КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1.1. Основные понятия теории множеств. Способы задания множеств. Операции над множествами

ЗАДАНИЕ 1.1.

Для универсального множества $U = \{-5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5\}$, для множества A, заданного списком, и для B, являющегося множеством корней уравнения $x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$, найдите множества: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \triangle B$, $\overline{B}$, $C = (A \triangle B) \triangle A$. Выясните, какой из пяти случаев выполняется для множеств A и C: $A \subset C$, или $C \subset A$, или $A = C$, или $A \cap C = \varnothing$, или множества A и C находятся в общем положении.

№	A	α	β	γ	δ
1	$-5, -2, 1$	9	21	-1	-30
2	$-5, -3, -2, 1$	7	13	-3	-18
3	$-4, -3, -2, 1$	8	17	-2	-24
4	$-5, -4, -2$	-5	-1	17	12
5	$-3, 3, 4, 5$	-3	-12	20	48
6	$-2, 1, 3$	-4	-7	22	24
7	$-4, -3, 2, 5$	0	-17	-36	-20
8	$-1, 1, 5$	-7	9	7	-10
9	$1, 2, 3, 4$	-8	21	-22	8
10	$-5, -4, -1, 1$	9	19	-9	-20
11	$-2, 2, 5$	-2	-19	32	48
12	$-1, 1, 3$	-5	-3	13	10
13	$-3, -2, 2, 5$	-6	0	22	15
14	$-2, 3, 5$	-7	3	31	20
15	$-2, 1, 5$	-6	1	24	-20

Пример решения задания 1.1

Для универсального множества $U = \{-5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5\}$, для множества $A = \{-3, -2, -1, 4\}$ и для B, являющегося множеством корней уравнения $x^4 + 9x^3 + 29x^2 + 39x + 18 = 0$, найдите множества: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \triangle B$, $\overline{B}$, $C = (A \triangle B) \triangle A$. Выясните, какой из пяти случаев выполняется для множеств A и C: $A \subset C$, или $C \subset A$, или $A = C$, или $A \cap C = \varnothing$, или множества A и C находятся в общем положении.

Вначале найдем корни многочлена $x^4+9x^3+29x^2+39x+18$, чтоб знать, какие конкретно элементы находятся во множестве B. Подбором устанавливаем, что одним из корней является -1. Поделив многочлен на $(x+1)$, получим многочлен $x^3+8x^2+21x+18$.

Также подбором устанавливаем, что корнем многочлена $x^3+8x^2+21x+18$ является -2. Делим многочлен на $(x+2)$, получаем x^2+6x+9. Его корни совпадают и равны -3.

Таким образом множество B найдено, $B=\{-3,-2,-1\}$. Теперь выполняем над множествами A и B заданные операции.

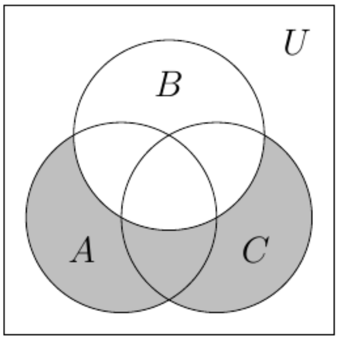
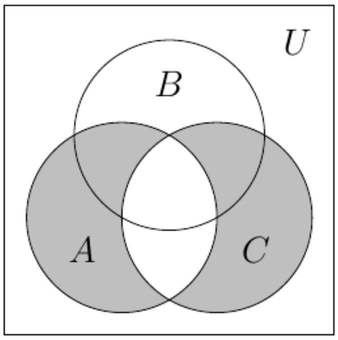
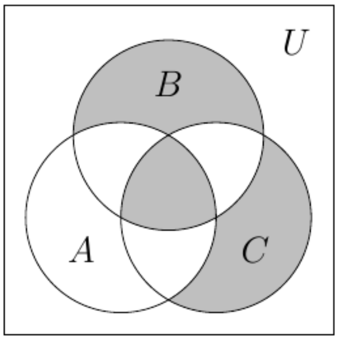
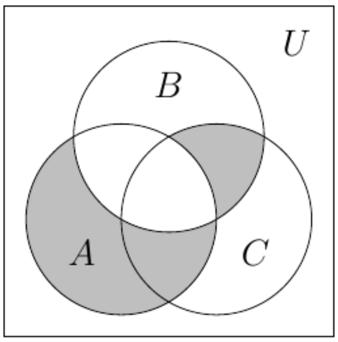
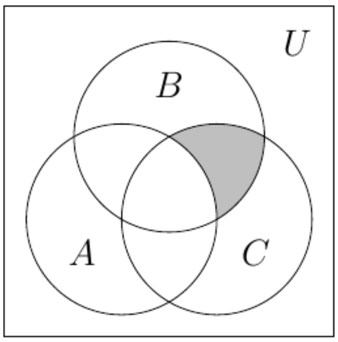
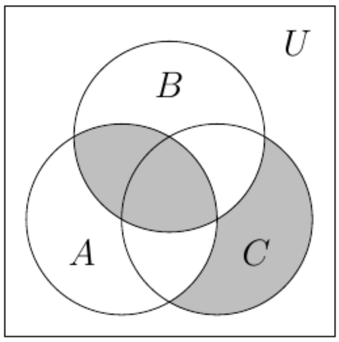
$A\cup B=\{-3,-2,-1,4\}$,
$A\cap B=\{-3,-2,-1\}$,
$A\setminus B=4$,
$B\setminus A=\varnothing$,
$A\triangle B=\{4\}$,
$\overline{B}=U\setminus B=\{-5,-4,1,2,3,4,5\}$,
$C=(A\triangle B)\triangle A=\{4\}\triangle\{-3,-2,-1,4\}=\varnothing\cup\{-3,-2,-1\}=\{-3,-2,-1\}$.

