

2) Построенная меры σ -аддитивна на этом классе.

Заметим, что в нашу σ -алгебру входят все открытые множества, все замкнутые и т.д.

2.3. Лебегова мера на прямой.

В этом параграфе излагалось построение меры Лебега для плоских множеств. Аналогично может быть построена Лебегова мера на прямой, в трехмерном пространстве или, вообще, в евклидовом пространстве любой размерности n. В каждом из этих случаев мера строится по одному и тому же образцу.

Например на прямой. Определяем меру на простейших множествах: отрезки, интервалы, полуинтервалы: $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$

$$m([a, b)) = b - a.$$

Потом распространяем меру на элементарные множества – конечное объединение простейших множеств.

Следующий этап - распространяем меру на множества, измеримые по Лебегу.

Определение измеримости дословно переносится на множества в пространстве любой размерности.

§ 3. Лебегово продолжение меры.

3.1. Счетная аддитивность меры.

Плоская мера Лебега, построенная нами в §2 σ -аддитивна (теорема 2 из п.2.2.)

Напомним определение σ -аддитивности.

Def: Мера m называется счетно-аддитивной, или σ -аддитивной, если для любых множеств $A, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, принадлежащих ее области определения (области определения меры) и удовлетворяющих условиям $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_1 \bigcap A_n = \varnothing$ имеет место равенство

$$m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

Пример. Укажем другой пример σ - аддитивности меры. Пусть имеем два объекта: $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ произвольное счетное множество и набор чисел $p_n > 0$, таких что $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$.

Тогда класс измеримых множеств будет состоять из всех подмножеств множества X , а меру для каждого $A \subset X$ определим как $m(A) = \sum_{x_n \in A} p_n$.

Легко проверить, что $m(A)$ будет σ - аддитивной мерой, причем $m(X) = 1$.

Этот пример естественно появляется в связи со многими вопросами теории вероятностей.

Пример. Укажем пример меры аддитивной, но не σ - аддитивной. Пусть X - множество всех рациональных точек отрезка $[0, 1]$, а класс измеримых множеств состоит из пересечений

множества X с произвольными интервалами (a, b), отрезками $[a, b]$, полуинтервалами $[a, b)$, $(a, b]$ из $[0, 1]$. Для каждого такого множества A_{ab} положим $m(A_{ab}) = b - a$. Эта мера аддитивна. Однако она не σ-аддитивна, так как $m(X) = 1$, а X состоит из счетного числа точек, т.е. $m(X) \neq \sum_{n=1}^{\infty} m(x_n)$

3.2.Лебегово продолжение меры.

Def: Непустая система множеств K называется кольцом, если из $A \in K \Rightarrow A \bigcup B \in K, A \setminus B \in K$.

Заметим, т.к. $A \triangle B = (A \setminus B)(B \setminus A)$ и $A \bigcap B = (A \bigcup B) \setminus (A \setminus B) \setminus (B \setminus A)$, то в Def можно было бы использовать другую пару операций: $\bigcap, \triangle$. $\{\bigcup \setminus\} \Leftrightarrow \{\bigcap, \triangle\}$.

Def Система множеств Π называется полукольцом, если 1° из $A \in \Pi, B \in \Pi \Rightarrow A \bigcup B \in \Pi$.

2°. Если A и $A_1 \subset A \in \Pi$, то A можно представить в виде $A = \bigcup_{k}^{n} A_k$, где A_1-заданное и все $A_k \in \Pi$.

Кроме того, предполагаем, что $\varnothing \in \Pi$ ($\varnothing \in K$ т.к. $\varnothing \in A \setminus A$).

Задача о продолжении меры состоит в следующем. Каким образом, зная меру на узком классе множеств продолжить ее на более широкий класс множеств с сохранением свойств меры.

Подобную процедуру мы выполнили в §1 когда распространяли меру с прямоугольников на элементарные множества, т.е. на конечные суммы попарно пересекающихся прямоугольников.

Заметим, что класс элементарных множеств представляет собой минимальное кольцо над полукольцом прямоугольников.

Если мера, заданная на полукольце Π, обладает лишь свойством аддитивности (но не σ- аддитивности), то ее продолжением на кольцо K порожденное полукольцом Π исчерпываются все возможности распространения такой меры с исходного полукольца на более широкий класс множеств.

Отметим, что у нас на прямоугольниках как раз была задана аддитивная мера.

