Практика для ИЗ №2

Пример 1. Будет ли измерима функция f , если измерима функция $arctq\ f$?

По определению функция измерима $\{t: f(t) < b\}$ при всех вещественных b. Заметим ,что для каждого вещественного b существует $\alpha \in \left(-\pi/2, \pi/2\right)$ такое, что $b = tga$. Поэтому $\{t: f(t) < b\} = \{t: f(t) < tga\}$. Далее, так как $arctq\ x$ монотонно возрастающая функция, определенная на всем $\mathbb{R}$, то $arctq\ f$ (t) < $arctq\ (tga) = a$.

$$\{t: f(t) < b\} = \{t: arctq\ \mathrm{f}\ (\mathrm{t}) < a\}.$$

Последнее множество измеримо по условию.

Таким образом, $\forall\ b \in \mathbb{R}$ измеримо множество $\{t: f(t) < b\}$ что и требовалось проверить.■

Пример 2. а) Какие из функций принадлежат $L_1[0,1]$

$f_1(t) = \frac{\ell n cos\, t}{t^2}$; $f_2(t) = \frac{1}{t^2+\sqrt{t}}$; $f_3(t) = \frac{e^{\sqrt{t}}-1}{\sin t}$.

□ Затем, что в точке t = 0 функции f_i , i = 1,2,3 не определены, однако для любого $\varepsilon > 0$ они непрерывны и ограничены на $[\varepsilon, 1]$, следовательно, интегрируемы по

Риману по этому промежутку. Тогда для интегрируемости по Лебегу на всем отрезке [0, 1] необходимо и достаточно проверить абсолютную сходимость несобственного интеграла $\int_0^1 f_i\ (t)dt$ [7, стр. 103] [1, стр. 112 – 114].

Заметим, что при x → 0 $f_1\ (t) = \frac{\ell n \cos t}{t^2} \sim \left(-\frac{1}{2t^4}\right)$;

$f_2(t) = \frac{1}{t^2+\sqrt{t}} \sim \frac{1}{t^{1/2}}$; $f_3(t) = \frac{e^{\sqrt{t}}-1}{\sin t} \sim \frac{1}{t^{1/2}}$.

Следовательно, по признаку сравнения, сходятся интегралы $\int_0^1 f_2(t)\,dt$ и $\int_0^1 f_3(t)\,dt$ и расходятся интеграл $\int_0^1 f_1(t)\,dt$, поэтому f_2 и f_3 принадлежит L_1 [0, 1] ,а f_1 не принадлежит. ■

3 б) Проверить принадлежность последовательности $\left\{\frac{n-3}{3n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ пространству ℓ_1.

□ Принадлежность ℓ_1 означает, что

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n-3}{3n+2}\right| < +\infty$.

Но этот ряд расходится, так как $(n-3)/(3n+2)$ не стремится к нулю, т.е. не выполнено необходимое условие сходимости ряда. ■

Пример 3. Проверить, является последовательность $f_n(t) = cos^n t$ сходящейся поточечно, равномерно, почти всюду, по мере на [0,1].

□ Так как при $t_1 = 0$ $f_n(t_1) = 1$, а при других $t \in (0,1]$ $|f_n(t)| < 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t = 0 \\ 0 & \text{при} \quad t \in (0,1]. \end{cases}$$

Мы доказали поточечную сходимость последовательности $f_n(t)$ к функции

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t \in (0,1]. \end{cases}$$

Поточная сходимость означает, что множество $\{t: f_n(t) \nrightarrow f(t)\}$ пусто, т.е. его мера равна нулю. Тогда, по определению 8, последовательность $\{f_n(t)\}$ сходится к $f(t)$ почти всюду; а из сходимости почти всюду следует, по теореме 3,сходимость по мере.

Отсутствие равномерной сходимости докажем от противного. Пусть последовательность $\{f_n(t)\}$ непрерывных функций на (0,1] равномерно сходится к функции $f(t)$. Тогда по теореме о непрерывности предельной функции, известной из курса математического анализа, $f(t)$ будет прерывна.

Однако определенная выше предельная функция $f(t)$ разрывна в точке $t = 0$. Данное противоречие показывает, что сходимость $f_n(t)$ к $f(t)$ на $[0,1]$ не является равномерной.■