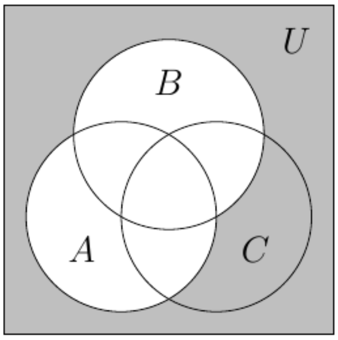
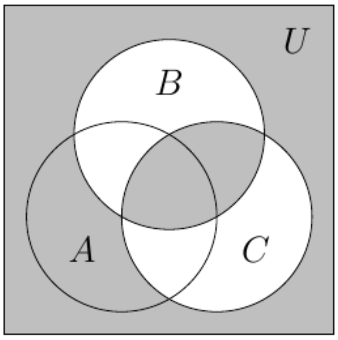
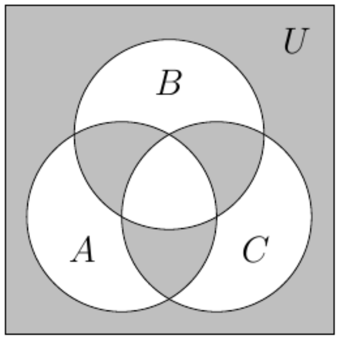
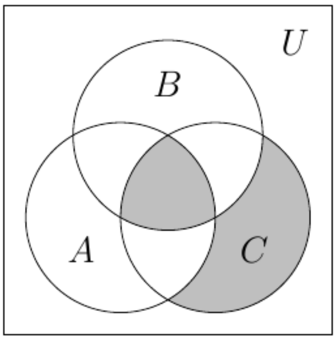
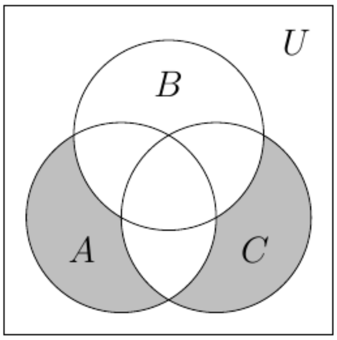
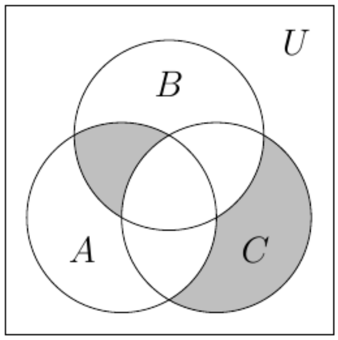
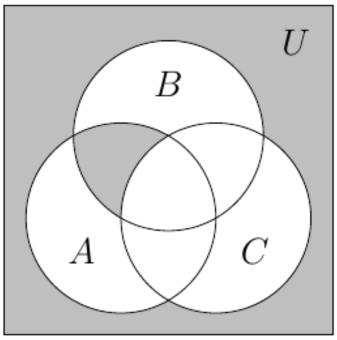
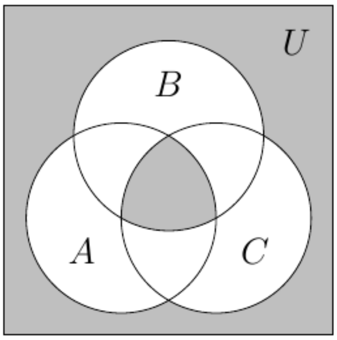
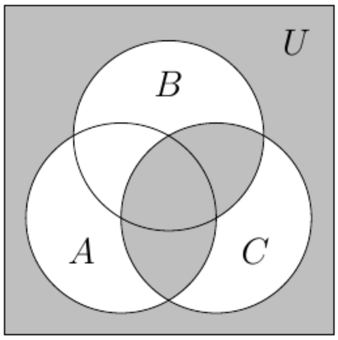
И в конце определяем, какая из пяти возможных ситуаций выполняется для множеств A и C. Есть элементы, которые принадлежат одновременно обоим множествам: $-3\in A$ и $-3\in C$. Есть элементы, которые принадлежат только множеству A: $4\in A$ и $4\notin C$. Нет таких элементов, которые бы принадлежали C, но при этом не принадлежали A. Значит $C\subset A$.

1.2. Диаграммы Эйлера-Венна

ЗАДАНИЕ 1.2

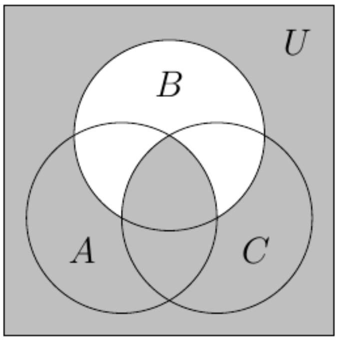
Используя диаграммы Эйлера – Венна, опишите множество, соответствующее части диаграммы, закрашенной серым цветом.

№	Диаграмма	№	Диаграмма	№	Диаграмма
1		2		3	
4		5		6	

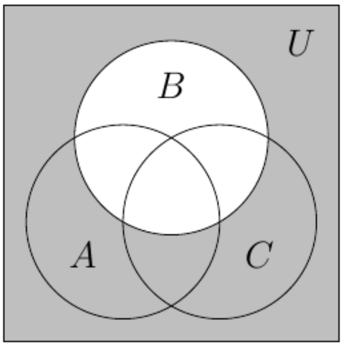
№	Диаграмма	№	Диаграмма	№	Диаграмма
7		8		9	
10		11		12	
13		14		15	

Пример решения задания 1.2

Опишите множество, соответствующее закрашенной части диаграммы.

