Плоская задача об обтекании произвольного контура сдвиговым потоком

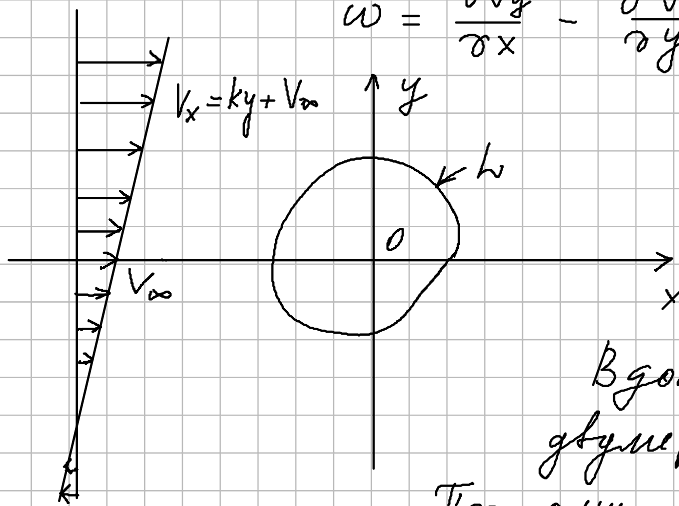
1. Постановка задачи

Двумерный поток идеальной несжимаемой жидкости обтекает контур L. Компоненты скорости течения $V_x(x,y)$ и $V_y(x,y)$.
На бесконечности

$$\lim_{r\to\infty} V_x(x,y) = ky + V_\infty, \quad \lim_{r\to\infty} V_y(x,y) = 0, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}. \qquad (1)$$

Таким образом, поток на бесконечности является сдвиговым с постоянной завихренностью

$$\omega = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} = -k.$$



Введем функцию тока $\psi(x,y)$:

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Тогда $\omega(x,y) = -\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$.

Вдоль линий тока в установившимся двумерном течении завихренность постоянна.
Поэтому всюду в потоке

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = k. \qquad (2)$$

Через функцию $\psi(x,y)$ условия на бесконечности преобразуются так:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\partial\psi}{\partial y} = ky + V_\infty, \quad \lim_{r\to\infty} \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}. \qquad (3)$$

На контуре L считаем, что

$$\psi(x,y) = 0, \quad (x,y)\in L. \qquad (4)$$

Таким образом, необходимо найти функцию $\psi(x,y)$ во внешности контура L по условиям (2)–(4).

Будем искать функцию $\psi(x,y)$ в виде:

$$\psi(x,y) = \frac{1}{2}ky^2 + \psi_p(x,y) \qquad (5)$$

Задача относительно новой неизвестной функции $\psi_p(x,y)$ преобразуется так:

$$\frac{\partial^2 \psi_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_p}{\partial y^2} = 0$$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\partial \psi_p}{\partial y} = V_\infty, \quad \lim_{r\to\infty} \frac{\partial \psi_p}{\partial x} = 0, \quad r = \sqrt{x^2+y^2},$$

$$\psi_p(x,y) = -\frac{1}{2}y^2, \quad (x,y)\in L.$$

Компоненты скорости выражаются через $\psi_p(x,y)$ следующим образом:

$$V_x = ky + \frac{\partial \psi_p}{\partial y}, \quad V_y = -\frac{\partial \psi_p}{\partial x}.$$

Пусть $\varphi_p(x,y)$ — функция сопряженная к $\psi_p(x,y)$ согласно условиям Коши-Римана:

$$\frac{\partial \varphi_p}{\partial x} = \frac{\partial \psi_p}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi_p}{\partial y} = -\frac{\partial \psi_p}{\partial x}.$$

Тогда $W_p(z) = \varphi_p(x,y) + i\,\psi_p(x,y)$ — аналитическая функция комплексной переменной $z = x+iy$. Кроме того,

$$V_x = ky + \frac{\partial \varphi_p}{\partial x}, \quad V_y = -\frac{\partial \psi_p}{\partial x}.$$

Отсюда следует, что

$$V_x - i\,V_y = ky + \frac{dW_p}{dz}.$$

Теперь необходимо найти аналитическую функцию $W_p(z)$ по условиям:

$$\operatorname{Im} W_p(z) = -\frac{1}{2}y^2, \quad z = x+iy \in L, \tag{6}$$

$$\lim_{z\to\infty} \frac{dW_p}{dz} = V_\infty. \tag{7}$$

2. Решение задачи (6), (7) методом конформных отображений

Пусть функция $z = z(t)$ реализует конформное отображение внешность круга единичного радиуса на внешность контура L, такое что бесконечно удаленная точка переходит в бесконечно удаленную и

$$z'(\infty) = m_\infty > 0. \tag{8}$$

Рассмотрим функцию $f(t) = \dfrac{dW_p}{dt}$.

