Тема. Линейные операторы и функционалы

2.1.Линейные операторы и функционалы

Пусть X – банахово пространство над полем C.

Определение 1. Оператор (или отображение) $A: X \longrightarrow X$ называется линейным, если справедливо равенство

$$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A x_1 + \lambda_2 A x_2 \qquad (\forall x_1, x_2 \epsilon X; \lambda_1, \lambda_2 \epsilon C)$$

Определение 2. Линейный оператор A в банаховом пространстве называется ограниченным, если существует число $c>0$ такое, что $\forall x \epsilon X$ справедливо неравенство $\|Ax\| \leqslant c\|x\|$.

Наименьшая из констант $c>0$, для которых выполняется это неравенство, называется нормой оператора A.

Норма ограниченного оператора A находится по формуле

$$\|A\| = \underset{x \epsilon X, \|x\|=1}{¿} \|Ax\| \qquad (1)$$

Линейный оператор $F: X \to C$ называется линейным функционалом. Норма линейного непрерывного функционала вычисляется по формуле

$$\|F\| = \underset{x \epsilon X, \|x\|=1}{¿} |F(x)| \qquad (2)$$

Теорема 1. Всякий линейный непрерывный функционал в пространстве $l\,p(p \geqslant 1)$

задаётся формулой

$$F(x) = ¿\, x, f > := \sum_{i=1}^{\infty} x_i \acute{f}_i (3)$$

при этом $\left(f \epsilon l_q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right) \|F\| = \|f\|_{lq}$.

Замечание. Формула (3) задает также общий вид линейного непрерывного функционала в C。

$$F(x) = ¿\, x, f > := \sum_{i=1}^{\infty} x_i \acute{f}_i,$$

$$(f \epsilon l_1) \|F\| = \|f\|_{l1}.$$

Теорема 2. Всякий линейный непрерывный функционал в пространстве $L_p(a,b)(p \geqslant 1)$ задается формулой

$$F(x) = ¿x, f> := \int_a^b x(t) f(t) dt \quad \left(f(t) \epsilon L_q(a,b), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right) \qquad (4)$$

А норма функционала F совпадает с нормой функции $f \epsilon L_q$.

При p =2 формула (3),(4) согласуется с теоремой Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве

H $: F(x) = (x, f)$ *для некоторого* $f \epsilon H$.

Приведем примеры ограниченных интегральных операторов.

Пример 1. Пусть A – оператор, задаваемый в $C[a,b]$ формулой

$$(Ax)(t) = \int_a^b K(t,s) x(s) ds \qquad K(t,s) \epsilon C([a,b] x [a,b]) \qquad (5)$$

Из неравенства

$$|(Ax)(t)| \leqslant \int_a^b |K(t,s) x(s)| ds \leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} \int_a^b |K(t,s)| ds \cdot \|x\|$$

Следует, что оператор A ограничен в $C[a,b]$, более того, справедливо точная формула [1, гл.8 §1]

$$\|A\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \int_a^b |K(t,s)| ds. \qquad (6)$$

Пример 2. Пусть $K - ¿$ тот же интегральный оператор, рассматриваемый в пространстве $L_2[a,b]$. При условии на ядро

$$\int_a^b \int_a^b |K(t, s¿|^2 ds dt < \infty \qquad (7)$$

оператор K является ограниченным и справедливо неравенство

$$\|K\| \leq \left(\int_a^b \int_a^b |K(t, s¿|^2 ds dt \right)^{1/2} \qquad (8)$$

Определение 3. Линейный оператор A:X→X называется компактным, если образ единичного шара предкомпактен.

Замечание 1. Всякий конечный оператор компактен.

Отметим также, что операторы, рассмотренные в примерах 1,2 компактны в соответствующих пространствах.

Пусть R(A) – область значений оператора A.

Определение 4. Оператор A, действующий в банаховом пространстве X, называется обратимым, если для любого $y \epsilon R(A)$ уравнение $Ax=y$ имеет единственное решение.

Иначе говоря, оператор A обратим. Если он имеет нулевое ядро ker A:= $\{x \epsilon X : Ax = 0\}$.

Если оператор A обратим и его область значений R(A) совпадает с X , то существует обратный оператор A^{-1}: $X \to X$, определённый на всем пространстве X и удовлетворяющий соотношениям $A A^{-1} = A^{-1} A = I$

Теорема 3 (Банаха об обратном операторе). Пусть A – линейный ограниченный оператор, взаимно-однозначно отображающий банахово пространство X на себя. Тогда обратный оператор A^{-1} ограничен.