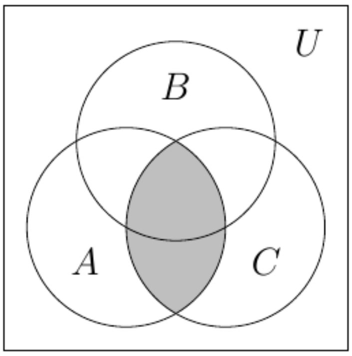


Запишем выражения, позволяющие получить некоторые из закрашенных частей по отдельности, чтоб потом выполнить их объединение.



Большую часть закрашенной области позволяет получить дополнение до универсума множества B.

$$\overline{B}$$



Оставшийся кусочек мы получим, выполнив пересечение множеств A и C.

$$A \cap C$$

Можно было выполнить пересечение всех трёх множеств: $A \cap B \cap C$, но такая запись длиннее, а на конечный результат это не влияет.

Требуемый результат получаем объединением полученных множеств:

$$\overline{B} \cup (A \cap C).$$

ЗАДАНИЕ 1.3

Пусть A, B и C — множества точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условиям α, β и γ соответственно. Изобразите в системе координат $x0y$ множество D, полученное из множеств A, B и C по формуле δ.

№	Условия		№	Условия	
1	α	$x^2 + y^2 - 6y \leqslant 0$	2	α	$y - \frac{4}{x} \leqslant 0$
	β	$y + x + 1 \geqslant 0$		β	$y^2 + x^2 - 25 \leqslant 0$
	γ	$(\lvert x\rvert \leqslant 6) \wedge (-3 \leqslant y \leqslant -2)$		γ	$(\lvert x\rvert \leqslant 1) \wedge (\lvert y\rvert \leqslant 1)$
	δ	$(A \cup B) \triangle C$		δ	$(A \cap B) \setminus C$
3	α	$0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}$	4	α	$(\lvert x\rvert \leqslant 5) \wedge (\lvert y\rvert \leqslant 1)$
	β	$2 \leqslant x \leqslant 6$		β	$(\lvert x\rvert \leqslant 1) \wedge (\lvert y\rvert \leqslant 5)$
	γ	$x^2 + y^2 - 18x \leqslant 0$		γ	$y^2 + x^2 - 16 \leqslant 0$
	δ	$(A \cup B) \setminus C$		δ	$A \cup B \cup C$
5	α	$y - x^2 - 1 \leqslant 0$	6	α	$y - \frac{4}{x} \leqslant 0$
	β	$y - x^2 + 3 \leqslant 0$		β	$y + \frac{4}{x} \geqslant 0$
	γ	$x \geqslant 0$		γ	$y^2 + x^2 - 25 \leqslant 0$
	δ	$(A \cap B) \setminus C$		δ	$(A \cap B) \setminus C$

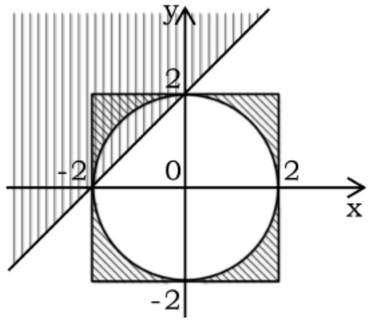
№		Условия	№		Условия
7	α	$x^2+y^2-4x\leqslant 0$	8	α	$y-x^4-1\leqslant 0$
	β	$x^2+y^2+4x\leqslant 0$		β	$0\leqslant y\leqslant\sqrt{x}$
	γ	$(\lvert x\rvert\leqslant 2)\wedge(\lvert y\rvert\leqslant 2)$		γ	$x^2+y^2-4x\leqslant 0$
	δ	$(A\cup B)\triangle C$		δ	$(A\cap B)\triangle C$
9	α	$y+x^2-5\leqslant 0$	10	α	$x^2+y^2-9\leqslant 0$
	β	$x^2+y^2-6y\leqslant 0$		β	$(\lvert y\rvert\leqslant 4)\wedge(-6\leqslant x\leqslant 1)$
	γ	$x\geqslant 0$		γ	$y\leqslant 0$
	δ	$A\setminus(B\cup C)$		δ	$(A\triangle B)\setminus C$
11	α	$x-y\geqslant 0$	12	α	$y+x^2-6\leqslant 0$
	β	$x+y\leqslant 0$		β	$(\lvert x\rvert>2)\wedge(\lvert y\rvert>2)$
	γ	$x^2+y^2\leqslant 4$		γ	$x<y$
	δ	$(A\triangle B)\cup C$		δ	$A\cap B\cap C$
13	α	$y\leqslant\sin x$	14	α	$x<y+3$
	β	$y>0.5$		β	$x>y-3$
	γ	$y>-2$		γ	$(\lvert x\rvert<5)\wedge(\lvert y\rvert<2)$
	δ	$(A\triangle B)\cap C$		δ	$(A\cap B)\setminus C$
15	α	$y-\frac{5}{x}\leqslant 0$	16	α	$x^2+y^2+6y\leqslant 0$
	β	$y+\frac{2}{x}\geqslant 0$		β	$y+x^2+1\geqslant 0$
	γ	$y\geqslant 1$		γ	$(\lvert x\rvert\leqslant 4)\wedge(-4\leqslant y\leqslant -2)$
	δ	$(A\cap B)\setminus C$		δ	$A\cap(B\setminus C)$

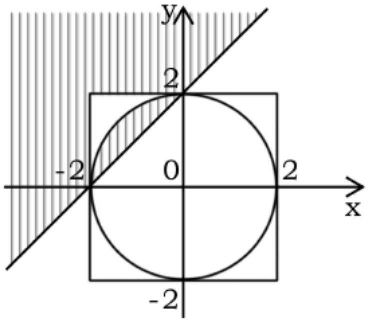
Пример решения задания 1.3

Пусть A, B и C — множества точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условиям $x+2>y$, $x^2+y^2\leqslant 4$ и $(\lvert x\rvert\leqslant 2)\wedge(\lvert y\rvert\leqslant 2)$. Изобразите в системе координат $x0y$ множество $D=A\setminus(B\triangle C)$.