Если же у нас рассматриваемая мера σ- аддитивна, то она может быть распространена с полукольца на класс множеств более обширный, чем кольцо $K(\Pi)$, можно сказать максимальный.

Это продолжение строится с помощью внешней меры из §2 (которая σ- аддитивна) на класс всех измеримых множеств с сохранением свойств меры. Такое продолжение и называется лебеговым продолжением меры μ.

Замечание. Заметим, что требование, чтобы первоначальная мера была задана на полукольце существенно для однозначности продолжения.

Если мера была задана на произвольной системе множеств, не являющейся полукольцом, то можно построить несколько различных продолжений меры на порожденное этой системой множеств кольцо.

В заключение отметим еще одно свойство лебеговых мер.

Def Мера μ называется полной, если из $\mu(A) = 0$ и $A' \subset A$ вытекает, что A' измеримо.

Очевидно, что при этом $\mu(A') = 0$. Можно доказать, что лебегово продолжение любой меры полно.

Вывод: Если мера σ - аддитивна и задана на полукольце множеств, то ее всегда можно продолжить до σ - аддитивной меры определенной на кольце (если с единицей – то алгебре) измеримых множеств. Например, рассмотреть лебегово продолжение меры.

Глава 2. Измеримые функции

§ 1. Измеримые функции

11. Определение и основные свойства

Def Действительная функция $f: X \to R$ называется измеримой, если при любом действительном C множество $\{x: f(x) < c\}$ измеримо.

Т.е. что измерим прообраз луча $(c; +\infty)$ при отображении f, при любом c.

Теорема 1. Сумма, разность и произведение двух измеримых функций измеримы. Частное двух измеримых функций при условии, что знаменатель не обращается в нуль, тоже измеримо.

Теорема 2. предел сходящейся при каждом $x \in X$ последовательности измеримых функций измерим.

1.2. Эквивалентные функции.

При изучении измеримых функций часто можно пренебречь их значениями на множестве меры нуль.

Def Две функции f и g, заданные на одном и том же множестве E называются эквивалентными (обозначение $f \sim g$), если $\mu\{x: f(x) \neq g(x)\} = 0$.

Введем еще одно понятие

Def Говорят, что некоторое свойство выполнено почти всюду на E, если оно выполнено на E всюду, кроме, быть может, точек, образующих множество меры нуль.

Таким образом, две функции называются эквивалентными, если они совпадают почти всюду.

Теорема. Пусть функции f и g определены на некотором измеримом множестве E. Если функция f измерима и f эквивалентна g ($f \sim g$), то g тоже измеримая функция.

Доказательство.

Из определения эквивалентности следует, что множества $\{x: f(x) < a\}$ и $\{x: g(x) < a\}$ могут отличаться друг от друга только на некоторое множество меры нуль, следовательно (поскольку мера предполагается полной), если первое множество измеримо, то измеримо и второе.

Замечание. В мат. анализе понятие эквивалентности функций не играет существенной роли, т.к. для двух непрерывных функций эквивалентность равносильна тождественности. Действительно, пусть $f(x) \neq g(x)$, т.е. $\exists\, x_0 \quad f(x_0) \neq g(x_0)$. В силу непрерывности $\exists$ окрестность точки x_0 в которой $f(x) \neq g(x)$. Мера такой окрестности положительна, поэтому непрерывные функции, не совпадающие всюду, не эквивалентны.

Для произвольных измеримых функций эквивалентность не означает совпадения. Пример: функция Дирихле на прямой =1, =0, $x \in Q^c$. Она эквивалентна функции тождественно равной нулю.

§ 2. Сходимость почти всюду

2.1. Определение сходимости почти всюду.

Нам знакома равномерная сходимость; поточечная (обычная) сходимость. Но поскольку во многих случаях поведение измеримой функции на множестве меры нуль для нас не существенно, то возникает потребность в еще одном понятии сходимости.

Def Последовательность $\{f_n(x)\}$ функций, определенных на некотором пространстве X с заданной на нем мерой μ, называется сходящейся почти всюду к функции $f(x)$, если $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для почти всех $x \in X$, т.е. $\mu\left\{x : \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)\right\} = 0$.

Пример. $f_n(x) = (-x)^n$ на $X = [0, 1]$

$f_n(x) \to f(x) \equiv 0$ на $[0, 1]$

(всюду кроме $x = 1$).