Определение 5. Точка $\lambda \epsilon C$ называется регулярной точкой ограниченного оператора A , если оператор $A - \lambda I$ обратим и $R(A - \lambda I) = X$.

Дополнение в C ко множеству $\rho(A)$ регулярных точек оператора A называется спектром оператора A и обозначается $\delta(A)$.

В частности, точка $\lambda \epsilon C$ называется собственным значением оператора A, если существует вектор $x \epsilon X$ ($x \neq 0$) , такой, что $Ax = \lambda x$, при этом вектор x называется собственным вектором оператора A. Размерность собственного подпространства $\ker(A - \lambda I)$ называется кратностью собственного значения λ.

Оператор-функции $R_{\lambda = ¿(A - \lambda I)^{-1} ¿}$, определенная при всех $\lambda \epsilon \rho(A)$ называется резольвентой оператора A.

Теорема 4. Спектр ограниченного линейного оператора A замкнут и лежит в круге $\{\lambda \epsilon C : |\lambda| \leq \|A\|\}$. Вне этого круга резольвента $(A - \lambda I)^{-1}$ голоморфна и допускает разложение в ряд

$$(A - \lambda I)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} \qquad |\lambda| > \|A\| \qquad (9)$$

сходящийся в норме пространства X.

Теорема 5. Спектр компактного линейного оператора состоит из не более чем счетного множества, при этом $\delta(A)\setminus\{0\}$состоит из изолированных собственных значений конечной кратности.

Пусть теперь А – ограниченный линейный оператор, действующий в гильбертовом пространстве Н.

Определение 6. Оператор $A^{¿}$: Н$\to H$ называется сопряженным к оператору А, если $\forall_x$, уϵH справедливо равенство

(Ax,y)=(x,$A^{¿}$y).

Сопряженный оператор $A^{¿}$ *также ограничен, при этом* $\|A^{¿}\|=\|A\|$ (см.[1,4]¿.

Оператор А называется самосопряженным, если А=$A^{¿}$.В примере 2 сопряженный к интегральному оператору К также является интегральным оператором с ядром $K^{¿}$(t/s)= К(t/s)

Теорема 6. Собственные значения самосопряженного оператора вещественны, а собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

Замечание 2. Норма ограниченного оператора А, действующего в гильбертовом пространстве может быть вычислена по формуле $\|A\|=¿\sqrt{\|A^{¿}A\|}$,

это следует из соотношений

$$\|A\|^2=\underset{\|x\|=1}{¿}\|Ax\|^2=\underset{\|x\|=1}{¿}(A^{¿}Ax,x)=\|A^{¿}A\|.$$

В случае компактного оператора А эта формула приобретает вид $\|A\|=\sqrt{\lambda_1}$, где λ_1- наибольшее собственное значение оператора $A^{¿}A$.

2.2 Интегральные уравнения.

Интегральное уравнение вида

$$x(t)-\lambda\int_a^b K¿¿t,s)\,x(s)\,ds=f(t) \qquad f\epsilon L_2(a,b) \qquad (10)$$

с ядром К(t,s) , удовлетворяющим условию (7) , называется интегральным уравнением Фредгольма II рода. Его можно записать в операторной форме

$$(I-\lambda K)x=f, \qquad (11)$$

рассматривая в качестве К оператор из примера 2. Теория разрешимости таких уравнений построена Фредгольмом.

<u>I Альтернатива Фредгольма</u>. Либо уравнение (11) разрешимо при любой правой части fϵ L_2(a,b) , либо однородное уравнение

(I -λK)x=0 (12)

имеет нулевое решение xϵ L_2(a,b)

<u>II</u>.В последнем случае уравнение (11) разрешимо для тех и только тех f ϵ L_2(a,b), которые ортогональны каждому решению сопряженного однородного уравнения

(I -$\lambda K^{¿}$)y=0 (13)

31

<u>III</u>. Однородные уравнения (12) и (13) имеют одно и то же, притом конечное, число линейно независимых решений.

Ядро К(t,s) называется вырожденным, если оно представимо в виде

К(t,s)=$\sum_{i=1}^{\infty} p_i$(t)q_i(s), $p_i, q_i \epsilon$ L_2(a,b). (14)

Решение уравнения (10) с вырожденным ядром следует искать в виде

x(t)=$\sum_{i=1}^{\infty} p_i$(t) c_i+f(t). (15)

при этом уравнение (10) сводится к решению системы из n линейных уравнений с n неизвестными $c_{1,} c_{2,} \ldots c_n$.