Множество B представляет из себя множество точек круга радиуса 2 с центром в начале координат, включающее границу; A — множество точек плоскости, расположенных строго выше прямой $y=x+2$, и C — множество точек, лежащих внутри и на границе квадрата с центром в начале координат и со сторонами длины 2, параллельными координатным осям.

В данном случае $B \triangle C = (B \setminus C) \cup (C \setminus B) = \varnothing \cup (C \setminus B) = C \setminus B$, так что в это множество попадут точки, которые находятся в квадрате, но при этом не находятся в круге.





Из множества A исключаем точки, попавшие в $B \triangle C$, Получаем ответ.

1.3. Соответствия. Декартово произведение

ЗАДАНИЕ 1.4

Для данных соответствий P и Q найти: Q^{-1}, $P \circ Q^{-1}$, $\text{пр}_1(P \circ Q^{-1})$, $\text{пр}_2(P \circ Q^{-1})$.

№	P	Q
1	$(a,1),(a,2),(b,2),(c,3),(d,1)$	$(\alpha,1),(\beta,2),(\beta,3),(\gamma,3),(\delta,2),(\varepsilon,3)$
2	$(a,1),(b,2),(c,1),(c,3),(d,2)$	$(\alpha,1),(\alpha,3),(\beta,2),(\gamma,1),(\delta,2),(\varepsilon,1)$
3	$(a,3),(b,1),(b,2),(d,1),(d,3)$	$(\alpha,1),(\alpha,2),(\beta,1),(\gamma,2),(\delta,2),(\varepsilon,3)$
4	$(a,1),(b,3),(c,2),(d,1),(d,2)$	$(\alpha,2),(\beta,1),(\beta,2),(\gamma,2),(\delta,3),(\varepsilon,1)$
5	$(a,2),(b,1),(c,2),(c,3),(d,3)$	$(\alpha,3),(\beta,1),(\gamma,2),(\gamma,3),(\delta,1),(\varepsilon,2)$
6	$(a,3),(b,2),(c,2),(c,3),(d,1)$	$(\alpha,1),(\alpha,2),(\beta,2),(\gamma,1),(\delta,3),(\varepsilon,3)$
7	$(a,1),(b,1),(c,2),(d,1),(d,3)$	$(\alpha,1),(\alpha,3),(\beta,1),(\gamma,3),(\delta,1),(\varepsilon,3)$
8	$(a,2),(b,2),(b,3),(c,1),(d,2)$	$(\alpha,2),(\alpha,3),(\beta,1),(\gamma,1),(\delta,3),(\varepsilon,2)$
9	$(a,2),(a,3),(b,1),(c,1),(d,3)$	$(\alpha,2),(\alpha,3),(\beta,2),(\gamma,2),(\delta,1),(\varepsilon,2)$
10	$(a,3),(b,1),(c,2),(c,3),(d,1)$	$(\alpha,3),(\beta,3),(\gamma,2),(\delta,1),(\varepsilon,2),(\varepsilon,3)$
11	$(1,\alpha),(2,\gamma),(3,\alpha),(3,\beta),(3,\gamma)$	$(l,\alpha),(m,\alpha),(n,\beta),(o,\delta),(p,\beta),(p,\gamma)$
12	$(1,\alpha),(1,\gamma),(2,\beta),(3,\alpha),(3,\alpha)$	$(l,\alpha),(l,\gamma),(m,\alpha),(n,\beta),(o,\beta),(p,\delta)$
13	$(1,\beta),(2,\gamma),(2,\delta),(3,\alpha),(3,\gamma)$	$(l,\beta),(m,\alpha),(n,\gamma),(o,\delta),(p,\alpha),(p,\gamma)$
14	$(1,\gamma),(1,\delta),(2,\alpha),(2,\gamma),(3,\beta)$	$(l,\alpha),(m,\beta),(n,\beta),(n,\delta),(o,\gamma),(p,\alpha)$
15	$(1,\alpha),(2,\beta),(2,\gamma),(2,\delta),(3,\beta)$	$(l,\gamma),(m,\beta),(n,\beta),(o,\alpha),(o,\beta),(p,\delta)$

Пример решения задания 1.4

Выполнить задание для $P = \{(\alpha,1),(\alpha,3),(\beta,2),(\gamma,1),(\gamma,4)\}$,
$Q = \{(a,3),(b,1),(b,4),(c,1),(d,2),(d,4),(e,2)\}$.
Обратное отношение $Q^{-1} = \{(3,a),(1,b),(4,b),(1,c),(2,d),(4,d),(2,e)\}$.
Композиция $P \circ Q^{-1} = \{(\alpha,b),(\alpha,c),(\alpha,a),(\beta,d),(\beta,e),(\gamma,b),(\gamma,c),(\gamma,d)\}$.
Проекции $\text{пр}_1(P \circ Q^{-1}) = \{\alpha,\beta,\gamma\}$, $\text{пр}_2(P \circ Q^{-1}) = \{a,b,c,d,e\}$.

1.4. Отношения

ЗАДАНИЕ 1.5

На множестве $A = \{1,2,3,4,5\}$ задано отношение G.

1. Изобразите отношение G графом.

2. Составьте отношение эквивалентности G_1 минимальной мощности, включающее в себя G. Запишите полученное отношение перечислением пар и изобразите его графически. Укажите фактор-множество.

3. Составьте отношение частичного порядка G_2 минимальной мощности, включающее в себя G. Запишите полученное отношение перечислением пар и изобразите его графически. Укажите минимальные и максимальные элементы. Перечислите пары несравнимых элементов.