Следующая теорема является обобщением теоремы 2 из п.1.1.

Теорема 1. Если последовательность измеримых функций $f_n(x)$ сходится к функции $f(x)$ почти всюду на X, то $f(x)$ также измерима.

Доказательство.

Пусть A - то множество, на котором $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. По условию $\mu(X \setminus A) = 0$. f измерима на A по т.2 (п.1.1), а так как на множестве меры нуль всякая функция измерима, т.е. f измерима на $X \setminus A$, т.е. f измерима на всем X.

2.2. Теорема Егорова.

Теорема Егорова устанавливает связь между сходимостью почти всюду и равномерной сходимостью.

Теорема Егорова

Пусть E - множество конечной меры. Последовательность измеримых функций $\{f_n\}$ сходится на E почти всюду к $f(x)$. Тогда $\forall \delta > 0$ $\exists$ такое измеримое множество $E_\delta \subset E$, что

1) $\mu(E_\delta) > \mu(E) - \delta$

2) на E_δ $\quad f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ (равномерно)

Фактически в теореме Егорова определяется новый тип сходимости – почти равномерная сходимость. В тексте теоремы это определение выделено.

Пользуясь этим понятием т. Егорова можно сформулировать так:

На множестве конечной меры сходимость почти всюду влечет за собой почти равномерную сходимость.

§ 3. Сходимость по мере

3.1. Определение сходимости по мере.

Def Говорят, что последовательность измеримых функций $f_n(x)$ сходится по мере к функции $f(x)$, если для любого $\sigma > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left\{x : \left|f_n(x) - f(x)\right| \geq \sigma\right\} = 0.$$

Обозначают $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Следующая теорема устанавливает единственность предела по мере.

Теорема

Если $f_n \xrightarrow{\mu} f$ и $f_n \xrightarrow{\mu} g$, то $f \sim g$ (по мере μ)

3.2 Связь между сходимостью почти всюду и по мере.

Следующие две теоремы устанавливают связь между понятиями сходимости почти всюду и равномерной сходимости по мере.

Теорема 1 (Лебега). Если последовательность измеримых функций $\{f_n\}$ сходится почти всюду к некоторой функции $f(x)$, то она сходится к ней по мере.

Однако в обратную сторону теорема не верна.

Приведем пример. Определим для каждого натурального k на полуинтервале $[0, 1)$ систему функций $f_{k1}, f_{k2}, ..., f_{kk}$ следующим образом

$$f_{ki}(x) = \begin{cases} 1 \ \textit{при} \ x \in \left[\dfrac{i-1}{k}, \dfrac{i}{k}\right) \\ 0 \ \textit{при остальных} \ x \end{cases}$$

Все эти функции занумеруем подряд в одну последовательность

$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} : \varphi_1 = f_{11}, \varphi_2 = f_{21}, \varphi_3 = f_{22}, \varphi_4 = f_{31}, ...$

Нетрудно проверить, что $\varphi_n \xrightarrow{\mu} 0$

(рисунок)

Действительно, при $\sigma > 1$ все множества $\{|\varphi_n| \geq \sigma\}$ пусты и если же $\sigma \leq 1$ и $\varphi_n = f_{ki}$ $\{|\varphi_n| \geq \sigma\} = \left[\dfrac{i-1}{k}, \dfrac{i}{k}\right)$ и $\mu\{|\varphi_n| \geq \sigma\} = \dfrac{i}{k}$ и стремится к нулю при $n \to \infty$.

Покажем теперь, что $\{\varphi_n\} \xrightarrow{\times п.в.} f \equiv 0$

Более того, нет сходимости $\varphi_n(x) \to 0$, ни в одной точке $x_0 \in [0, 1)$.

Действительно, пусть $x_0 \in [0, 1)$. Тогда $\forall k \in N$ найдется такое $i \leq k$, что $x_0 \in \left[\dfrac{i-1}{k}, \dfrac{i}{k}\right)$ и, следовательно $f_{ki}^{'}(x_0) = 1$.

Таким образом, в числовой последовательности $\{\varphi_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ найдутся члены со сколь угодно большими номерами, равные 1, поэтому эта последовательность не сходится к нулю.

Пример окончен.

Как показывает этот пример из сходимости по мере, вообще говоря, не следует сходимость почти всюду. Однако справедлива следующая теорема

Теорема 2 (Рисса)

Пусть последовательность измеримых функций $\{f_n(x)\}$ сходится по мере к $f(x)$. Тогда из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность $\{f_{nk}(x)\}$, сходящуюся к $f(x)$ почти всюду.

