ИЗ №1 по фану Выполнить 1,3, 4 (одно из двух), 5, 6

1. Найти разность и симметрическую разность множеств А и В (привести геометрическое решение задачи).

1.1 $A=\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2\le 1\}$ $\quad B=\left\{(x,y)\in R^2 : |x|<\frac{1}{2}\right\}$

1.2 $A=\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2\ge 1\}$ $\quad B=\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2\le 4\}$

1.3 $A=\{(x,y)\in R^2 : |x|+|y|<1\}$ $\quad B=\{(x,y)\in R^2 : 2xy<1\}$

1.4 $A=\{(x,y)\in R^2 : \sin x-y>0\}$ $\quad B=\{(x,y)\in R^2 : x>0, y>0\}$

1.5 $A=\{(x,y)\in R^2 : x^2+2x+y^2\le 0\}$ $\quad B=\{(x,y)\in R^2 : x^2+2y+y^2\le 0\}$

1.6 $A=\{(x,y)\in R^2 : 1\le x^2+y^2\le 4\}$ $\quad B=\{(x,y)\in R^2 : x-y<1\}$

1.7 $A=\{(x,y)\in R^2 : 9x^2-4y\le 36\}$ $\quad B=\{(x,y)\in R^2 : |x|\le 2, 0<y<1\}$

1.8 $A=\{(x,y)\in R^2 : 0<\sin x<1\}$ $\quad B=\{(x,y)\in R^2 : |x|\le 2, |y|\le 2\}$

1.9 $A=\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2\ge 1\}$ $\quad B=\left\{(x,y)\in R^2 : |y|<\frac{1}{2}\right\}$

1.10 $A=\{(x,y)\in R^2 : x^2-y\le 0\}$ $\quad B=\{(x,y)\in R^2 : 0<y<1\}$

1.11 $A=\{(x,y)\in R^2 : 1\le x^2+y^2\le 9\}$ $\quad B=\{(x,y)\in R^2 : x+y<1\}$

2. Сходится ли последовательность $\{x_n\}$ в пространстве $C[0,1]$ и последовательность $\{x^{(n)}\}$ в пространстве $\ell_\rho, \ell_\infty, c, c_0$.

2.1. $x_n=\begin{cases}1-nt, & t\in\left[0,\frac{1}{n}\right]\\ 0, & t\in\left(\frac{1}{n},1\right]\end{cases}$ $\quad x^{(n)}=\left(\underbrace{1,1,\dots,1}_{n},0,\dots\right)$

2.2. $x_n=e^{-tn}$ $\quad x^{(n)}=\left(\underbrace{0,0,\dots,0}_{n},\frac{1}{2^n+1},\frac{1}{2^n+2},\dots,\frac{1}{2^n+n},0,\dots\right)$

2.3. $x_n=\begin{cases}n(1-nt), & t\in\left[0,\frac{1}{n}\right]\\ 0, & t\in\left(\frac{1}{n},1\right]\end{cases}$ $\quad x^{(n)}=\left(\underbrace{\frac{1}{n},\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n}}_{n},0,\dots\right)$

2.4. $x_n=te^{-tn}$ $\quad x^{(n)}=(1,2,\dots,n,0,\dots)$

2.5. $x_n=\begin{cases}\frac{1-nt}{n+1}, & t\in\left[0,\frac{1}{n}\right]\\ 0, & t\in\left(\frac{1}{n},1\right]\end{cases}$ $\quad x^{(n)}=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{n},0,\dots\right)$

2.6. $x_n=\frac{t^n}{n}$ $\quad x^{(n)}=\left(\frac{1}{ln2},\frac{1}{ln3},\dots,\frac{1}{ln(n+1)},0,\dots\right)$

2.7. $x_n = \begin{cases} \sqrt{n}(1-nt), & t \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 0, & t \in \left(\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$ $\qquad x^{(n)} = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, \dots\right)$

2.8. $x_n = \frac{tn}{1+t^2n^2}$ $\qquad x^{(n)} = (e, e^2, \dots, e^n, 0, \dots)$

2.9. $x_n = \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2}$ $\qquad x^{(n)} = (e^{-1}, e^{-2}, \dots, e^{-n}, 0, \dots)$

2.10. $x_n = \frac{t}{1+t^2n^2}$ $\qquad x^{(n)} = \left(\underbrace{0,0,\dots,0}_{n}, \frac{1}{e^n+1}, \frac{1}{e^n+2}, \dots, \frac{1}{e^n+n}, 0, \dots\right)$

2.11. $x_n = \frac{1}{2n}\sqrt[5]{n^5t+3}$ $\qquad x^{(n)} = (2, 2^2, \dots, 2^n, 0, \dots)$

2.12. $x_n = t^n - t^{n+1}$

3. Проверить принадлежность последовательности $\{x_n\}$ пространству ℓ_ρ.

3.1 $x_n = \left\{\frac{1}{n\ell nn}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\ell_\rho = \ell_1$

3.2 $x_n = \left\{\frac{\sin 1/4}{\sqrt{n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\ell_\rho = \ell_2$

3.3 $x_n = \left\{\frac{\sin n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\ell_\rho = \ell_2$

3.4 $x_n = \left\{\frac{1}{n\ell nn}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\ell_\rho = \ell_\infty$

3.5 $x_n = \left\{tg\,\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\ell_\rho = \ell_\infty$

3.6 $x_n = \left\{\frac{n-3}{n^2+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\ell_\rho = \ell_2$

3.7 $x_n = \left\{\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\ell_\rho = \ell_3$

3.8 $x_n = \left\{\frac{2^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\ell_\rho = \ell_1$

3.9 $x_n = \left\{\frac{n^2+3}{n^3+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\ell_\rho = \ell_\infty$

3.10 $x_n = \left\{\frac{n}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\ell_\rho = \ell_2$

3.11 $x_n = \left\{\frac{1}{\sqrt{n}\ell nn}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\ell_\rho = \ell_3$

4. Найти норму элемента $x(t)$ в $C[a, в]$ и y в ℓ_ρ.