4. Составьте отношение линейного порядка G_3 минимальной мощности, включающее в себя G. Запишите полученное отношение перечислением пар и изобразите его графически. Укажите наименьший и наибольший элементы.

5. Выполните аналогичное задания для получения G_4 (строгого порядка) и G_5 (строгого линейного порядка).

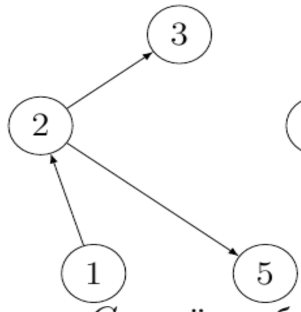
№	G	№	G
1	$(1,2),(2,4),(5,3)$	11	$(5,3),(3,1),(2,3)$
2	$(1,2),(3,2),(2,4)$	12	$(4,2),(1,5),(5,4)$
3	$(5,1),(1,2),(1,3)$	13	$(1,3),(5,4),(4,2)$
4	$(4,1),(3,4),(5,3)$	14	$(5,2),(1,2),(5,4)$
5	$(2,1),(4,1),(2,5)$	15	$(3,1),(5,2),(1,4)$
6	$(1,2),(5,1),(3,4)$		
7	$(4,1),(2,3),(4,2)$		
8	$(3,5),(5,1),(5,2)$		
9	$(1,2),(3,1),(4,3)$		
10	$(3,1),(4,2),(5,1)$		

Пример решения задания 1.5

Выполнить задание, когда на множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *задано отношение* $G = \{(1, 2), (2, 3), (2, 5)\}$.

1. Изобразим в виде графа исходное отношение G.

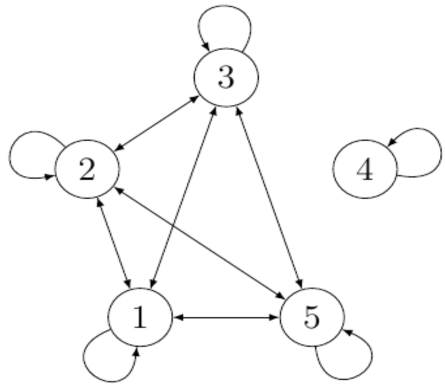
$G = \{(1, 2), (2, 3), (2, 5)\}$.



2. Построим отношение эквивалентности G_1 на основе G, путём добавления минимального количества новых упорядоченных пар, необходимых для того, чтоб выполнялись рефлексивность, симметричность и транзитивность.

$G_1 = G \cup \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5),$
$(2, 1), (3, 2), (5, 2), (1, 5), (5, 1), (1, 3), (3, 1),$
$(3, 5), (5, 3)\}$.

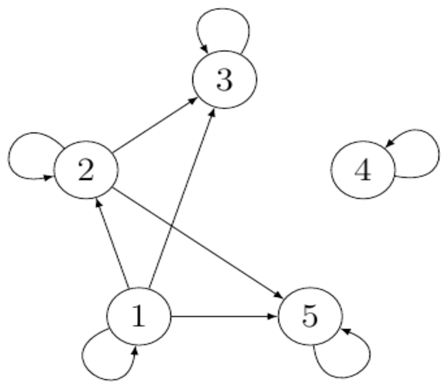
Запишем фактор-множество
$A/G_1 = \{\{1, 2, 3, 5\}, \{4\}\}$.



3. Построим отношение частичного порядка G_2 на основе G, добавляя минимально возможное количество новых пар, чтоб выполнялись рефлексивность, антисимметричность и транзитивность.

$G_2 = G \cup \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5),$
$(1, 3), (1, 5)\}$.

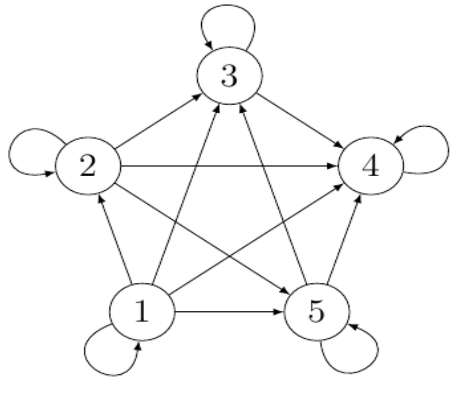
Минимальные элементы: $1, 4$.
Максимальные элементы: $3, 4, 5$.
Пары несравнимых элементов:
$\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 5\}$, $\{5, 4\}$, $\{3, 5\}$.



4. Построим отношение частичного порядка G_3 на основе G_2. Для этого добавим пары, которых не хватает для свойства связности.

$G_3 = G_2 \cup \{(5, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 4), (5, 4)\}$.

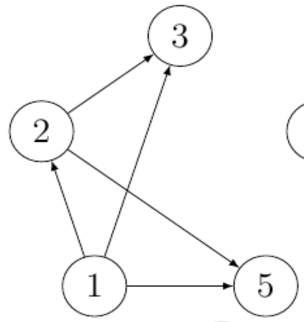
Наименьший элемент: 1.
Наибольший элемент: 4.



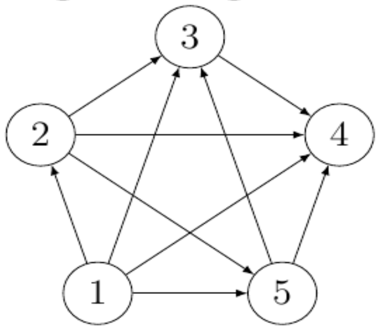
Примечание. Достроить отношение G_2 до линейного порядка можно было и другими способами. К примеру вместо пары $(5,3)$ можно было добавить пару $(3,5)$. А элемент 4 можно было сделать не наибольшим, а наименьшим. Можно было бы включить элемент 4 и куда-нибудь в середину последовательности из остальных элементов, но тогда нужно было бы внимательно следить за тем, чтобы не нарушилась транзитивность.