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \ \Rightarrow f_n \xrightarrow{п.в.} f \quad .$$

3.3. Теорема Лузина и С-свойство

Мы определяли измеримые функции на произвольных множествах м в общем случае это понятие никак не связано с понятием непрерывной функции.

Однако, если речь идет о функциях на отрезке, то имеет место следующая теорема.

Теорема (Лузина)

Для того, чтобы функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, была измерима, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ такая непрерывная на $[a, b]$ функция $\varphi(x)$, что $\mu\{x : f(x) \neq \varphi(x)\} < \varepsilon$.

Иначе говоря, измеримая функция может быть сделана непрерывной на $[a, b]$ путем ее изменения на множестве сколь угодно малой меры. Про такую функцию говорят, что она обладает С-свойством (при помощи «малой деформации» становится непрерывной).

Глава 3. Интеграл Лебега.

§ 1. Интеграл Лебега для простых функций.

1.1. Отличие от интеграла Римана.

Понятие интеграла Римана можно применить или к непрерывным функциям или имеющим лишь конечное число точек разрыва.

Для измеримых функций, которые могут быть разрывны всюду, где они определены (а могут быть заданы на абстрактном множестве, где понятие непрерывности не имеет смысла), конструкция интеграла Римана не годится.

Для таких функций Лебег ввел другое понятие интеграла.

Если в интегральных суммах Римана точки x группируются по признаку близости их на оси Ox, то в интеграле Лебега они группируются по признаку близости значений функции в этих точках. Это сразу позволяет распространить понятие интеграла на очень широкий класс функций.

Кроме того, интеграл Римана вводится сначала для функций одной переменной, а затем уже переносится на случай нескольких переменных.

Интеграл Лебега определяется совершенно одинаково для функций, заданных на любых пространствах с мерой.

Заметим, что на абстрактных пространствах интеграл Римана вообще не имеет смысла.

Сначала определим интеграл Лебега для простых функций, а затем распространим на более широкий класс функций.

1.2. Простые функции

Def Простой называется измеримая функция, принимающая не более чем счетное число значений.

Структура простых функций характеризуется следующей теоремой.

Теорема 1. Функция $f(x)$, принимающая не более чем счетное число значений $y_1, y_2, ..., y_n, ...$ измерима тогда и только тогда, когда все множества $A_n = \{x : f(x) = y_n\}$ измеримы.

Мы вначале построим интеграл Лебега для простых функций, а потом распространим на измеримые с помощью теоремы.

Теорема 2. Для измеримости функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы она могла быть представлена в виде предела равномерно сходящейся последовательности простых функций.

1.3. Интеграл Лебега от простых функций.

Пусть f некоторая простая функция, принимающая значения $y_1, y_2, ..., y_n, ...$ $y_i = y_j$ *если* $i \neq j$ и пусть A некоторое измеримое подмножество X.

Определим интеграл от функции f по множеству A равенством

(1) $\int_A f(x)\,d\mu = \sum_n y_n \mu(A_n)$, где $A_n = \{x \in A : f(x) = y_n\}$ если ряд справа сходится.

Def Простая функция f называется интегрируемой или суммируемой (по мере μ) на множестве A, если ряд (1) абсолютно сходится.

Если f интегрируема, то сумма ряда (1) называется интегралом от f по множеству A.

1.4. Свойства интеграла Лебега от простых функций.

Установим некоторые свойства интеграла Лебега от простых функций.

1° $\int\limits_A [f+g]d\mu = \int\limits_A fd\mu + \int\limits_A gd\mu$

Причем, из существования интегралов справа $\Rightarrow$ существование интегралов слева.

2° $\forall k = const$ $\int\limits_A kfd\mu + k\int\limits_A fd\mu$

Причем, из существования интегралов справа $\Rightarrow$ существование интегралов слева.

3° Ограниченная на множестве A простая функция f интегрируема на A, причем, если $|f(x)| \le M$ на A, то $\left|\int\limits_A f(x)d\mu\right| \le M \cdot \mu(A)$.

