ИЗ №3 по фану

**2. Найти норму линейного непрерывного функционала F($x$) в пространстве X.** (см. №1 на практике за 28.03, стр.1)

2.1 а) $F(x) = \int_0^1 arc\ \sin t \cdot x(t)dt$, X=$L_2[0,1]$

б) $F(x) = x(0) - x(-1) - x(1)$, X=$C_{[-1,1]}$

в) $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n5^{-n} x_n$, X=$l_2$

2.2 а) $F(x) = \int_0^1 t^{-1/3}\ x(t)dt$, X=$L_2[0,1]$

б) $F(x)= x(0) + 3x(1)+2\,x(2)$, X=$C_{[0,2]}$

в) $F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, X=$l_2$

2.3 а) $F(x) = \int_0^{1/2} \frac{x(t)}{\sqrt{t}lnt}dt$, X=$L_2[0,1]$

б) $F(x) = \int_{-1}^1 signt \cdot x(t)dt$, X=$C_{[-1,1]}$

в) $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, X=$l_1$

2.4 а) $F(x) = \int_{-1}^1 tx(t)dt$, X=$L_P[-1,1]$ (p > 1)

б) $F(x) = \int_0^1 x(\sqrt{t})dt - x(0)$, X=$C_{[0,1]}$

в) $F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$, X=$l_2$

2.5 а) $F(x)=\int_0^{1/2} \frac{x(t)}{\sqrt{t}lnt}dt$, X=$L_2[0, 1/2]$

б) $F(x)=\int_{-1}^1 tx(t)dt$, X=$C_{[-1,1]}$

в) $F(x)=\sum_{n=1}^{1996} nx_n$, X=$l_2$

2.6 а) $F(x)=\int_0^{\pi} \sin t \cdot\ x(t)dt$, X=$L_2[0,\pi]$

б) $F(x)=\int_{-1}^1 tx(t)dt$, X = $C^1_{[-1,1]}$

в) $F(x)=\sum_{n=1}^{1000} \frac{6nx_n}{1+n^2}$, X=$l_1$

2.7 а) $F(x)=\int_0^1 x(t^2)dt$, X=$L_3[0,1]$

б) $F(x)=\int_0^1 \frac{x(t)}{1+t^2}dt$, X=$C_{[0,1]}$

в) $F(x)=\sum_{n=1}^{100} \sqrt{n^3}\, x_n$, X=$l_2$

2.8 а) $F(x) = \int_0^1 te^t x(t)dt$, X=$L_{3/2}[0,1]$

б) $F(x) =2\,x(0) - 3\,x(1)$, X=$C_{[0,2]}$

в) $F(x) =2\,x_1 - x_2$, X=$l_2$

2.9 а) $F(x) = \int_0^{\pi} \cos 2\,t \cdot x(t)dt$, X=$L_2[0,\pi]$

б) $F(x) = \int_{1/e}^{l} \cdot x(t)dt - x(0)$, X=$C_{[1/e,e]}$

в) $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx_n}{2^n}$, $X=c_0$

2.10 а) $F(x) = \int_0^1 te^{-3t}x(t)dt$, $X=L_1[0,1]$

б) $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx(1/k)}{3^k}$, $X=C_{[0,1]}$