5. Построим отношение строгого порядка G_4 и строгого линейного порядка G_5 на основе G, добавляя минимальное количество новых упорядоченных пар, чтоб выполнились свойства, стоящие в определения этих отношений.

$$G_4 = G \cup \{(1,3),(1,5)\}.$$



$$G_5 = G_4 \cup \{(5,3),(1,4),(2,4),(3,4),(5,4)\}.$$



2. БУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

2.1. Булевы функции

ЗАДАНИЕ 2.1

Используя таблицы истинности, проверить эквивалентность булевых формул. Определить существенные и фиктивные переменные

1. $(\bar{x} \to y) \to (\bar{x} \wedge y \sim (x \oplus y)) = \left(\overline{x \wedge y} \to x\right) \to y$.
2. $(\bar{x} \vee \bar{y} \wedge z) \to ((x \to y) \to ((y \vee z) \to \bar{x})) =$
   $= (x \to y) \to (\bar{y} \to \bar{x})$.
3. $(x \oplus y \wedge z) \to (\bar{x} \to (y \to z)) = x \to ((y \to z) \to x)$.
4. $x \vee (y \sim z) = (x \vee y) \sim (x \vee z)$.
5. $x \to (y \sim z) = (x \to y) \sim (x \to z)$.
6. $x \wedge (y \sim z) = ((x \wedge y) \sim (x \wedge z)) \sim x$.
7. $x \vee (y \to z) = (x \vee y) \to (x \vee z)$.
8. $x \wedge (y \to z) = (x \to y) \to (x \wedge z)$.
9. $x \to (y \vee z) = (x \to y) \vee (x \to z)$.
10. $x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$.

11. $x \vee (y \sim z) = (x \vee y) \sim (x \vee z)$.
12. $x \wedge (y \sim z) = ((x \wedge y) \sim (x \wedge z)) \sim x$.
13. $x \wedge (y \to z) = (x \to y) \to (x \wedge z)$.
14. $(\overline{x} \to y) \to (\overline{x} \wedge y \sim (x \oplus y)) = \left(\overline{x \wedge y} \to x\right) \to y$.
15. $x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$.

Пример решения задания 2.1

Проверить эквивалентность булевых формул:
$x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$.

Построим таблицу истинности для функции $f(x, y) = x \to (y \to z)$.

x	y	z	$y \to z$	$x \to (y \to z)$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Построим таблицу истинности для функции
$g(x, y) = (x \to y) \to (x \to z)$.

x	y	z	$x \to y$	$x \to z$	$(x \to y) \to (x \to z)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Результирующие столбцы в таблицах истинности совпадают, следовательно, формулы эквивалентны.

Определить существенные и фиктивные переменные функции (11110011).

Для удобства приведем таблицу истинности.

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Проверим, является ли переменная x существенной или фиктивной. Рассмотрим значения функции на наборах, соседних по переменной x:

$f(0,0,0)=1$,

$f(1,0,0)=0$.

$f(0,0,0)\neq f(1,0,0)$. Значит, переменная x – существенная.

Рассмотрим теперь значения функции на наборах, соседних по переменной y:

$f(0,0,0)=1$, $f(0,0,1)=1$, $f(1,0,0)=0$,

$f(0,1,0)=1$. $f(0,1,1)=1$. $f(1,1,0)=1$.

$f(1,0,0)\neq f(1,1,0)$. Следовательно, переменная y – существенная.

Рассмотрим значения функции на наборах, соседних по переменной z:

$f(0,0,0)=1$, $f(0,1,0)=1$, $f(1,0,0)=0$, $f(1,1,0)=1$,

$f(0,0,1)=1$. $f(0,1,1)=1$. $f(1,0,1)=0$. $f(1,1,1)=1$.

На всех парах соседних по переменной z наборов значений переменных функция принимает равные значения, следовательно, переменная z – фиктивная.

2.2. Представление булевых функций разложением по переменным

ЗАДАНИЕ 2.2

Для булевой функции, заданной вектором значений, определить:

1) СДНФ,
2) СКНФ,
3) полином Жегалкина.

1. (10110011). 4. (00110011). 7. (10100011).
2. (00100111). 5. (00110001). 8. (11100001).
3. (10101011). 6. (01100011). 9. (11100011).
10. (11101011). 11. (00100011). 12. (11110001).
13. (11111011). 14. (11101111). 15. (11101101).

Пример решения задания 2.2

Построить СДНФ, СКНФ и полином Жегалкина для функции (11110011). Таблица истинности данной булевой функции приведена в примере решения задания 2.1.

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) для булевой функции $f(x_1,...,x_n)$, не равной тождественно нулю, имеет вид:

$$f(x_1,...,x_n) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1,...,\sigma_n): \\ f(\sigma_1,...,\sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1}...x_n^{\sigma_n},$$

где символ x^σ определяется следующим образом:

$$x^\sigma = \begin{cases} x, \text{если}\, \sigma = 1, \\ \overline{x}, \text{если}\, \sigma = 0. \end{cases}$$

Алгоритм построения СДНФ.

1. Построить таблицу истинности данной булевой функции.
2. Каждому единичному значению булевой функции будет соответствовать элементарная конъюнкция $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2}...x_n^{\sigma_n}$, где $(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)$ – соответствующий набор значений переменных. В конъюнкции мы записываем x_i, если $\sigma_i = 1$, и $\overline{x_i}$, если $\sigma_i = 0$. Конъюнкции соединяются знаком $\vee$.

Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ) для функции $f(x_1,...,x_n)$, отличной от тождественной единицы, имеет вид:

$$f(x_1,...,x_n) = \bigwedge_{\substack{(\sigma_1,...,\sigma_n): \\ f(\sigma_1,...,\sigma_n)=0}} (x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee ... \vee x_n^{\overline{\sigma_n}}).$$

Алгоритм построения СКНФ.

1. Построить таблицу истинности данной булевой функции.
2. Каждому нулевому значению булевой функции будет соответствовать элементарная дизъюнкция $x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee x_2^{\overline{\sigma_2}} \vee ... \vee x_n^{\overline{\sigma_n}}$, где $(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)$- соответствующий набор значений переменных. В дизъюнкции мы записываем x_i, если $\sigma_i = 0$, и $\overline{x_i}$, если $\sigma_i = 1$. Дизъюнкции соединяются знаком $\wedge$.

Всякая булева функция может быть представлена в виде **полинома Жегалкина**:

$$f(x_1,x_2,...,x_n) = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus ... \oplus a_nx_n \oplus$$
$$\oplus a_{n+1}x_1x_2 \oplus ... \oplus a_{2^n-1}x_1x_2...x_n,$$

где $a_0,a_1,...,a_n,...,a_{2^n-1} \in \{0,1\}$, где знак $\oplus$ обозначает сумму по модулю 2.

Алгоритм построения полинома Жегалкина.

1. Построить таблицу истинности данной булевой функции.
2. Каждому единичному значению булевой функции будет соответствовать конъюнкция $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n}$, где $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ - соответствующий набор значений переменных. Конъюнкции соединяются знаком $\oplus$.
3. Заменить выражения $\bar{x}_i$ по формуле: $\bar{x}_i = x_i \oplus 1$. Раскрыть скобки и привести подобные слагаемые по правилу: $x \oplus x = 0$.

Тогда для заданной функции СДНФ имеет вид

$$f(x, y, z) = \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee xy\bar{z} \vee xyz.$$

СКНФ имеет вид:

$$f(x, y, z) = (\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z}).$$

Построим полином Жегалкина:

$$f(x, y, z) = \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \oplus \bar{x}\,\bar{y}z \oplus \bar{x}y\bar{z} \oplus \bar{x}yz \oplus xy\bar{z} \oplus xyz =$$

$$= (x \oplus 1)(y \oplus 1)(z \oplus 1) \oplus (x \oplus 1)(y \oplus 1)z \oplus (x \oplus 1)y(z \oplus 1) \oplus$$

$$\oplus (x \oplus 1)yz \oplus xy(z \oplus 1) \oplus xyz =$$

$$= xyz \oplus yz \oplus xz \oplus z \oplus xy \oplus x \oplus y \oplus 1 \oplus xyz \oplus xz \oplus$$

$$\oplus yz \oplus z \oplus xyz \oplus xy \oplus yz \oplus y \oplus xyz \oplus yz \oplus$$

$$\oplus xyz \oplus xy \oplus xyz = xy \oplus x \oplus 1.$$

Примечание. Обратите внимание, в некоторых источниках в представлении СДНФ и СКНФ в обозначении дизъюнкции вместо символа $\vee$ используется символ $\oplus$.

3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ. ОПТИМИЗАЦИЯ НА ГРАФАХ

3.1. Основные понятия теории графов

ЗАДАНИЕ 3.1

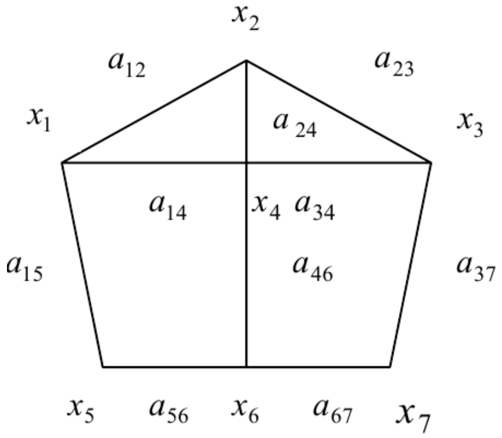
В таблице для каждого варианта заданы декартовы координаты вершин графа и перечислены ребра графа. Граф неориентирован. Следует построить граф на плоскости xOy и найти:

1) таблицу степеней вершин;
2) матрицу смежности;
3) матрицу инцидентности;
4) таблицу расстояний в графе;
5) определить радиус и центр графа.