(очан с. 83)

Заметим, что общее построение интегральных сумм Лебега можно провести следующим образом:

Пусть $f(x)$ ограниченная измеримая функция, определенная на измеримом множестве $C < f(x) < D$ $\forall\ x \in A$. Разобьем отрезок $[C, D]$ точками $C = y_0 < y_1 < y_2 < ... < y_n = D$ и построим следующие суммы:

$s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} y_{i-1} ml_i$, $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} y_{i-=} ml_i$, где $l_i = \{x : y_{i-1} \le f(x) < y_i\}$.

Эти суммы называются нижней и верхней суммами Лебега.

Если существует общий предел верхних и нижних сумм Лебега, при стремлении мелкости разбиения к нулю $\min \mu l_i \to 0$?, то функция f называется интегрируемой, а предел называется интегралом Лебега.

§ 2. Общее определение интеграла Лебега.

2.1. Определение суммируемой функции.

Def Функция f называется суммируемой (интегрируемой) на множестве A, если существует последовательность простых интегрируемых функций $\{f_n\}$, сходящихся равномерно к f.

Предел $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_A f_n(x)d\mu$ обозначим $= \int\limits_A f(x)d\mu$ и назовем интегралом функции f по множеству A.

Таким образом, построение интеграла Лебега разбивается на два этапа.

Первый: непосредственное определение интеграла как суммы ряда для класса простых суммируемых функций, достаточно простого.

Второй: Распространение определения интеграла на более широкий класс с помощью предельного перехода.

Заметим, что сочетание двух этапов, подобных этим, присутствует при любом построении интеграла.

2.2. Свойства интеграла Лебега.

1°. $\int\limits_A 1\cdot d\mu = \mu(A)$ следует непосредственно из определения интеграла от простой функции (как сумма)

2° $\int\limits_A kf(x)d\mu = k\int\limits_A f(x)d\mu$ $\forall k = con$ причем из существования интеграла справа следует существования интеграла слева.

Следует из 2° свойства для простых функций и предельного перехода

3° Аддитивность $\int\limits_A \left[f(x)+g(x)\right]d\mu = \int\limits_A f(x)d\mu + \int\limits_A g(x)d\mu$.

причем из существования интегралов справа следует существования интеграла слева.

Следует из 1° свойства для простых функций и предельного перехода.

4° Ограниченная на множестве A функция f интегрируема на A

Следует из 3° свойства для простых функций и предельного перехода.

5° Монотонность: если $f(x)\ge 0$ на A, то $\int\limits_A f(x)d\mu \ge 0$.

Для простых функций следует из определения интеграла, а в общем случае с помощью предельного перехода.

5^{oo} Из 5° следует: если $f \ge g$ на A, то $\int\limits_A fd\mu \ge \int\limits_A gd\mu$

5^{oo} Если $m \le f(x) \le M$ для всех или почти всех $x\in A$, то $m\mu(A) \le \int\limits_A f(x)d\mu \le M\mu(A)$.

6° Если $\mu(A)=0$, то $\int\limits_A f(x)d\mu = 0$. Следует из определения интеграла.

6^{oo} Если $f \overset{п.в.}{=} g$, то $\int\limits_A fd\mu = \int\limits_A gd\mu$. Следует из определения интеграла.

7° Если функция φ интегрируема на A и почти всюду $|f(x)| \le \varphi(x)$, то f также интегрируема на A.

Доказывать не будем.

8° Интегралы $\int f(x)d\mu$ и $\int |f(x)|d\mu$ существуют или не существуют одновременно.

2.3. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега.

Свойство 6° из предыдущего пункта говорит, что интеграл Лебега по ножеству нулевой меры равен нулю для любой функции f.

Это утверждение можно рассматривать как предельный случай следующей теоремы.

Теорема. Пусть f интегрируема на A. Тогда $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ такое, что для всякого измеримого $E\subset A$ такого, что $\mu(E)<\delta$ следует $\left|\int\limits_E f(x)d\mu\right| < \varepsilon$.

Доказательство

$M = \sup\limits_E |f(x)|$, тогда $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$ и оценка интеграла.

§ 3.Предельный переход под знаком интеграла.

Вопрос о предельный переход под знаком интеграла, или, что то же самое, о почленном интегрировании сходящегося ряда, часто возникает в различных задачах.

В мат.анализе устанавливается, что достаточным условием такого предельного перехода является равномерная сходимость соответствующего ряда или последовательности.

Так как интеграл Лебега является обобщением интеграла Римана, то и следующие теоремы являются обобщением приведенного факта.

