Тема 1. Метрические пространства

ГЛАВА 1. МНОЖЕСТВА
§ 1. Операции над множествами
§ 2. Мощность множества
2.1. Конечные и счетные множества
2.2. Несчетные множества
2.3. Мощность множеств

ГЛАВА 2. МЕТРИЧЕСКИЕ, НОРМИРОВАННЫЕ И ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА
§ 1. Метрические пространства
1.1. Примеры метрических пространств
1.2. Непрерывное отображение
1.3. Предельные точки. Замыкание
1.4. Сходимость в метрических пространствах
1.5. Сепарабельность
1.6. Открытые и замкнутые множества
1.7. Открытые и замкнутые множества на прямой
1.8. Полные метрические пространства
1.9. Теорема о вложенных шарах и теорема Бэра
1.10. Пополнение метрического пространства

§ 2. НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА
2.1. Линейные пространства. Определение и примеры
2.2. Подпространства
2.3. Фактор-пространства
2.4. Нормированные пространства. Определение и примеры
§ 3. ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА
3.1. Предгильбертово пространство
3.2 Гильбертово пространство
3.3.Подпространства гильбертова пространства, ортогональные дополнения

ГЛАВА 3. ПРИНЦИП СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ
§ 1. ПРИНЦИП СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ
§ 2. ПРИМЕНЕНИЕ К ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ
2.1. Уравнения Фредгольма
2.2. Уравнения Вольтерра

ГЛАВА 4. КОМПАКТНОСТЬ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ
§ 1. ПОНЯТИЕ КОМПАКТНОСТИ
§ 2. КОМПАКТНОСТЬ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ
2.1 Полная ограниченность
2.2.Теорема Арцела-Асколи

ТЕМА 2. МЕРА И ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА
ГЛАВА 1. МЕРА ЛЕБЕГА
§ 1. МЕРА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ МНОЖЕСТВ
§ 2. ЛЕБЕГОВА МЕРА ПЛОСКИХ МНОЖЕСТВ
2.1. Внешняя мера множеств
2.2. Измеримые множества

2.3. Лебегова мера на прямой
§ 3. ЛЕБЕГОВО ПРОДОЛЖЕНИЕ МЕРЫ
3.1. Счетная аддитивность меры
3.2.Лебегово продолжение меры

ГЛАВА 2. ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ
§ 1. ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ
1.1. Определение и основные свойства
1.2. Эквивалентность функций
§ 2. Сходимость почти всюду
2.1 Определение сходимости почти всюду
2.2 Теорема Егорова
§ 3. СХОДИМОСТЬ ПО МЕРЕ
3.1. Определение сходимости по мере
3.2.Связь между сходимостью почти всюду и по мере
3.3. Теорема Лузина и С-свойство

ГЛАВА 3. ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА
§ 1. ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА ДЛЯ ПРОСТЫХ ФУНКЦИЙ
1.1. Отличие от интеграла Римана
1.2. Простые функции
1.3. Интеграл Лебега от простых функций
1.4. Свойства интеграла Лебега от простых функций
§ 2. ОБЩЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА
2.1. Определение суммируемой функции
2.2. Свойства интеграла Лебега
2.3. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега
§ 3. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД ПОД ЗНАКОМ ИНТЕГРАЛА
3.1. Теорема Лебега
3.2. Теорема Беппо Леви
3.3. Теорема Фату
§ 4. СРАВНЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ЛЕБЕГА И РИМАНА
4.1. Сравнение интегралов по отрезку
4.2. Случай неограниченной функции
4.3. Случай неограниченного промежутка
§ 5. ПРОСТРАНСТВА СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ
5.1. Пространство L_1
5.2. Пространство L_2
5.3. Соотношения между различными видами сходимости
5.4. Пространство L_p

Тема 1. Метрические пространства

ГЛАВА 1. МНОЖЕСТВА

§ 1. Операции над множествами

Под множеством мы будем понимать какую-либо совокупность элементов.

Множества - $A, B, \ldots$

Элементы - $a, b, \ldots$

$a \in A$ - элемент a принадлежит множеству A

$a \in A$ - элемент a не принадлежит множеству A

$A \subset B$ - A - подмножество множества B, т.е. все элементы, из которых состоит A входят и в B.

$\varnothing$ - пустое множество, не содержит ни одного элемента

Любое множество содержит $\varnothing$ в качестве подмножества.

Подмножества, отличные от самого множества и от $\varnothing$, называются собственными.

Диаграммы Венна

$C = AUB$ - объединение множеств – множество, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B.

$C = A \cap B$ - пересечение множеств – множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих как A, так и B.

Аналогично определяется объединение и пересечение любого (конечного или бес конечного) числа множеств.

$\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$ - совокупность элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств A_α

$\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha$ - совокупность элементов, каждый из которых принадлежит каждому из множеств A_α

Операции сложения и пересечения коммутативны и ассоциативны

$A \cup B = B \cup A$ $\qquad$ $A \cap B = B \cap A$

$(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cup C)$ $\qquad$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Кроме того, они взаимно дистрибутивны

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

$C = A \setminus B$ Разность множеств – множество, состоящее из элементов A, не содержащихся в B.

$C = A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ Симметрическая разность – объединение двух разностей.

Если S - основное множество, то $S \setminus A$ называется дополнением множества A.

Обозначается $A^{'}$, CA, A^c.

Принцип двойственности состоит в том, что из любого равенства, относящегося к системе подмножеств фиксированного множества S автоматически может быть получено другое – двойственное – равенство путем замены всех подмножеств их дополнениями, объединения – пересечениями, а пересечения объединениями.