4.1 $x(t) = \cos \pi t$ в $C[0,1]$ $\qquad y = \left(\frac{1}{1001}, \frac{\sqrt{2}}{1002}, \dots \frac{\sqrt{n}}{1000+n}, \dots\right)$ в ℓ_∞.

4.2 $x(t) = 2^t$ в $C[1,5]$ $\qquad y = (1,2,\dots,2018,0,\dots)$ в ℓ_1.

4.3 $x(t) = \sqrt{5-4t}$ в $C[-1,1]$ $\qquad y = (1,2,\dots,100,0,..)$ в ℓ_2.

4.4 $x(t) = \frac{1}{2}t - \sin t$ в $C[0,\pi]$ $\quad y = (1,2,\dots,100,0,..)$ в ℓ_1.

4.5 $x(t) = 2t^2 - 4t + 1$ в $C[0,2]$ $\quad y = (1,-1,2,-2,0,\dots)$ в ℓ_2.

4.6 $x(t) = \frac{t+6}{t^2+13}$ в $C[-5,5]$ $\quad y = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^n}, 0, \dots\right)$ в ℓ_2.

4.7 $x(t) = t^2 - 3t + 2$ в $C[0,1]$ $\quad y = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \dots, \frac{1}{3^n}, 0, \dots\right)$ в ℓ_1.

4.8 $x(t) = t^2 - 4t + 6$ в $C[3,10]$ $\quad y = \left(\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \dots, \frac{1}{n(n+1)}, \dots\right)$ в ℓ_1

4.9 $x(t) = 3t - 2t^2 - 1$ в $C[-1,1]$ $\quad y = \left(1, \sqrt{2}, \dots, \sqrt[n]{n}, \dots\right)$ в ℓ_∞..

4.10 $x(t) = t^2 + 3t - 8$ в $C[0,2]$ $\quad y = \left(\frac{1}{2}, \frac{2^{10}}{4}, \dots, \frac{n^{10}}{2^n}, \dots\right)$ в ℓ_∞.

4.11 $x(t) = 3t^2 - 4t + 6$ в $C[0,3]$ $\quad y = \left(\frac{1}{1\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 5}, \dots, \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}, \dots\right)$ в ℓ_1

5. Вычислить угол между векторами x и y в пространстве H.

5.1. $x = \sin 3t \quad y = \cos 5t \qquad H = C[-\pi, \pi]$

5.2. $x = t \quad y = t^2 \qquad H = C[0,1]$

5.3. $x = e^{-t} \quad x = e^{-2t} \qquad H = C[0,\infty)$

5.4. $x = \sin \pi t \quad y = \sin t \qquad H = C[0,1]$

5.5. $x = t \quad y = \cos t \qquad H = C[0,1]$

5.6. $x = t^2 \quad y = \sin t \qquad H = C[0,\pi]$

5.7. $x = \sin 3t \quad y = \cos 5t \qquad H = C[0,\pi]$

5.8. $x = t \quad y = t^2 \qquad H = C[-1,1]$

5.9. $x = e^{-t} \quad x = e^{-2t} \qquad H = C[-1,1]$

5.10. $x = \sin \pi t \quad y = \sin t \qquad H = C[0,2]$

5.11. $x = t \quad y = \cos t \qquad H = C[-1,1]$

5.12. $x = t^2 \quad y = \sin t \qquad H = C[0,2\pi]$

6. При каких значениях $\lambda \neq 0$ отображение $x(t) = \lambda \int_0^1 K(t,s)x(s)ds + f(t)$ является сжимающим в $C_{[0,1]}$? При $\lambda = \lambda_\circ$ найти решение с точностью до 10^{-2}, полагая $x_\circ(t) = f(t)$, и сравнить его с точным.

6.1 $\lambda = \frac{1}{6} \qquad x(t) = \lambda \int_0^1 t^2 s^2\, x(s)ds + t$

6.2 $\lambda = \frac{1}{8} \qquad x(t) = \lambda \int_0^1 \frac{t}{1+s}\, x(s)ds + 2$

6.3 $\lambda = \frac{1}{10} \qquad x(t) = \lambda \int_0^1 (1+\mathrm{t})(1+\mathrm{s})\, x(s)ds + 2$

6.4 $\lambda = \frac{1}{6} \qquad x(t) = \lambda \int_0^1 ts^2\, x(s)ds + t + 1$

6.5 $\lambda = \frac{1}{6}$ $\quad x(t) = \lambda \int_0^1 t^2 s\, x(s) ds + 1$

6.6 $\lambda = \frac{1}{8}$ $\quad x(t) = \lambda \int_0^1 ts\, x(s) ds + t$

6.7 $\lambda = \frac{1}{10}$ $\quad x(t) = \lambda \int_0^1 \sqrt{1-t}\, x(s) ds + 1$

6.8 $\lambda = \frac{1}{2}$ $\quad x(t) = \lambda \int_0^1 ts\, x(s) ds + 2t$

6.9 $\lambda = \frac{1}{6}$ $\quad x(t) = \lambda \int_0^1 (1-t)s\, x(s) ds + t$

6.10 $\lambda = \frac{1}{2}$ $\quad x(t) = \lambda \int_0^1 1\, x(s) ds + \sin \pi t$

6.11 $\lambda = \frac{1}{2}$ $\quad x(t) = \lambda \int_0^1 (1-t) \sin 2\pi s\ x(s) ds + \frac{1-t}{2}$