Линейные операторы и функционалы

Решение задач

1. Найти норму линейного непрерывного функционала F(x) в пространстве X , если

а) $F(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} x(t)\,dt$, $X = L_2[0,1]$,

б) $F(x) = x(0) + \int_0^1 tx(t)\,dt$, $X = C[0,1]$,

в) $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ¿¿)x_n$, $x = \iota_1$.

34

□ а) По теореме 2 линейный непрерывный функционал в пространстве $L_2[0,1]$ задается формулой $F(x) = \langle x, y\rangle := \int_0^1 x(t)\,y(t)\,dt$,

$y \epsilon L_2[0,1]$, при этом $\|F\| = \| y \|_{L_2}$.

Элемент y найдём из уравнения

$$\int_0^1 x(t)\,y(t)\,dt = \langle x, y\rangle = F(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} x(t)\,1\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 x(t)\,0\,dt.$$

Отсюда имеем $y = \begin{cases} 1, при t \epsilon [0, 1/2] \\ 0, при t \epsilon [1/2, 0] \end{cases}$

Теперь, по определению нормы в $L_2[0,1]$

$$\|F\| = \|y\|_{L_2} = \sqrt{\int_0^1 y^2\,dt} = \sqrt{\int_0^{\frac{1}{2}} 1\,dt} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

б) По определению нормы функционала

$$\|F\| = \sup_{\|x\|=1} |F(x)| = \sup_{\|x\|=1} \left| x(0) + \int_0^1 tx(t)\,dt \right| \le \max_{t \epsilon [0,1]} ¿ |x(t)| = 1 \left(|x(0)| + \int_0^1 t\,|x(t)|\,dt \right) \le 1 + \int_0^1 t\,dt = \frac{3}{2}$$

Из оценок видно, что неравенства обращаются в равенство при x(t)=1, т.е. верхняя грань множества $\left\{ \left| x(0) + \int_0^1 tx(t)\,dt \right| : \|x\| = 1 \right\}$ достижима, А значит $\|F\| = \frac{3}{2}$.

в) По теореме 1 линейный непрерывный функционал в пространстве l_1 задается формулой F(x)=$\langle x, y\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} x_n\, y_n$, у$\epsilon\, l_\infty$, при этом $\|F\|=\| y \|_{l_\infty}$.

Легко увидеть, что равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n\, y_n = \mathrm{F(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right) x_n$$

выполнено, если положить $y_n = 1-\frac{1}{n}$. Отсюда имеем у $=\left\{1-\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Так как последовательность у ограничена, то она принадлежит l_∞, и по теореме 2 $\|F\|=\| y \|_{l_\infty}$. Найдем$\| y \|_{l_\infty}$

$$\| y \|_{l_\infty} = \sup_n \left(1-\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Таким образом $\|F\|=1$.∎

2. Является ли оператор $(Ax)(t) = \int_0^1 \sin \pi (t+s)\mathrm{x(s)}\, ds$ линейным, ограниченным в $C_{[0,1]}$?

□ По определению 1 линейность оператора означает, что выполнено условие

$$\mathrm{A}\left(L\, x(t)+\beta y(t)\right) = L(Ax)(t)+\beta(Ay)(t).$$

Проверим его, используя линейность интеграла

$$\mathrm{A}\left(L\, x(t)+\beta y(t)\right) = \int_0^1 \sin \pi (t+s)\left(L\, x(s)+\beta y(s)\, ds\right) = L\int_0^1 \sin \pi (t+s)\, x(s)\, ds + \beta \int_0^1 \sin \pi (t+s)\, y(s)\, ds = L(Ax)(t)+\beta(Ax)(t).$$

По определению 2оператор ограничен, если ∃ c=const такая, что выполнено неравенство

$$\|Ax\| \le c\|x\| \quad \text{для всех} \quad \mathrm{x}\epsilon\, c_{[0,1]}$$

Проверим его

$$\|Ax\| = \max_{t\epsilon[0,1]} \left| \int_0^1 \sin \pi (t+s)\, x(s)\, ds \right| \le \max_{t\epsilon[0,1]} |x(t)| \cdot \max_{t\epsilon[0,1]} \int_0^1 \left|\sin \pi (t+s)\right| ds$$

$$\le \frac{2}{\pi} \cdot \max_{t\epsilon[0,1]} |x(t)| = \frac{2}{\pi}\|x\|.$$

Следовательно, оператор A ограничен и $\|A\| \le \frac{2}{\pi}$. ∎

3. Найти $\|A\|$, A*, A^{-1}, если

$$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 e^s x(s)\,ds \quad B\ C_{[0,1]}$$