1) Дополнение объединений равно пересечению дополнений

$$S \setminus \bigcup_{\alpha} A_\alpha = \bigcap_{\alpha} (S \setminus A_\alpha) \Leftrightarrow \left(\bigcup_{\alpha} A_\alpha \right)^c = \bigcap_{\alpha} A_\alpha^c$$

2) Дополнение пересечений равно объединению дополнений

$$S \setminus \bigcap_{\alpha} A_{\alpha} = \bigcup_{\alpha} (S \setminus A_{\alpha}) \Leftrightarrow \left(\bigcap_{\alpha} A_{\alpha} \right)^{c} = \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}^{c}$$

§ 2. Мощность множеств

2.1. Конечные и счетные множества

Среди множеств есть такие, в которых мы знаем количество элементов (множество вершина куба); в некоторых мы можем примерно указать число элементов (множество песчинок на пляже). Эти множества содержат конечное, хотя, может быть, и неизвестное нам число.

С другой стороны, существуют множества, состоящие из бесконечного числа элементов (множество натуральных чисел, множество точек на прямой, множество всех многочленов с различными коэффициентами).

При этом, говоря, что множество бесконечно, мы имеем в виду, что из него можно извлечь один элемент, два элемента и т.д., причем после каждого такого шага в этом множестве останутся элементы.

Если два множества конечны, то мы можем их сравнить по числу элементов: одинаково это число или же в одном из множеств элементов больше.

Это можно проделать или сосчитав элементы в обоих множествах или установив взаимно однозначное соответствие («биекцию») между элементами этих множеств. (Например, число студентов в группе и стульев в аудитории - рассадить).

Заметим, что подсчет годится только лишь для конечных множеств, а биекция и для бесконечных.

Простейшим бесконечным множеством является множество натуральных чисел.

Назовем счетным множеством всякое множество, элементы которого можно биективно сопоставить с натуральным рядом.

Иначе говоря, счетное множество – это множество, элементы которого можно занумеровать в бесконечную последовательность $a_1, a_2, ..a_n ...$.

Примеры (множество целых, четных, рациональных чисел – показать как нумеруются $0, -1, 1, -2, 2, -3, 3...$).

Бесконечное множество, не являющееся счетным, называется несчетным множеством.

Свойства счетных множеств.

1) Всякое подмножество счетного множества конечно или счетно.
2) Сумма любого конечного или счетного числа множества счетных множеств есть снова счетное множество
3) Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.

DEF Два множества M и N называются эквивалентными, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие (биекцию)

DEF Множество называется счетным, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел.

Ясно, что два множества, эквивалентны третьему, эквивалентны между собой. В частности, любые два счетных множества эквивалентны между собой.

2.2. Несчетные множества

Теорема 1. Множество действительных чисел, заключенных между нулем и единицей несчетно.

Доказательство.

Пусть дано какое-то счетное множество действительных чисел на $[0; 1]$

$$(1)\quad \begin{cases} \alpha_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13}...a_{1n}... \\ \alpha_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23}...a_{2n}... \\ ..... \\ \alpha_n = 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}...a_{nn}... \end{cases}$$

и применим диагональную процедуру Кантора: построим дробь $\beta = 0, b_1b_2b_3...b_n...$, где $b_n = 2$, если $a_{nn} = 1$ и $b_n = 1$, если $a_{nn} \neq 1$. Получим десятичную дробь, состоящую из 1 и 2 и не совпадающую ни с одним из чисел системы (1): от α_1 отличается тем, что $b_1 \neq a_{11}$, от α_2: $b_2 \neq a_{22}$ и т.д.

Таким образом, нашлось число между 0 и 1 которое не содержит никакое счетное множество.

Приведем примеры несчетных множеств, эквивалентных отрезку $[0, 1]$

1) Множество всех точек любого отрезка $[a, b]$ или интервала (a, b)
2) Множество всех точек на прямой
3) Множество всех точек на плоскости
4) Множество всех непрерывных функций одного или нескольких переменных.

2.3. Мощность множества

Эквивалентные множества имеют одинаковую мощность.

Для конечных множеств мощность равна числу элементов множеств.

Мощность любого счетного множества равна мощности множества натуральных чисел.

Отрезок $[0, 1]$ и эквивалентные ему множества имеют мощность континуума. Обозначается C.

Мощностей, промежуточных между счетным и континуумом нет.

С введением понятия мощности мы можем сравнивать множества, т.е любые два множества или эквивалентны между собой, т.е. $M(A) = M(B)$ или удовлетворяют одному из двух соотношений $M(A) < M(B)$ или $M(A) > M(B)$.

Заметим, что мощность множества всех подмножеств натурального ряда равна мощность континуума.

Аналогично мощность множества всех подмножеств некоторого множества C равна мощности 2^c - гиперконтинуума.

Таким же образом для любой мощности мы можем построить множество большей мощности, затем еще большей мощности и т.д., получая, таким образом, не ограниченную сверху шкалу мощностей.

Глава 2. Метрические, нормированные и гильбертовы пространства

§ 1. Метрические пространства.

Def: Метрическим пространством называется пара (X, ρ), состоящая из некоторого множества (пространства) X элементов (точек) и расстояния, т.е. однозначной неотрицательной действительной функции $\rho(x, y)$ и определенной для любых x и y из X и подчиненной трем аксиомам:

1) $\rho(x, y) \geq 0,\ \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметрия).
3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (неравенство треугольника)

Обычно метрическое пространство обозначают X.

1.1. Примеры метрических пространств.

1^0. Пространство изолированных точек. Возьмем произвольное множество и положим $\rho(x,\ y)=\begin{cases}0,\ если\ x=y\\ 1,\ если\ x\neq y\end{cases}$.