Теперь поле скоростей в физической плоскости представляется в параметрическом виде:

$$V_x - iV_y = k\,\mathrm{Im}\,Z(t) + \frac{f(t)}{Z'(t)}$$

Рассмотрим функцию $t f(t)$. На границе круга при $t = e^{i\gamma}$ имеем $w_p(\gamma) = \varphi_p(\gamma) + i\psi_p(\gamma)$,

$$t f(t)\Big|_{t=e^{i\gamma}} = e^{i\gamma}\,\frac{\varphi_p'(\gamma) + i\psi_p'(\gamma)}{dt/d\gamma} = e^{i\gamma}\,\frac{\varphi_p'(\gamma) + i\psi_p'(\gamma)}{i e^{i\gamma}}.$$

Или

$$t f(t)\Big|_{t=e^{i\gamma}} = \psi_p'(\gamma) - i\varphi_p'(\gamma)$$

Следовательно,

$$\mathrm{Re}\, t f(t)\Big|_{t=e^{i\gamma}} = \psi_p'(\gamma).$$

Пусть $z = z(e^{i\gamma}) = x(\gamma) + i y(\gamma)$. Укажем, что если конформное отображение $z = z(t)$ известно, то функции $x(\gamma)$ и $y(\gamma)$ можно найти. Но $\psi_p(\gamma) = -\frac{1}{2}y^2(\gamma)$. Отсюда следует, что

$$\mathrm{Re}\left[t f(t)\big|_{t=e^{i\gamma}}\right] = -y'(\gamma)\,y(\gamma). \qquad (9)$$

Поскольку $f(t) = \frac{dw_p}{dz}\cdot z'(t)$, то $f(\infty) = V_\infty m_\infty$

Условие на бесконечности для функции $t f(t)$ будет

$$\lim_{t\to\infty}\left[t f(t) - V_\infty t\right] < \infty. \qquad (10)$$

Введем функцию $f_0(t)$ такую, что

$$\mathrm{Re}\left[t f_0(t)\big|_{t=e^{i\gamma}}\right] = \mu(\gamma), \text{ где } \mu(\gamma) = -y'(\gamma)\,y(\gamma)$$

$$\lim_{t\to\infty}\left[t f_0(t)\right] = 0$$

Получили внешнюю задачу Шварца для аналитической функции $t f(t)$.

Её решение дается формулой

$$t f_0(t) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mu(\gamma)\,\frac{e^{i\gamma} + t}{e^{i\gamma} - t}\,d\gamma.$$

Отсюда следует, что

$$f_0(t) = -\frac{1}{2\pi t}\int_0^{2\pi} \mu(\gamma)\,\frac{e^{i\gamma}+t}{e^{i\gamma}-t}\,d\gamma \qquad (11)$$

Для того, чтобы получить $f(t)$, удовлетворяющую условию (10) достаточно добавить хорошо известное решение для комплексно сопряженной скорости обтекания круга единичного радиуса:

$$f(t) = f_0(t) + V_\infty m_\infty\left(1-\frac{1}{t^2}\right)+\frac{\Gamma}{2\pi i t} \qquad (12)$$

3. Метод определения функции $f_0(t)$

Функцию $f_0(t)$ проще всего определить разложив функцию $\mu(\gamma) = -y'(\gamma)y(\gamma)$ в ряд Фурье:

$$\mu(\gamma) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\gamma,$$

где

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mu(\gamma)\,d\gamma,\quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mu(\gamma)\cos n\gamma,\quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mu(\gamma)\sin n\gamma\,d\gamma.$$

Укажем, что т.к. $y(\gamma)$ — 2π-периодическая функция, имеем

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y'(\gamma)y(\gamma)\,d\gamma = \frac{1}{4\pi}\,y^2(\gamma)\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Если a_n и b_n — известны, то воспользуемся формулам

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos n\gamma\,\frac{e^{i\gamma}+t}{e^{i\gamma}-t}\,d\gamma = \frac{1}{t^n},\quad -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin n\gamma\,\frac{e^{i\gamma}+t}{e^{i\gamma}-t}\,d\gamma = \frac{i}{t^n}.$$

Отсюда следует, что

$$f_0(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n + i b_n}{t^{n+1}}.$$

Вам надо:

1) Построить линии тока для окружности радиуса R при $\Gamma = 0$

2) Построить линии тока для эллипса под углом атаки α_a при $\Gamma = 0$ и Γ определяемом из условия: точка схода потока находится в точке эллипса с наибольшей кривизной.