<u>Определение 7.</u> Число λ называется <u>характеристическим числом</u> оператора К , если однородное уравнение (12) имеет нулевое решение xϵ L_2 (a,b) или, иначе говоря, 1/ λ является собственным значением оператора К.

Рассмотрим <u>интегральное уравнение Фредгольма с симметрическим ядром</u> К(t,s)=$K(t', s)$. Пусть λ_n – характеристические числа, а $\varphi_{n¿¿}$t) – соответствующие собственные функции оператора К (nϵN),образующие ортонормированный базис в Hθ $kerK$ в силу теоремы Гильберта-Шмидта (см. [1]). Решение уравнения (10) может быть найдено в виде ряда Шмидта

x(t)= λ$\sum_{n=1}^{\infty}$ ¿¿¿ (16)

при условии, что λ не совпадает ни с одним из характеристических чисел

λ_n¿ $\lambda \neq 0$¿.

<u>Теорема 7. (Гильберт-Шмидт)</u> Если ядро К(t,s)=$K(t',s)$ удовлетворяет условию (7), то ряд (16) сходится абсолютно и равномерно.

<u>Интегральное уравнение Вольтерра II-го рода</u> вида

$$x(t)=\lambda\int_o^t K(t-s)x(s)ds=f(t), \qquad f(t),\ K(t)\epsilon\, C_{[o,b]}, \qquad (17)$$

в котором ядро К(t,s) завит лишь от разности аргументов, называется <u>уравнением типа свёртки.</u>

Напомним, что уравнение Вольтерра однозначно разрешимо в $C_{[a,b]}$ при всех $\lambda\epsilon\, C$(см.[1,4]). Для решения уравнения типа свёртки обычно используется преобразование Лапласа.

<u>2.3. Элементы операционного исчисления.</u>

Напомним (см.[5]), что функцией-оригиналом называется функция f(t) непрерывная при t≥0, равная 0 при t¿0 и растущая не быстрее экспоненты, т.е. существуют M ¿0 и S_o такие, что

$$|f(t)|\leq Me^{S_o t}. \qquad (18)$$

функцию комплексного переменного

$$F(p)=\int_o^\infty f(t)e^{-pt}dt \qquad (19)$$

голоморфную в полуплоскости Re p¿S_o, называют преобразованием Лапласа (или изображением) функции f(t) и q(t) операция сверки всегда выполнима и справедливо равенство

$$(f*g)(t)=\int_o^t f(s)g(t-s)ds \qquad (20)$$

<u>Теорема 8 (о свёртке)</u>. Если f(t)≑F(p), g(t)≑$g(p)$, то

(f*g)(t)≑$F(p)G(p)$.

<u>Теорема 9 (подобия).</u> Если f(t)≑F(p), $L\alpha\epsilon\, R$, то

$f(Lt)\doteq\frac{1}{L}F\left(\frac{p}{L}\right)$

Теорема 10 (смещения). Если f(t)≑F(p), то
F(t)$e^{P_o t}$≑ F(p - p_o).
Таблица преобразования Лапласа

f(t) (t≥0¿	F(p)		f(t) (t≥0¿	F(p)
1	$\frac{1}{p}$		e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ (nϵ N)	$\frac{1}{ph}$		$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ e^{at}	$\frac{1}{(p-a)^n}$
$\frac{t^{L-1}}{\Gamma(L)}(L>0)$	$\frac{1}{p^L}$		$\frac{1}{a}\sin at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{P}}$		$\cos at$ $\frac{1}{a}$ ¿ $chat$	$\frac{1}{p^2-a^2}$ $\frac{p}{p^2-a^2}$

Если в уравнении (17) типа свёртки функции k(t) и f(t) являются функциями-оригиналами, то отыскивая решение x(t) в виде функции-оригинала и переходя к их изображениям k(t)≑K(p), f(t)≑$F(p), x(t)$≑$X(p)$ получим

X(p)=K(p)X(p)+F(p), X(p) = $\frac{F(p)}{1-K(p)}$ (21)

Для нахождения функции-оригинала x(t) достаточно воспользоваться таблицей преобразований Лапласа и другими теоремами операционного исчисления, приведенными выше.