2^0. R^1 - множество действительных чисел с расстоянием $\rho(x,\ y)=|x-y|$.

Существуют примеры, когда на одном и том же множестве вводятся разные метрики.

3^0. R^n - n-мерное арифметическое евклидово пространство – это множество упорядоченных групп из n действительных чисел $x=(x_1,\ x_2,...,\ x_n)$ с расстоянием $\rho(x,\ y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k-x_k)^2}$.

4^0. R_1^n. Если на том же множестве, что и 3^0 ввести расстояние $\rho_1(x,\ y)=\sum_{k=1}^{n}|y_k-x_k|$.

5^0. R_∞^n: $\rho_\infty(x,\ y)=\max\limits_{k=\overline{1,n}}|y_k-x_k|$.

6^0. R_p^n $(p\geq 1)$ $\rho_1(x,\ y)=\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k-x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$..

Заметим, что в данном случае неравенство треугольника является неравенством Минковского

$$\left(\sum|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

При его доказательстве пользуются неравенством Гельдера

$$\sum|a_kb_k|\leq\left(\sum|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\ \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ p>1,\ q>1\right).$$

При $p=2$ неравенство Гельдера называется неравенством Коши-Буняковского.

7^0. $C_{[a,\,b]}$ - множество всех непрерывных действительных функций, определенных на $[a,\ b]$ с расстоянием R_∞^n:. $\rho(x,\ y)=\max\limits_{a\leq t\leq b}|x(t)-y(t)|$

8^0. l_2 - множество последовательностей $x=(x_1,x_2,...)$ действительных чисел, удовлетворяющих условию $\sum^{\infty}|x_k|^2<\infty$ с расстоянием $\rho(x,\ y)=\sqrt{\sum^{\infty}(y_k-x_k)^2}$.

9^0. m - множество всех ограниченных последовательностей действительных чисел. $\rho(x,\ y)=\max\limits_{k}|y_k-x_k|$.

1.2. Непрерывные отображения

Пусть X и Y два метрических пространства и f - отображение пространства X в Y.

Def. Это отображение называется непрерывным в точке $x_0\in X$, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0:\forall x\in X\ \rho(x,\ x_0)<\delta\Rightarrow\rho_1(f(x),\ f(x_0))<\varepsilon$

(ρ_1-расстояние в Y).

Если отображение непрерывно во всех точках пространства X, то говорят, что f непрерывна на X.

В случае если X и Y числовые множества, то f - числовая функция, тогда мы имеем определение непрерывной функции из математического анализа.

Если отображение $f:\ X \to Y$ взаимно однозначно, то $\exists$ обратное отображение $f^{-1}(y) = x : Y \to X$.

Если f взаимно однозначно и взаимно непрерывно (т.е f и f^{-1} непрерывны), то она называется гомеоморфным отображением является гомеоморфизмом.

В этом случае пространства X и Y называется гомеоморфными между собой.

Если же $\rho = \rho_1$ (одна функция для X и Y), то гомеоморфизм называется изометрией, а пространства X и Y называются изометричными.

Изометрия пространств X и Y означает, что метрические связи между ними их элементами одни и те же, различной может быть природа элементов.

1.3. Предельные точки. Замыкание.

Введем некоторые понятия теории метрических пространств.

Открытый шар $B(x_0,\ r) \subset R$ - метрические пространства. $B(x_0,\ r) = \{x \in R:\ \rho(x,\ x_0) < r\}$

Аналогично Замкнутый шар $B_{[x_0,\ r]}$ ε-окрестности точки x_0 $O_\varepsilon(x_0) = B(x_0,\ \varepsilon)$. Множество $M \subset R$ ограничено, если $\exists B \subset R : M \subset B$.

Точка $x \in M$ называется предельной точкой множества $M \subset R$, если любая ее окрестность содержит ∞ много точек из M.

Предельная точка может принадлежать, а может и не принадлежать M.

Например, если M - множество рациональных чисел из отрезка $[0;\ 1]$, то каждая точка этого отрезка – предельная для M.

Точка $x \in M$ называется изолированной точкой множества M, если в достаточно малой окрестности $O_\varepsilon(x_0)$ нет точек из M, отличных от x.

Операция замыкания представляет собой присоединение к M всех ее предельных точек и обозначается $[M]$. Отсюда следует, что замыкание $[M]$ состоит из точек трех типов

1) изолированных
2) предельных $\in M$
3) предельных $\notin M$.

Операция замыкания обладает следующими свойствами:

1) $M \subset [M]$

2) $[[M]] = [M]$

3) Если $M_1 \subset M_2$, то $[M_1] \subset [M_2]$

4) $[M_1 \cup M_2] = [M_1] \subset [M_2]$

1.4. Сходимость в метрических пространствах.

Пусть $x_1,\ x_2, \ldots$ - последовательность точек в метрическом пространстве R. Говорят, что $\{x_n\}$ сходится к точке x, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$ такое, что $O_\varepsilon(x)$ содержит все x_n с $n > N$. Точка x называется пределом последовательности $\{x_n\}$. Можно сформулировать иначе $\{x_n\} \to x$, если $\lim\limits_{n \to \infty} \rho(x,\ x_n) = 0$.

Непосредственно из определения предела вытекает, что

1) $\forall \{x_n\}$ не существует двух пределов.

3) Если $\{x_n\} \to x$, то $\forall \{x_{n_k}\} \to x$.

1.5. Сепарабельность

Пусть A и B - множества в метрическом пространстве R.

Множество A называется плотным в B, если $[A] \supset B$.