□ Ядро оператора A имеет $K(t,s) = e^s$. Из равенства (2.10) следует, что ядро $K^*(t,s)$ сопряженного оператора A* имеет вид $K¿(t,s) = e^t$. Поэтому

$$(A^* x)(t) = x(t) + \int_0^1 x(s)\,e^t\,ds.$$

Найдем $\|A\|$ из равенства $\|A\| = \sqrt{\|A^* A\|}$ (см. замечание 2)
Рассмотрим самосопряженный оператор A*A

$$(A^* A\,x)(t) = x(t) + \int_0^1 e^s x(s)\,ds + \int_0^1 x(s)\,e^t ds + \int_0^1 \left(\int_0^1 x(s) e^s\,ds \right) e^t\,ds = ¿x(t) + \int_0^1 \left(e^s + e^t + e^{s+t}\right) x(s) ds\ .$$

Так как оператор A-I компактен, то оператора A*A совпадает с его собственным значением. Решим интегральное уравнение

¿ (22)

с вырожденным ядром. Переписывая уравнение (22) в виде

$$(\lambda - 1)x(t) = \int_0^1 e^s x(s)\,ds + e^t \int_0^1 (1 + e^s) x(s)\,ds \qquad (23)$$

получим, что решение этого уравнения (если оно существует) должно иметь вид $x(t) = c_1 + c_2 e^t$. Подставляя $x(t)$ в уравнение (23), получим уравнение

$$(\lambda - 1)(c_1 + c_2 e^t) = \int_0^1 e^s (c_1 + c_2 e^s) ds + e^t \int_0^1 (1 + e^s)(c_1 + c_2 e^s) ds = 0.$$

Так как функции 1 и e^t линейно независимы, то последнее уравнение эквивалентно системе из двух уравнений, полученных приравниванием коэффициентов при $1 u e^t$

1 $$(\lambda - 1) c_1 = (e - 1)\, c_1 + \frac{1}{2}(e^2 - 1) c_2 \qquad (24)$$

e^t $$(\lambda - 1) c_2 = e\, c_1 + \left(e - 1 + \frac{1}{2}(e^2 - 1)\right) c_2$$

Перепишем систему (24) в виде

$$\begin{cases} (e-\lambda)c_1+\frac{1}{2}(e^2-1)c_2=0 \\ ec_1+\left(e-\lambda+\frac{1}{2}(e^2-1)\right)c_2=0 \end{cases} \qquad (25)$$

Система однородных линейных уравнений (25) имеет нулевое решение, если её определитель Δ равен 0.

$$\Delta = \begin{vmatrix} e-\lambda & \frac{1}{2}(e^2-1) \\ e & e-\lambda+\frac{1}{2}(e^2-1) \end{vmatrix} = (e-\lambda)^2+\frac{1}{2}(e^2-1)(e-\lambda)-\frac{e}{2}(e^2-1)=¿$$

$$(e-\lambda)^2-\lambda\frac{e^2-1}{2}=\lambda^2-\lambda\frac{e^2+4e-1}{2}+e^2.$$

Решая уравнение $\lambda^2-\lambda\frac{e^2+4e-1}{2}+e^2=0$ получим

$$\lambda_{1,2}=\frac{e^2+4e-1}{4}\pm\sqrt{\left(\frac{e^2+4e-1}{4}\right)^2-e^2}=\frac{e^2+4e-1}{4}\pm\sqrt{\frac{e^2-1}{4}\cdot\frac{e^2+8e-1}{4}}.$$

Отсюда следует, что $\|A\| = \left(\frac{e^2+4e-1}{4}+\sqrt{\frac{e^2-1}{4}\cdot\frac{e^2+8e-1}{4}}\right)^{1/2}$.

Чтобы найти обратный оператор, необходимо снова решать уравнение $Ax=y$ с вырожденным ядром

$$x(t)+\int_0^1 e^s x(s)ds=y(t).$$

Полагая x(t) = y(t)+ c , получим

$$c+\int_0^1 e^s(y(s)+c)ds=0,$$

$$ce=-\int_0^1 e^s y(s)ds, \qquad c = -¿\frac{1}{e}\int_0^1 e^s y(s)ds,$$

$x(t) = y(t) -\int_0^1 e^{s-1} y(s)ds$ т.е. $(A^{-1}y)(t)=y(t)-\int_0^1 e^{s-1}y(s)ds$.∎

4. Найти спектр и резольвенту оператора $A:l_2\to l_2$

$$Ae_0=0, \qquad Ae_j=e_{j+1} \qquad (j\in N¿.$$

Здесь $e_j=\left(\underbrace{0,\dots,0,1}_{j-1},0,\dots\right)$ представляет собой последовательность, у которой на j –м месте 1, а остальные элементы равны 0.