3.1. Теорема Лебега

Теорема (Лебега об ограниченной сходимости).

Пусть последовательность $\{f_n\}$ суммируемых функций 1) сходится по мере к функции f и 2) $\exists$ такая суммируемая функция $\varphi \geq 0$, что $|f_n(x)| \leq \varphi(x) \quad \forall n$

Тогда функция f суммируема и $\int\limits_A f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu$

Здесь $\varphi(x)$ называется суммируемой мапсорантой последовательности $\{f_n\}$.

3.2. Теорема Бенно Леви

Теорема. Пусть на множестве A $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq ... \leq f_n(x)$. Причем функции f_n интегрируемы и их интегралы ограничены в совокупности

$\int\limits_A f_n(x) d\mu \leq K$.

Тогда почти всюду на A существует конечный предел $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, и функция f интегрируема на A, причем $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_A f_n(x) d\mu = \int\limits_A f(x) d\mu$.

При этом на множестве, на котором предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ не существует, функцию f можно задать произвольно. Например, нулем $f(x) = 0$.

Очевидно, что условие монотонного неубывания функций $f_n(x)$ можно заменить на монотонно невозрастания.

Следствие (Для ряда) если $\Psi_n(x) \geq 0$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_A \Psi_n(x) d\mu < \infty$, то почти всюду на A ряд $\sum \Psi_n(x)$ сходится и $\int\limits_A \sum\limits_{n=1}^{\infty} \Psi_n(x) d\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \Psi_n(x) d\mu$.

3.3 Теорема Фату.

Теорема. Если последовательность неотрицательных измеримых $f_n(x)$ сходится почти всюду на A к f, то $\int\limits_A f(x) d\mu \leq \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_A f(x) d\mu$.

§ 4. Сравнение интегралов Лебега и Римана.

Для простоты изложения рассмотрим связь между интегралами в одномерном случае.

4.1. Сравнение интегралов по отрезку.

Теорема. Если функция $f(x)$ интегрируема по Риману, то она интегрируема и по Лебегу и

$$(R)\int\limits_a^b f(x) dx = (L) \int\limits_{[a,b]} f(x) d\mu .$$

В обратную сторону теорема не верна. Например, функция Дирихле $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \notin Q \end{cases}$ на $[0, 1]$ интегрируема по Лебегу, но не интегрируема

По Риману.

4.2. Случай неограниченной функции.

Неограниченные функции вообще не могут быть интегрируемы по Риману, но многие из них интегрируемы по Лебегу.

Вначале определим интеграл Лебега от неограниченной неотрицательной измеримой функции $f(x)$ на множестве A.

Построим вспомогательную функцию

$$\left[f(x)\right]_t = \begin{cases} f(x), & 0 \le f(x) \le t \\ t, & f(x) > t \end{cases}$$

Эта функция измерима и ограничена (числами). Теперь интеграл Лебега определяется как $(L)\int\limits_A f(x)\,d\mu = \lim\limits_{t\to+\infty}(L)\int\limits_A \left[f(x)\right]_t d\mu$.

Указанный предел всегда существует. Если он конечен, функцию называют суммируемой на A, если бесконечен – то не суммируемой.

Теперь определим интеграл от знакопеременной неограниченной измеримой функции $f(x)$ на A с помощью равенства

$$(L)\int\limits_A f(x)\,d\mu = (L)\int\limits_A f_+(x)\,d\mu - (L)\int\limits_A f_-(x)\,d\mu, \text{ где}$$

$$f_+(x) = \frac{1}{2}\left(\left|f(x)\right| + f(x)\right) = \begin{cases} f(x) & f(x) \ge 0 \\ 0 & f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f_-(x) = \frac{1}{2}\left(\left|f(x)\right| - f(x)\right) = \begin{cases} \left|f(x)\right| & f(x) < 0 \\ 0 & f(x) \ge 0 \end{cases}$$

Def Функция f называется суммируемой, если f_+ и f_- суммируемы, функция несуммируема, если хотя бы одна из неотрицательных функций f_+ и f_- несуммируема.

Из последнего определения легко вывести теорему

Теорема 1. Для суммируемости измеримой функции необходимо и достаточно, чтобы была суммируема функция $|f|$.

(Действительно, ведь $|f| = f_+ + f_-$)

Из этой теоремы выводится следующая.

Теорема 2.