Множество A называется всюду плотным (в пространстве R), если $[A] = R$.

Пример: множество рациональных чисел всюду плотно на числовой прямой.

Множество A называется нигде не плотным, если оно не плотно ни в одном шаре, т.е. если в каждом шаре $B \subset R$ содержится другой шар B_1, такой что $B_1 \cap A \neq \varnothing$.

Пространства, в которых имеется счетное, всюду плотное подножество называются сепарабельными.

Примеры из пункта 1.1.

1^0. Дискретное пространство сепарабельно, если оно само счетно, т.к. $[M] = M$

2^0. Сепарабельны рациональные точки.

3^0-6^0. Сепарабельны, совокупность векторов с рациональными координатами

7^0.Сепарабельно; совокупность многочленов с рациональными коэффициентами

8^0, 10^0 Сепарабельны; совокупность последовательностей с рациональными членами и лишь конечное их число (свое для каждой последовательности) отлично от нуля.

9^0. Несепарабельно. Рассмотрим всевозможные последовательности, состоящие из цифр от 0 до 9. они образуют множество мощности континуума (эквивалентно отрезку $[0, 1]$).

Расстояние между двумя такими точками равно одному из значений 1, 2, …, 9. Окружим каждую из этих точек открытым шаром радиуса $\frac{1}{2}$. Шары не пересекаются, и в каждом только по одной точке множества. Т.е. множество мощности континуума не плотно в m.

Тем более нет счетного подмножества плотного в m.

1.5. Открытые и замкнутые множества

1.6.

Def. Множество M лежащее в метрическом пространстве R называется замкнутым, если оно совпадает со своим замыканием $[M] = M$, т.е M - замкнуто, если оно содержит все свои предельные точки.

Примеры

1) $[a, b] \subset R$

2) $\{f : |f(t)| \leq K\} \subset C_{[a, b]}$

3) $\forall R$ - метрическое пространство $\varnothing$ и R - замкнуты.

Теорема 1. Пересечение любого числа и сумма (объединение) любого конечного числа замкнутых множеств есть замкнутое множество.

Def. $x \in M$ называется внутренней точкой M, если существует такая окрестность точки x $\exists O_\varepsilon(x) \subset M$ (целиком содержащаяся)

Def. Множество все точки которого внутренние, называется открытым.

Примеры

1) $(a, b) \subset R$

2) $\{f : |f(t)| \leq K\} \subset C_{[a, b]}$

3) Открытый шар $B(a, r)$ в любом R.

Теорема 2. Для того, чтобы множество M было открыто, необходимо и достаточно, чтобы его дополнение M^C (до всего пространства R) было замкнутым.

Следствие. Т.к. $\varnothing$ и R являются дополнениями друг друга и замкнуты, то они являются и открытыми.

Из теоремы 1 и из принципа двойственности (пересечение дополнений равно дополнению объединений; объединение дополнений равно дополнению пересечения) следует

Теорема 3. Объединение любого и пересечение любого конечного числа открытых множеств есть открытое множество.

Def: Класс σ- подмножеств пространства R называется σ-алгеброй, если он замкнут относительно операций счетного объединения, пересечения, дополнения и содержит R в качестве элемента.

(Если не содержит R - то кольцо; счетное пересечение получается из принципа двойственности; σ-это знак счетного объединения).

Def: Борелевской σ-алгеброй называется σ-алгебра, порожденная совокупностью всех открытых множеств из R (наименьшая σ-алгебра, содержащая все открытые множества).

Заметим, что σ-алгебра, порожденная замкнутыми множествами метрического пространства, совпадает с борелевской σ-алгеброй.

1.7. Открытые и замкнутые множества на прямой.

Структура открытых и замкнутых множеств в том или ином метрическом пространстве может быть весьма сложной. Даже в R^2.

Однако на прямой, описание всех открытых множеств (а значит и замкнутых) можно проделать теоремой.

Теорема. Всякое открытое множество на числовой прямой представляет собой объединение конечного и счетного числа попарно непересекающихся интервалов.

Т.к. замкнутые множества – дополнение открытых, то всякое замкнутое множество на прямой получается выбрасыванием из прямой конечного или счетного множества интервалов.

Примеры: отрезки, точки.

Более сложный пример: Канторово множество $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$ - концы интервалов D, мощность D -? (Сколько выбросили $mes(D) = 0$. Заметим, что D - замкнуто, т.к. выбрасывали открытые интервалы; кроме того, нет изолированных точек, - совершенно.)

Записать в троичной системе $\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \ldots + \frac{a_n}{3^n} + \ldots = x \in D$, если $a_i = 0$ или $2 \neq 1$, т.е. $\forall x \in D$ ставится в соответствие последовательность из 2 и 0. Множество таких последовательностей эквивалентно отрезку $[0, 1]$ - если записать в двоичной системе. $M(D) - C$.

Кроме концов еще точки $x = 0,(02) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9^2} + \ldots =$

$$x = 2\frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

1.8. Полные метрические пространства

Def: Последовательность $\{x_n\} \subset R$ называется фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n, m \geq N \ \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Def: Последовательность $\{x_n\} \subset R$ называется сходящейся (уже было) к x, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n \geq N \ \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Def: Если в метрическом пространстве R любая фундаментальная последовательность сходится (к элементу этого пространства), то оно называется полным.

Примеры

1^0. Полное (фундаментальны только стационарные последовательности)

2^0-10^0. Все полные ($C_{[a,b]}$ фундаментальность равносильна равномерной сходимости $\Rightarrow$ тогда предел непрерывен.)

1.9. Теорема о вложенных шарах и теорема Бэра.