□ Найдем собственные значения оператора A. Пусть x = $(x_0, x_1, x_2, \ldots ¿ \epsilon l_2$. Тогда $Ax = ¿, x_1, \ldots)$. Решая уравнение Ax=λx получим систему

$$\begin{cases} x_1 = \lambda x_0 \\ x_2 = \lambda x_1 \\ \ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

из которой следует, что вектор x имеет вид $x = ¿, \lambda, \lambda^2, \ldots ¿$. Этот вектор принадлежит пространству l_2 тогда и только тогда, когда $|\lambda|<1$. Таким образом, множество собственных значений оператора A совпадает с открытым единичным кругом $|\lambda|<1$.

Найдем множество $\rho(A)$ регулярных точек оператора A. Так как $\|Ax\| = \|x\|$ для всех $x \epsilon l_2$, то $\|A\| = 1$. В силу теоремы 4 множество $\rho(A)$ содержит внешность единичного круга и для всех λ таких, что $|\lambda|>1$ резольвента $(A-\lambda I)^{-1}$ находится в виде ряда

$$(A-\lambda I)^{-1} y ¿ -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} y = -\left(\frac{I}{\lambda} + \frac{A}{\lambda^2} + \frac{A^2}{\lambda^3} + \cdots\right) y = \left\{-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_{n+k}}{\lambda^{n+1}}\right\}_{k=0}^{\infty} \quad (y \epsilon l_2) .$$

Так как $\rho(A) \supset \{\lambda : |\lambda|>1\}$, то $S(A) \subset \{\lambda : |\lambda| \le 1\}$. С другой стороны, $\sigma(A)$ - замкнутое множество, содержащее единичный круг $\{\lambda : |\lambda| \le 1\}$. Поэтому справедливы равенства $\sigma(A) = \{\lambda : |\lambda| \le 1\}$, $\rho(A) = \{\lambda : |\lambda|>1\}$. ∎

5. а) Является ли компактным в $C_{[0,1]}$ оператор $(Ax)(t) = x(t^2)$?

□ По определению 3 оператор компактен, если он переводит единичный шар в предкомпактное множество. Т.е., если мы возьмем ограниченную последовательность $\{x_n(t)\}$, $\|x_n\| \le 1$, $\forall n$, то из последовательности ¿, по определению 3 (см.контрольную работу №1), можно выделить фундаментальную подпоследовательность. Принимая во внимание полноту пространства $C_{[0,1]}$ заключаем, что подпоследовательнлсть должна сходиться. Покажем обратное.

Возьмем последовательность функций $x_n(t) = \sin 2^n \pi \sqrt{t}$. Она принадлежит единичному шару, так как $|x_n(t)| \le 1$ для всех n. Однако последовательность $(A x_n ¿$ =x($t^2 ¿ = \sin 2^n \pi t$ не может иметь сходящейся подпоследовательности, так как $\rho(A x_n, A x_m) \ge 1$. Чтобы убедиться в этом, заметим, что функция $(A x_n ¿$ при $t_0 = \frac{1}{2^{n+1}}$, а функция $(A x_m ¿$, если m ¿ n. Поэтому

$\rho(Ax_n, Ax_m) = \max_{t\in[0,1]} |(Ax_n)(t_0) - (Ax_m)(t_0)| = 1.$ ∎

5. б) Является ли компактным в $C_{[0,1]}$ оператор $(Ax)(t) = t\int_0^1 sx(s)ds$?

□ Заметим, что $\forall x \in C_{[0,1]}$ $(Ax)(t) = ct$, где $c = \int_0^1 sx(s)ds$, то есть область значений оператора A одномерна. Следовательно, оператор A - (одномерный). В силу замечаний 1 A – компактный оператор. ∎

6. Найти собственные значения и собственные векторы самосопряженного компактного интегрального оператора с симметричным ядром

$$K(t,s) = \begin{cases} \cos s \cdot \sin t, 0 \le t \le s \le \pi, \\ \sin s \cdot \cos t, 0 \le s < t \le \pi, \end{cases}$$

действующего в $L_2[0,1]$.

□Заметим, что $K(t,s) = K(s,t)$ для любой пары (s,t), т.е. ядро симметричное. От уравнения

$$x(t) = \lambda \int_0^\pi K(t,s)x(s)ds \qquad (26)$$

перейдём к соответствующему ему дифференциальному уравнению. Для этого запишем (26) в виде

$$x(t) = \lambda\left(\cos t \int_0^t \sin s \cdot x(s)\,ds + \sin t \int_t^\pi \cos s \cdot x(s)\,ds\right).$$

Дважды продифференцируем

$$x^I(t) = \lambda\left(\cos t \int_t^\pi \cos s \cdot x(s)\,ds - \sin t \int_0^t \sin s \cdot x(s)\,ds\right)$$

$$x^{II}(t) = \lambda\left(\sin t \int_t^\pi \cos s \cdot x(s)\,ds + \cos t \int_0^t \sin s \cdot x(s)\,ds + \cos^2 t \cdot x(t) + \sin^2 t \cdot x(t)\right) = -x(t) - \lambda x(t).$$