Для абсолютной сходимости несобственного интеграла Римана необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была суммируема, и тогда выполнено равенство

$$(R)\int\limits_a^b f(x)\,dx = (L)\int\limits_a^b f(x)\,d\mu.$$

Кроме того, справедливо равенство

$$(R)\int\limits_a^b \left|f(x)\right| dx = (L)\int\limits_a^b \left|f(x)\right| d\mu.$$

Следствие. Таким образом, из условной сходимости несобственного интеграла $(R)\int\limits_a^b f(x)\,dx$ следует несуммируемость функции $f(x)$

4.3. Случай неограниченного промежутка.

Заметим, что в этом случае справедлив аналог теоремы 2 из предыдущего пункта.

Теорема. Для абсолютной сходимости несобственного интеграла $(R)\int_a^{\infty} f(x)dx$ необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была суммируема на $[a, +\infty)$. При этом выполнено равенство

$$(R)\int_a^{+\infty} f(x)dx = (L)\int_a^{+\infty} f(x)d\mu.$$

Заметим, что кроме того, справедливо равенство $(R)\int_a^{+\infty} |f(x)|dx = (L)\int_a^{+\infty} |f(x)|d\mu$.

При изучении пространств нас будут интересовать следующие вопросы: линейность, полнота, сепарабельность, сходимость, метрика.

§ 5. Пространства суммируемых функций.

Один из важнейших классов нормированных пространств составляют пространства суммируемых функций, в первую очередь пространство всех суммируемых функций L_1 и пространство L_2 функций, суммируемых с квадратом.

5.1. Пространство L_1.

Пусть X некоторое пространство с мерой μ, будем считать меру μ полной (т.е. любое подмножество любого множества меру нуль измеримо). Рассмотрим совокупность всех функций f, суммируемых на X. Поскольку линейная комбинация суммируемых функций суммируема, то эта совокупность образует линейное пространство. Это пространство мы обозначим $L_1(X, \mu)$ или, короче, просто L_1.

Введем в L_1 норму $\|f\| = \int |f(x)|d\mu$. Легко проверить, что $\|f\|$ удовлетворяет всем условиям нормы, за исключением одного, что $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$.

Чтобы устранить эти расхождения элементами пространства L_1 будем считать классы эквивалентных между собой суммируемых функций. (Иначе такой функционал называется полунормой).

В L_1, как и во всяком нормированном пространстве, с помощью формулы $\rho(f, g) = \|f - g\|$ вводится расстояние. Сходимость последовательности суммируемых функций в смысле этого расстояния называют сходимостью в среднем.

Весьма важным для многих вопросов тот факт, что пространство L_1 полно, т.е. любая фундаментальная последовательность сходится.

Мера, имеющая счетный базис, называется сепарабельной мерой.

Теорема. Если мера μ - сепарабельная мера на измеримом пространстве X, то пространство $L_1(X, \mu)$ сепарабельно.

В частном случае, когда X - отрезок числовой прямой, а μ - мера Лебега, счетное всюду плотное множество в L_1 можно получить, взяв множество всех многочленов с рациональными коэффициентами.

Вывод. Пространство L_1 представляет собой полное нормированное (т.е. банахово) линейное пространство. Однако оно не является гильбертовым, т.к. определенную в нем норму нельзя задать с помощью скалярного произведения. А именно, не выполнено равенство

параллелограмма $\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2\left(\|f\|^2+\|g\|^2\right)$ например для функций $f=1$ и $g=\sin x$ на $[0,\,2\pi]$.

5.2. Пространство L_2.

Определение. Функция f называется функцией, суммируемой с квадратом, если $\int f^2(x)\,d\mu$ (конечен, существует).

Совокупность всех таких функций мы обозначим $L_2(X,\,\mu)$ или L_2.

Заметим, что, как и в случае L_1; L_2 - линейное пространство, полное, сепарабельное.

В отличие от L_1 в L_2 вводится скалярное произведение

$(f,\,g)=\int f(x)g(x)\,d\mu$.

Поэтому L_2 - гильбертово пространство.

Заметим, что в L_2, как и во всяком гильбертовом пространстве, выполнены неравенства Коши-Буняковского и неравенство треугольника:

$$\left(\int fg\,d\mu\right)^2\le\int f^2d\mu\cdot\int g^2d\mu$$

$$\sqrt{\int(f+g)^2d\mu}\le\sqrt{\int f^2d\mu}+\sqrt{\int g^2d\mu}$$

Норма в L_2 определяется формулой $\|f\|=\sqrt{(f,\,f)}=\sqrt{\int f^2d\mu}$, а расстояние между элементами f и g $\rho(f,\,g)=\|f-g\|=\sqrt{\int(f-g)^2\,d\mu}$.