В анализе широко используется лемма о вложенных отрезках. В теории метрических пространств аналогичную роль играет теорема.

Теорема о вложенных шарах.

Для того, чтобы метрическое пространство было полным, необходимо и достаточно, чтобы в нем всякая последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к 0 имела непустое пересечение.

В теории полных метрических пространств фундаментальную роль играет

Теорема Бэра. Полное метрическое пространство R не может быть представлено в виде объединения счетного числа нигде не плотных множеств.

Док-во. От противного. Пусть $R = \bigcup M_n$, где M_n нигде не плотно.

Возьмем S_0 - замкнутый шар радиуса 1, M_1 нигде не плотно $\Rightarrow$ не плотно в S_0, т.е. $\exists S_1$ S_1 с радиусом $< \frac{1}{2}$. $S_1 \subset S_0$ и $S_1 \bigcap M_1 = \varnothing$. M_2 не плотно в S_1, т.е. $\exists S_2$ радиуса $< \frac{1}{3}$. $S_2 \subset S_1$: $S_2 \bigcap M_2 = \varnothing \ldots$

Получаем последовательность вложенных $S_n \bigcap\limits_{k=\overline{1,n}} M_k = \varnothing$ в друг друга замкнутых шаров.

По предыдущей теореме $\bigcap S_n$ содержит некоторую точку $x \notin \bigcup M_n$, т.е. $R \neq \bigcup M_n$. Получили противоречие.

Следствие. Всякое полное метрическое пространство без изолированных точек несчетно.

Доказательство: Все M_n содержат по одной точке: они нигде не плотны.

1.10. Пополнение метрического пространства

Если пространство R не полно, то его всегда можно включить (единственным образом) в полное метрическое пространство R.

Теорема. Для любого метрического пространства (R, ρ) существует полное метрическое пространство (R, ρ) такое, что

1) $R \subset R$

2) $\rho(x, y) = \rho(x, y)$

3) R всюду плотно в R.

Пространство R называют пополнением пространства R.

Например пространство всех действительных чисел является пополнением пространства рациональных чисел.

§ 2. Нормированные пространства.

2.1. Линейные пространства. Определение и примеры.

Def Непустое множество L называется линейным (или векторным) пространством, если в нем определены операции сложения и умножения на число, обладающие следующими свойствами $\forall\ x, y, z \in L$, $\alpha, \beta \in R$ (действительное линейное) (или C)

1°. $x + y = y + x$ (коммутативность)

2°. $x + (y + z) = (x + y) + z$ (ассоциативность)

3°. $\exists!\ 0 \in L : \forall x \Rightarrow 0 + x = x$ (существование нуля)

4°. $\forall x \in L, \exists!(-x) \in L : x + (-x) = 0$ (существование противоположного элемента)

5°. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

6°. $1 \cdot x = x$

7°. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

8°. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

Примеры линейных пространств

1) R^1; 2) R^n 3) $C_{[a,b]}$ 4) l_2

Def Элементы $x, y, \ldots w \in L$ называются линейно зависимыми, если существуют такие числа $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, не все равные 0, что $\alpha x + \beta y + \ldots + \lambda w = 0$ (1).

В противном случае, т.е. если из (1) вытекает $\alpha = \beta = \ldots = \lambda = 0$ говорят, что $x, y, \ldots w$ линейно независимы.

(Векторное пространство в R^3 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).

Def Бесконечная система элементов линейно независима, если любая ее конечная подсистема линейно независима.

Если в пространстве L можно найти n линейно независимых элементов, а любые $n+1$ элементов этого пространства линейно зависимы, то говорят, что пространство L имеет размерность n.

Def Базисом в n-мерном пространстве называется любая система из n линейно независимых векторов.

Def Если в L можно указать систему из произвольного числа линейно независимых элементов, то говорят, что L - бесконечномерно.

Примеры 1) 1-мерно, 2) n-мерно 3)-4) ∞-мерно

2.2. Подпространства

Def Непустое множество L' линейного пространства L называется подпространством, если оно само образует линейное пространство по отношению к операциям сложения и умножения на число, т.е, если $x \in L', y \in L' \Rightarrow \alpha x + \beta y \notin L'\ \ \forall \alpha,\ \beta$.

(эти несобственные)

Def Подпространство, 1) отличное от L и 2) содержащее хотя бы один ненулевой элемент, называется собственным.

Примеры 1) L - линейное пространство $x \in L$ $\{\lambda x\}$ - подпространство (когда λ пробегает все числа) L' размерность 1. Если размерность L больше 1, то собственное

2) $l_2, c_0, c, m, R^{\infty}$ Каждое из них является собственным подпространством последующего

c - сходящиеся последовательности

c_0 - сходящиеся к нулю.

Заметим, что пересечение любого множества подпространств есть снова подпространство.

2.3. Фактор- пространства (по подпространству).

Пусть $L^{'}$ - некоторое пространство пространства L. Разобьем L на классы смежности по подпространству $L^{'}$, относя элементы x и y к одному классу, если $x-y\in L^{'}$.

Совокупность всех таких классов смежности мы назовем фактор-пространства L по $L^{'}$ и обозначим $L/L^{'}$.

Пример построения фактор-пространства [Люстерник, Соболев. Краткий курс фун.ан., с.21]

Рассмотрим и $C_{[0,1]}$ линейное многообразие C_0 всех непрерывных функций, обращающихся в нуль при $t=\frac{1}{2}$. Соответствующее фактор-пространство изоморфно вещественной прямой.