в) $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n(n+1)(n+2)}$, $X=c_0$

**4.Является ли оператор А линейным, ограниченным в $C_{[0,1]}$ ?** (см. №2 на практике за 28.03, стр.2)

4.1 $(Ax)(t)=\int_0^t x(s)ds$

4.2 $(Ax)(t)=\frac{x(t)}{1+t^2}$

4.3 $(Ax)(t)= x(t^2)$

4.4 $(Ax)(t)=t^2\, x(t)$

4.5 $(Ax)(t)=e^t\, x(t)$

4.6 $(Ax)(t)=\int_0^1 (st+s^2)x(s)ds$

4.7 $(Ax)(t)=t\int_0^1 (s+t)x(s)ds$

4.8 $(Ax)(t)=\int_0^t x(s)ds$

4.9 $(Ax)(t)= x(t) - x(1)$

4.10 $(Ax)(t)= \sin \pi t \cdot x(t)$

**7. Найти решение уравнения Фредгольма II рода с вырожденным ядром** (см. №1 на практике за 28.03, стр.8)

$$x(t) = \int_{-1}^{1} K(t,s)x(s)ds+f(t).$$

| | $K(t,s)$ | $f(t)$ | | $K(t,s)$ | $f(t)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 7.1 | $2e^{t+s}$ | $e^t$ | 7.6 | $t+s-2st$ | $t^2+t$ |
| 7.2 | $t^2-st$ | $t^2+t$ | 7.7 | $t^4-5st^3$ | $t^2+t^4$ |
| 7.3 | $t-\sqrt[3]{s}$ | $\frac{5}{3}t-\frac{1}{6}$ | 7.8 | $\frac{2}{3}st+t^2(s-1)$ | $0$ |
| 7.4 | $t\sin\frac{\pi}{3}t$ | $\cos\frac{\pi}{3}t$ | 7.9 | $3s+st-5s^2t^2$ | $t$ |
| 7.5 | $\cos\frac{\pi}{4}(t-s)$ | $\cos\frac{\pi t}{4}+\sin\frac{\pi t}{4}$ | 7.10 | $\cos\frac{\pi t}{2}\sin\frac{\pi s}{2}$ | $\sin\frac{\pi t}{2}$ |

**8. Найти спектр и резольвенту оператора $A: C^2 \to C^2$, который задается матрицей М.** (см. №1 после условий ИЗ, стр.3)

| | M | | M | | M | | M | | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8.1 | $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | 8.3 | $\begin{pmatrix} i & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}$ | 8.5 | $\begin{pmatrix} i & i \\ 0 & i \end{pmatrix}$ | 8.7 | $\begin{pmatrix} i & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ | 8.9 | $\begin{pmatrix} i & 1+i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ |

8.2 $\begin{pmatrix} i & i \\ i & i \end{pmatrix}$ 8.4 $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & i \end{pmatrix}$ 8.6 $\begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 8.8 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}$ 8.10 $\begin{pmatrix} i & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

**1. Найти спектр и резольвенту оператора $\mathbf{A}: \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$, который задается матрицей $\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$.**

Пусть A – матрица, задающая оператор $\mathrm{A}: \mathrm{C}^2 \to \mathrm{C}^2$. Тогда оператор $(\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{I})$ будет задаваться характеристической матрицей для матрицы A. Здесь $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Из алгебры известно, что матрица $(\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{I})^{-1}$ существует тогда и только тогда, когда $\det(\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{I}) \neq 0$. Следовательно, $\lambda \in \sigma(\mathrm{A}) \Leftrightarrow$ когда $\lambda$ есть корень характеристического уравнения $\det(\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{I}) = 0$, то есть является собственным числом матрицы A. Остается заметить, что если $\lambda$ – собственное число матрицы A, то оператор $(\mathrm{A} - \lambda\,1_{\mathrm{C}^2})$ не инъективен и $\lambda \in \sigma_{\mathrm{g}}(\mathrm{A})$. Поэтому $\sigma_{\mathrm{H}}(\mathrm{A}) = \emptyset$. Следовательно, для решения данной задачи нужно найти все собственные числа матрицы A:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda - \mathrm{i})\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0, \lambda = \mathrm{i}$$

Отсюда $\sigma_{\mathrm{g}}(\mathrm{A}) = \{0; \mathrm{i}\}$. Для нахождения резольвенты найдем матрицу, обратную матрице $(\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{I})$:

$$\mathrm{R}(\lambda; \mathrm{A}) = (\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{I})^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\mathrm{i} - \lambda} & \dfrac{\mathrm{i}}{\lambda(\mathrm{i} - \lambda)} \\ 0 & -\dfrac{1}{\lambda} \end{pmatrix}; \ \lambda \in \rho(\mathrm{A}) = \mathrm{C} \backslash \{0; \mathrm{i}\}$$