Сходимость функциональной последовательности по метрике пространства L_2 называется сходимостью в среднем квадратичном.

Теорема .

Из сходимости в среднем квадратичном следует сходимость в среднем

Док-во.

Из неравенства Коши-Буняковского:

$$f=\varphi-\psi,\ g=1,\ \left(\int(\varphi-\psi)\cdot 1d\mu\right)^2\le\int(\varphi-\psi)^2d\mu\cdot\int 1^2d\mu$$

$$\left(\int(\varphi-\psi)\cdot 1d\mu\right)^2\le\int(\varphi-\psi)^2d\mu\cdot\int 1^2d\mu$$

$$\int(\varphi-\psi)d\mu\le\sqrt{\int(\varphi-\psi)^2d\mu}\cdot\mu(x)<+\infty$$

Замечание. Обратная теорема не верна.

Пример. $f=\dfrac{1}{x}$ на $[0,\,1]$ $\displaystyle\int_{[0,\,1]}\frac{1}{x}dx$ расходится, а $\displaystyle\int_{[0,\,1]}\left(\frac{1}{x^2}\right)^2dx$ - сходится.

5.3. Соотношения между различными видами сходимости.

(рисунок)

$P\to L_2$ $\qquad\mu(x)=const,\ |f_n-f|<\varepsilon\Rightarrow\sqrt{\int|f_n-f|^2d\mu}<\varepsilon\sqrt{\mu(x)}=\varepsilon_1$

$L_1 \to \mu$

$$\varepsilon > \int_E |f_n - f| d\mu = \int_E |f_n - f| d\mu + \int_{E/E_n} |f_n - f| d\mu \geq \int_{E_n} |f_n - f| d\mu \geq \sigma \cdot \mu(E_n) \Rightarrow \mu(E_n) \leq \frac{\varepsilon}{\sigma} = \varepsilon_1$$

П.в. $\rightleftarrows$ μ (Гл.2, п.3.2., Т. 1 и 2)

П.в. $\to$ п.р. (Гл.2, п.2.2., Т Егорова)

B_1 *не* $\to L_1$ Пример $f(x) = \begin{cases} n & x \in \left(0, 1/n\right) \\ 0 & x \in \left(1/n, 1\right) \end{cases}$

L_2 *не* $\to$ *п.в.* Пример (Гл.2, п. 3.2.)

5.4. Пространство L_p

По аналогии с пространством L_2.

Def Измеримая функция f называется суммируемой с р-й степенью, если $\int |f|^p d\mu < +\infty$ здесь $p \geq 1$.

Совокупность всех таких функций обозначается $L_p(X, \mu)$ или L_p.

Теорема. Пространство L_p при любом $p \geq 1$ линейно, полно.

Введем норму в L_p $\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$.

Теперь L_p полное нормированное, т.е. банахово пространство.

Пространство L_p сепарабельно, если мера μ на X сепарабельна.

Отметим, что в L_p выполнено неравенство Гельдера $(p > 1)$ и Минковского ($p \geq 1$)

$\int |fg| d\mu \leq \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ p > 1$ (это взаимно сопряженные числа)

$\left(\int |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$.

При $p = 2$ (т.е. в L_2) это неравенства Коши-Буняковского и треугольника.

Осталось неохваченным.

Глава 4. Неопределенный интеграл Лебега.

§ 1. Обобщение основной теоремы анализа.

§ 2. Монотонные функции.

- 2.1. Определение монотонной функции.
- 2.2. Свойства монотонной функции.
- 2.3. Дифференцируемость монотонной функции.

§ 3 Производная интеграла по верхнему пределу.

§ 4. Функция ограниченной вариации.

- 4.1. Определение функции ограниченной вариации.
- 4.2. Основные свойства.
- 4.3. Существование конечной производной п.в.

§ 5. Производная неопределенного интеграла Лебега

§ 6. Обобщение формулы Ньютона-Лейбница.

- 6.1. Аналог для монотонной функции
- 6.2. Определение абсолютно непрерывной функции
- 6.3. Свойства абсолютно непрерывной функции
- 6.4. Теорема Лебега.