В самом деле, пусть $x(t)$ и $y(t)$ принадлежат одному классу смежности относительно C_0. Это значит, что $x\left(\frac{1}{2}\right)-y\left(\frac{1}{2}\right)=0$, т.е. $x\left(\frac{1}{2}\right)=y\left(\frac{1}{2}\right)$. Таки образом в классе смежности объединяются функции, имеющие в точке $t=\frac{1}{2}$ одинаковое значение, взяв в каждом классе смежности по представителю $x(t)=const$, мы получим взаимно-однозначное соответствие между множеством констант и множеством классов смежности. Легко видеть, что это соответствие – изоморфизм.

При этом линейные операции в фактор-пространстве $L/L^{'}$ определены следующим образом. Если X и Y некоторые классы смежности ($X\in L/L^{'}$, $Y\in L/L^{'}$, а x и y некоторые элементы из L, $x\in X$, $y\in Y$, то классы смежности αX и $X+Y$ определяются как классы, которым принадлежат αx и $x+y$, соответственно).

Т.е. каждое фактор-пространство $L/L^{'}$ представляет собой линейное пространство.

Заметим, что если размерность $L=m$, а размерность $L^{'}=k$, то размерность $L/L^{'}=m-k$.

2.4. Нормированные пространства. Определения и примеры

Def Отображение ρ линейного пространства L на луч $[0;+\infty)$ называется нормой, если $\forall x,\ y\in L$ выполнено

1) $\rho(x)=0\Leftrightarrow x=0$

2) $\rho(\lambda x)=|\lambda|\rho(x)$

3) $\rho(x+y)\le\rho(x)+\rho(y)$ (неравенство треугольника)

Как правило, вместо $\rho(x)$ пишут $\|x\|$. (Эта величина аналогична длине отрезка).

Def Линейное пространство с заданной нормой называется нормированным пространством.

Каждое нормированное пространство становится метрическим, если в нем ввести расстояние $\rho(x,y)=\|x-y\|$.

Def Полное нормированное пространство называется банаховым пространством.

Примеры 1) R^1 $\|x\|=|x|$

2) R^n $\qquad \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$

3) R_1^n $\qquad \|x\|_1 = \sum_{1}^{n} |x_k|$

4) R_1^n $\qquad \|x\|_\infty = \max_{1\le k\le n} |x_k|$

5) $C_{[a,\,b]}$ $\qquad \|f\| = \max_{a\le t\le b} |f(t)|$

6) R_1^n $\qquad \|x\| = \sup_n |x_n|$.

§ 3. Гильбертово пространство.

3.1. Предгильбертово пространство.

Def Говорят, что в комплексном линейном пространстве L задано скалярное произведение, если каждой паре элементов $x,\ y \in L$ поставлено в соответствие комплексное число $(x,\ y)$ так, что выполнены следующие аксиомы:

1) $(x,\ x) \ge 0$, причем $(x,\ x) = 0 \Rightarrow x = 0$

2) $(\alpha x_1 + \beta x_2,\ y) = \alpha(x_1,\ y) + \beta(x_2,\ y)$ (линейность)

3) $(x,\ y) = \overline{(y,\ x)}$ (эрмитовость).

В вещественном линейном пространстве $(x,\ y)$ - вещественное число, удовлетворяющее условиям 1), 2) и 3') $(x,\ y) = (y,\ x)$ (симметрия).

Def Линейное пространство со скалярным произведением называется предгильбертовым.

Def Конечномерное вещественное предгильбертово пространство называют евклидовым, а комплексное – унитарным.

Примеры

1) R^n $\qquad (x,\ y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ евклидово

2) l_2 $\qquad (x,\ y) = \sum_{1}^{\infty} x_i y_i$ предгильбертово (неевклидово ∞-мерное)

Предгильбертово пространство становится линейным нормированным, если в нем ввести норму $\|x\| = \sqrt{(x,\ x)}$

Для того, чтобы нормированное пространство было предгильбертовым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось тождество параллелограмма

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\left(\|f\|^2 + \|g\|^2\right).$$

(В любом предгильбертовом пространстве выполнено неравенство Коши-Буняковского $\|(x,\ y)\| \le \|x\| \cdot \|y\|$).

3.2. Гильбертово пространство.

Поскольку предгильбертово пространство является линейным нормированным пространством, то в нем можно рассматривать понятие полноты по норме, определенной скалярным произведением.

Def Предгильбертово пространство, полное относительно нормы $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ называется гильбертовым пространством.

Чаще всего рассматриваются сепарабельные гильбертовы пространства, т.е. в которых существует счетное всюду плотное множество.

Пример l_2 - сепарабельное гильбертово.

Теорема. Любые два сепарабельных гильбертовых пространства изоморфны между собой.

Эта теорема означает, что с точностью до изоморфизма существует лишь одно (сепарабельное) гильбертово пространство – например l_2.

3.3. Подпространства гильбертова пространства, ортогональные дополнения.

Def Линейным многообразием в гильбертовом пространстве H назовем совокупность L элементов из H, что если f и $g \in L$, то $\alpha f + \beta g \in L$.

Def Замкнутое линейное многообразие называется подпространством.

Всякое подпространство гильбертова пространства либо является конечномерным евклидовым пространством либо евклидовым пространством.

Теорема. В каждом подпространстве M пространства H содержится ортогональная нормированная система $\{\varphi_n\}$, линейное замыкание которой совпадает с M.

Пусть M - подпространство гильбертова пространства H. Обозначим через $M^{\perp} = H \oplus M$ - множество элементов $g \in H$, ортогональных по всем элементам $f \in M_0$

Def Подпространство $M^{\perp}$ называется ортогональным дополнением пространства M.