Кроме того, получаем два краевых условия $x(0) = x^I(\pi) = 0$. Нахождение собственных значений и собственных векторов ядра сводится к решению краевой задачи

$$x^{II}(t)=-(1+\lambda)x(t), \qquad (27)$$

$$x(0)=x^{I}(\pi)=0. \qquad (28)$$

Рассмотрим три случая:

1)$1+\lambda=0.$ Уравнение (27) принимает вид $x^{II}(t)=0$, его общее решение $x(t)=C_1t+C_2$. Краевые условия (28) показывают, что $C_1+C_2=0$. Получили тривиальное решение уравнения (26), т.е.$\lambda=-1$ не является собственным значением.

2) $1+\lambda=\omega^2>0.$ Уравнение (27) принимает вид

$$x^{II}(t)+\omega^2 x(t)=0.$$

Его общее решение

$$x(t)=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t.$$

Краевые условия (28) перепишутся в виде

$x(0)=C_1=0$

$x^{I}(\pi)=\omega(-C_1\sin\omega\pi+C_2\cos\omega\pi)=0,$ откуда $\cos\omega\pi=0$; имеем $\omega_n=n+\frac{1}{2}>¿0.$

Получили $\lambda_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-¿1$. При этом $x_n(t)=C_2\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t.$

λ_n-собственные значения; x_n-соответствующие им собственные векторы.

3) $1+\lambda=-\omega^2<0.$ Уравнение (27) принимает вид

$$x^{II}(t)-\omega^2 x(t)=0.$$

Его общее решение

$$x(t)=C_1e^{\omega t}+C_2e^{-\omega t}$$

Краевые условия (28) приводят к системе

$$x(0)=C_1+C_2=0,$$

$x^{I}(\pi)=\omega\left(C_1 e^{\omega\pi}-C_2 e^{-\omega\pi}\right)=0.$

Но $\omega\neq 0\, u\, C_1\left(e^{\omega\pi}+e^{-\omega\pi}\right)=0$ только при $C_1=0$, что приводит к тривиальному решению $x(t)=0$.

$\lambda=-1-\omega^2$ не является собственным значением. Ответ: собственные векторы $x_n(t)=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)$t,

собственные значения $\lambda_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-1$, n$\geq 0$.∎

1. Найти решение уравнения Фредгольма II рода с вырожденным ядром

$$(t)=\int_{-1}^{1}\left(ts+t^2 s^2\right)x(s)\mathrm{ds}+t^2+t^4.$$

□ В уравнении

$$x(t)=\mathrm{t}\int_{-1}^{1} sx(s)\mathrm{ds}+t^2\int_{-1}^{1} s^2 x(s)\mathrm{ds}+t^2+t^4$$

введем обозначение

$C_1=\int_{-1}^{1} sx(s)\mathrm{ds}$ и $C_2=\int_{-1}^{1} s^2 x(s)\,ds.$

Поэтому решение будем искать в виде

41

$$x(t)=C_1 t+\left(C_2+1\right)t^2+t^4.$$

Подставим это выражение в исходное уравнение

$$C_1 t+\left(C_2+1\right)t^2+t^4=\int_{-1}^{1} s\left(C_1 s+\left(C_2+1\right)s^2+s^4\right)\mathrm{ds}+t^2\int_{-1}^{1} s^2\left(C_1 s+\left(C_2+1\right)s^2+s^4\right)ds+t^2+t^4=\frac{2}{3}C_1 t+\left(\frac{59}{35}+\frac{2}{5}C_2\right)t^2+t^4.$$

Учитывая линейную независимость функции t, t^2, t^4, получаем

$$\begin{cases} C_1=\frac{2}{3}C_1 \\ C_2+1=\frac{2}{5}C_2+\frac{59}{35} \\ 1¿'1 \end{cases}$$

Решение системы $C_1=0, C_2=\frac{8}{7}$.

Решением уравнения Фредгольма является функция $(t)=\frac{15}{7}t^2+t^4$ ∎

2. Найти решение уравнения Вольтерра II рода с разностным ядром

$$\varphi(x)=e^x-2\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\mathrm{dt}.$$

□ Применяя к данному уравнению преобразование Лапласа, учитывая, что $e^x \doteqdot \frac{1}{P-1}$, $\cos x \doteqdot \frac{P}{P^2+1}$ и используя теорему 8(о свертке), получим

$$\Phi(p)=\frac{1}{P-1}-2\frac{P}{P^2+1}\Phi(p).$$

$$\Phi(p)=\frac{P}{P^2-1}-\frac{1}{(P+1)^2} \quad ,$$

и, следовательно, $\varphi(x)=ch\,x-x\,e^{-x}$ ∎