Из предыдущей теоремы легко следует

Теорема. Если M - (замкнутое!) линейное подпространство пространства H, то любой элемент $f \in H$ единственным образом представим в виде $f = h + h'$, где $h \in M$, $h' \in M^{\perp}$.

Следствие 1. Ортогональное дополнение к ортогональному дополнению линейного пространства M совпадает с самим M.

Следствие 2. каждая ортогональная нормированная система может быть расширена до системы, полной в H.

Def Если каждый вектор $f \in H$ представим в виде $f = h + h'$, $h \in M$, $h' \in M^{\perp}$ (где $M^{\perp}$ - ортогональное дополнение M), то говорят, что H есть прямая сумма взаимно ортогональных подпространств M и $M^{\perp}$ и пишут $H = M \oplus M^{\perp}$.

Понятие прямой суммы может быть обобщено на любое конечное или даже счетное число подпространств.

Def говорят, что H есть прямая сумма своих подпространств $M_1, M_2, ..., M_n ...$

$H = M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_n \oplus ...$

если

1) подпространства M_i попарно ортогональны, т.е. любой вектор из M_i ортогонален любому вектору из M_k, при $i \neq k$

2) каждый элемент $f \in H$ может быть представлен в виде

$f = h_1 + h_2 + ... + h_n + ...$ $h_n \in M_n$ (*)

если число подпространств бесконечно, $\sum \|h_n\|^2$ - сходится.

Если такое представление f (*) существует, то оно единственно и $\|f\|^2 = \sum_n \|h_n\|^2$.

Можно доказать, что если пространство $H = L_1 \oplus L_2$, то фактор-пространство H/L_1 изоморфно L_2. [Люстерник, Соболев. Краткий курс фун.анализа, с.21].

Глава 3. Принцип сжимающих отображений

§ 1. Принцип сжимающих отображений

Def Отображение $f: R \to R$ метрического пространства в себя называется сжимающим, если существует такое число $0 \le q < 1$, что $\forall x,\ y \in R$

$$\rho\big(f(x),\ f(y)\big) \le q\rho(x,\ y).$$

При этом точка $a \in R$ называется неподвижной точкой отображения f, если $f(a) = a$.

Теорема (Принцип сжимающих отображений). Всякое сжимающее отображение в полно метрическом пространстве имеет одну и только одну неподвижную точку.

Неподвижная точка a может быть найдена методом последовательных приближений $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, где $x_n = f(x_{n-1}),\ x_0 \in R$.

Чтобы получить оценку погрешности, воспользуемся неравенством треугольника.

(2) $\rho(a,\ x_n) \le \rho(a,\ x_{n+1}) + \rho(x_n,\ x_{n+1})$.

Заметим, что из (1) следует $\rho(a,\ x_{n+1}) \le q\rho(a,\ x_n)$ и $\rho(x_n,\ x_{n+1}) \le q^n \rho(x_0,\ x_1)$.

Подставим в (2)

$$\rho(a,\ x_n) \le q\rho(a,\ x_n) + q^n \rho(x_0,\ x_1).$$

Окончательно имеем $\rho(a,\ x_n) \le \dfrac{q^n}{1-q}\rho(x_1,\ x_0)$.

Замечание. Построение последовательных приближений x_n, сходящихся к неподвижной точке a можно производить исходя из любого элемента $x_0 \in R$. Это сказывается лишь на скорости сходимости $\{x_n\}$ к своему пределу. [Люст. Соб. С.43].

§ 2. Применение к интегральным уравнениям.

2.1. Уравнения Фредгольма.

Этот материал (интегральные уравнения) будет изучаться на IV курсе, но применять метод последовательных приближений к решению интегральных уравнений мы можем сейчас, на практике.

А на лекции применим метод сжимающих отображений для доказательства $\exists!$ решения неоднородного линейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода, т.е. уравнения

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,\ y)\, f(y)\, dy + \varphi(x)$$

(если слева 0, f - отсутствует, то 1 рода, если $\varphi = 0$, то однородное)

где K - ядро, и φ - данные функции, а f искомая функция.

Пусть $K \in C_{[a,b]\times[a,b]}$, $\varphi \in C_{[a,b]}$. Тогда $\left|K(x,\ y)\right| \le M$.

Рассмотрим отображение $F = Af$ полного пространства $C_{[a,b]}$ в себя, задаваемое формулой

$$F(x) = \lambda \int_a^b K(x,\ y)\, f(y)\, dy + \varphi(x).$$

Тогда $\rho(F,\ G) = \max\left|F(x) - G(x)\right| \le |\lambda| \cdot M \cdot (b-a) \cdot \max\left|f(x) - g(x)\right|$.

Следовательно, при $\lambda < \dfrac{1}{M(b-a)}$ отображение A - сжимающее.

Из принципа сжимающих отображений имеем, что для любого λ, $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ уравнение имеет единственное непрерывное решение. Последовательные приближения к этому решению имеют вид

$f_n(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f_{n-1}(y) dy + \varphi(x)$, $f_0 = \varphi$, где в качестве $f_0(x)$ можно взять любую непрерывную функцию.

2.2. Уравнение Вольтерра.

Интегральное уравнение типа Вольтерра

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x, y) f(y) dy + \varphi(x)$$

(в отличие от Фредгольма верхний предел в интеграле переменный).

Можно считать его частным случаем уравнения Фредгольма, если доопределить $K(x, y) = 0$ при $y > x$. Но в отличие от Фредгольма, к уравнениям Вольтерра принцип сжимающих отображений (и метод последовательных приближений) применим при всех значениях λ, т.к. уравнение разрешимо при $\forall \lambda$.

Глава 4. Компактность в метрических пространствах.

§ 1. Понятие компактности.

Фундаментальную роль в анализе играет следующий факт, известный под названием

Лемма Гейне-Бореля.

Из любого покрытия отрезка $[a, b]$ числовой прямой интервалами можно выбрать конечное подпокрытие.

Это утверждение останется справедливым, если вместо интервалов рассматривать любые открытые множества:

Из всякого открытого покрытия отрезка $[a, b]$ можно выделить конечное подпокрытие.

Исходя из этого свойства отрезка числовой прямой, введем следующее важное понятие.

Def Метрическое пространство R (топологическое) называется компактным, если любое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие.

Свойством компактности наряду с отрезками обладают все замкнутые ограниченные подмножества евклидового пространства любой конечной размерности.

Наоборот, прямая, плоскость, трехмерное пространство служат простейшими примерами некомпактных пространств.

Теорема. Замкнутое подмножество компактного пространства компактно.

Def Множество M из метрического пространства R называется предкомпактным, если его замыкание в R компактно.

§ 2. Компактность в метрических пространствах

2.1. Полная ограниченность.

Def Пусть M - некоторое множество в метрическом пространстве R; ε - некоторое положительное число. Множество A из R называется ε-сетью для M, если $\forall x \in M$ $\exists a \in A$ такая, что $\rho(x, y) \le \varepsilon$. (Множество A не обязано содержаться в M и может даже не иметь с M ни одной общей точки).

Например, целочисленные точки образуют на плоскости $\frac{1}{\sqrt{2}}$ - сеть.

Def Множество M называется вполне ограниченным, если для него при любом $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть.

Ясно, что вполне ограниченное множество обязательно ограниченно, как сумма конечного числа ограниченных множеств. Обратное, вообще говоря, неверно, как покажет пример №2.

Примеры №1. В n-мерном евклидовом пространстве полная ограниченность совпадает с обычной ограниченностью, т.е. с возможностью заключить данное множество в достаточно большой куб.

Действительно, если такой куб разбить на кубики с ребром a, то вершины этих кубиков образуют конечную $\varepsilon = \left[\frac{\sqrt{n}}{2} \cdot a\right]$ - сеть в исходно кубе, а значит, и подавно, в любом множестве, лежащем внутри этого куба.

№ 2. Единичная сфера S в пространстве l_2 ограничена, но не вполне ограничена.

Действительно, рассмотрим в S точки вида

$e_1 = (1, 0, 0, ..., 0, 0, ...)$

$e_2 = (0, 1, 0, ..., 0, 0, ...)$

…….

$e_n = (0, 0, 0, ..., 1, 0, ...)$.

$\rho(e_n, e_m) = \sqrt{2} \qquad n \neq m$.

Отсюда видно, что в S не может быть конечной ε-сети, ни при каком $\varepsilon < \frac{1}{\sqrt{2}}$ (т.к. для каждой e_i нужно ставить свою $a_i \in A$-счетное число).

№3. Рассмотрим в l_2 множество точек $x = (x_1, x_2, ...)$ (гильбертов кирпич) с условиями $|x_1| \leq 1$, $|x_2| \leq \frac{1}{2}$, …, $|x_n| \leq \frac{1}{2}^{n-1}$,…

Это бесконечномерное, вполне ограниченное множество. Докажем полную ограниченность.

Построим ε-сеть.

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем n так, что $\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Каждой точке $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ из Π.

Сопоставим точку $x^* = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...)$ из Π.

При этом $\rho(x, x^*) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^k}} < \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Множество Π^* точек x^* вполне ограничено, как ограниченное множество в n-мерном пространстве (см. пример 1). Выберем в Π^* конечную ε-сеть. Она будет ε-сетью во всем Π (неравенство треугольника).

Заметим, что полная ограниченность есть необходимое условие компактности метрического пространства.

Однако имеет место следующая теорема.

Теорема 1. (Хаусдорфа)

Для того, чтобы метрическое пространство R было компактным необходимо и достаточно, чтобы оно было:

1) вполне ограниченным
2) полным.

Следствие: Компактное пространство R сепарабельно [Л.С., с.53].

Укажем на связь между полной ограниченностью и предкомпактностью.

Теорема 2. Для того, чтобы множество M из полного метрического пространства R было предкомпактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограничено.

2.2. Теорема Арцела-Асколи.

Вопрос о компактности множества M из пространства R - распространенная задача. Теорему 1 из 2.1. применять сложно, поэтому для каждого пространства полезно дать специальные критерии компактности (или предкомпактности) более удобные на практике.

В R^n предкомпактность равносильна ограниченности.

В пространстве $C_{[a,b]}$ критерий компактности имеет вид

Теорема Арцела-Асколи. Для того, чтобы множество M непрерывных функций, определенных на отрезке $[a, b]$ было предкомпактно в $C_{[a,b]}$, необходимо и достаточно, чтобы оно было:

1) равномерно ограничено
2) равностепенно непрерывно.

Def. Множество M функций f равномерно ограничено на $[a, b]$, если $\exists K$, такое, что $|f(x)| < K \ \ \forall x \in [a, b]$, для всех $f \in M$.

Def. Множество M функций f равностепенно непрерывно, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, такое, что как только $\rho(x_1, x_2) < \delta \ \ x_1, x_2 \in [a, b]$ сразу $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \ \ \forall f \in M$.

(В пространстве $L_p[0,1]$ критерии предкомпактности: Т.Рисса, Т.Колмогорова, Т.Красносельского. В пространстве l_p критерии предкомпактности см в [Люст., Соб., с. 74-77].