<table>
<tr><th>№</th><th>x_1</th><th>x_2</th><th>x_3</th><th>x_4</th><th>x_5</th><th>x_6</th><th>x_7</th><th>x_8</th></tr>
<tr><td>1</td><td>(1;3)</td><td>(3;5)</td><td>(6;5)</td><td>(2;2)</td><td>(3;3)</td><td>(1;0)</td><td>(3;0)</td><td>(6;2)</td></tr>
<tr><td colspan="9">$(x_1;x_2),(x_2;x_5),(x_2;x_3),(x_2;x_4),(x_1;x_6),(x_2;x_7),\ (x_6;x_7)$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>(4;6)</td><td>(2;4)</td><td>(4;4)</td><td>(6;4)</td><td>(2;0)</td><td>(4;1)</td><td>(6;0)</td><td>(9;2)</td></tr>
<tr><td colspan="9">$(x_1;x_2),(x_2;x_5),(x_2;x_3),(x_1;x_4),(x_4;x_7),(x_6;x_7),(x_1;x_3),$
$(x_3;x_4),(x_5;x_6),(x_3;x_6)$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>(2;3)</td><td>(2;6)</td><td>(3;7)</td><td>(3;5)</td><td>(5;6)</td><td>(5;4)</td><td>(6;6)</td><td>(4;1)</td></tr>
<tr><td colspan="9">$(x_1;x_2),(x_2;x_3),(x_4;x_6),(x_3;x_4),(x_5;x_6),(x_3;x_5),(x_5;x_7)$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>(1;1)</td><td>(2;2)</td><td>(2;4)</td><td>(2;5)</td><td>(3;5)</td><td>(5;5)</td><td>(3;2)</td><td>(5;2)</td></tr>
<tr><td colspan="9">$(x_1;x_2),(x_2;x_3),(x_5;x_6),(x_3;x_5),(x_6;x_8),(x_2;x_7),(x_7;x_8),$
$(x_5;x_7)$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>(1;4)</td><td>(3;5)</td><td>(5;4)</td><td>(1;2)</td><td>(5;2)</td><td>(1;0)</td><td>(5;0)</td><td>(7;1)</td></tr>
<tr><td colspan="9">$(x_1;x_2),(x_2;x_4),(x_2;x_5),(x_2;x_3),(x_4;x_5),(x_6;x_7),(x_5;x_7),$
$(x_4;x_6)$</td></tr>
<tr><td>6</td><td>(1;7)</td><td>(2;7)</td><td>(6;7)</td><td>(8;5)</td><td>(6;2)</td><td>(2;2)</td><td>(6;5)</td><td>(4;5)</td></tr>
<tr><td colspan="9">$(x_2;x_3),(x_2;x_6),(x_2;x_8),(x_3;x_4),(x_3;x_7),(x_3;x_8),(x_4;x_5),$
$(x_4;x_7),(x_5;x_6),(x_5;x_7),(x_6;x_8)$</td></tr>
<tr><td>7</td><td>(1;5)</td><td>(2;4)</td><td>(4;4)</td><td>(5;5)</td><td>(4;2)</td><td>(2;2)</td><td>(1;1)</td><td>(3;3)</td></tr>
<tr><td colspan="9">$(x_1;x_2),(x_2;x_5),(x_2;x_3),(x_1;x_4),(x_4;x_7),(x_6;x_7),(x_1;x_3),$
$(x_3;x_4),(x_5;x_6),(x_3;x_6)$</td></tr>
<tr><td>8</td><td>(1;2)</td><td>(2;4)</td><td>(3;5)</td><td>(4;4)</td><td>(4;3)</td><td>(2;2)</td><td>(2;3)</td><td>(4;2)</td></tr>
<tr><td colspan="9">$(x_1;x_2),(x_2;x_3),(x_2;x_5),(x_3;x_4),(x_3;x_5),(x_4;x_5),(x_4;x_8),$
$(x_5;x_7),(x_7;x_8)$</td></tr>
<tr><td>9</td><td>(0;2)</td><td>(1;4)</td><td>(2;5)</td><td>(3;6)</td><td>(4;5)</td><td>(5;4)</td><td>(6;2)</td><td>(3;2)</td></tr>
<tr><td colspan="9">$(x_1;x_2),(x_2;x_3),(x_2;x_6),(x_5;x_6),(x_3;x_5),(x_1;x_8),(x_7;x_8),$
$(x_3;x_7),(x_6;x_7)$</td></tr>
<tr><td>10</td><td>(2;2)</td><td>(2;5)</td><td>(3;6)</td><td>(5;6)</td><td>(3;4)</td><td>(4;5)</td><td>(4;4)</td><td>(5;4)</td></tr>
<tr><td colspan="9">$(x_1;x_2),(x_2;x_3),(x_3;x_4),(x_3;x_5),(x_3;x_6),(x_4;x_6),(x_4;x_8),$
$(x_5;x_6)$</td></tr>
<tr><td>11</td><td>(0;2)</td><td>(1;4)</td><td>(2;5)</td><td>(3;6)</td><td>(4;5)</td><td>(5;4)</td><td>(6;2)</td><td>(3;2)</td></tr>
<tr><td colspan="9">$(x_1;x_2),(x_2;x_3),(x_2;x_6),(x_5;x_6),(x_3;x_5),(x_1;x_8),(x_7;x_8),$
$(x_3;x_7),(x_6;x_7)$</td></tr>
<tr><td>12</td><td>(2;2)</td><td>(2;5)</td><td>(3;6)</td><td>(5;6)</td><td>(3;4)</td><td>(4;5)</td><td>(4;4)</td><td>(5;4)</td></tr>
<tr><td colspan="9">$(x_1;x_2),(x_2;x_3),(x_3;x_4),(x_3;x_5),(x_3;x_6),(x_4;x_6),(x_4;x_8),$
$(x_5;x_6)$</td></tr>
</table>

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
13	(1;3)	(3;5)	(6;5)	(2;2)	(3;3)	(1;0)	(3;0)	(6;2)
$(x_1;x_2),(x_2;x_5),(x_2;x_3),(x_2;x_4),(x_1;x_6),(x_2;x_7),(x_6;x_7)$								
14	(4;6)	(2;4)	(4;4)	(6;4)	(2;0)	(4;1)	(6;0)	(9;2)
$(x_1;x_2),(x_2;x_5),(x_2;x_3),(x_1;x_4),(x_4;x_7),(x_6;x_7),(x_1;x_3),$ $(x_3;x_4),(x_5;x_6),(x_3;x_6)$								
15	(1;1)	(2;2)	(2;4)	(2;5)	(3;5)	(5;5)	(3;2)	(5;2)
$(x_1;x_2),(x_2;x_3),(x_5;x_6),(x_3;x_5),(x_6;x_8),(x_2;x_7),(x_7;x_8),$ $(x_5;x_7)$								

Пример решения задания 3.1



Пусть дан граф G

Рассмотрим решение задания 3.1 на его примере.

Степенью (валентностью) вершины x_i неориентированного графа G называется число ребер $\sigma(x_i)$, инцидентных данной вершине. Таблица степеней вершин данного графа имеет вид:

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$\sigma(x_i)$	3	3	3	4	2	3	2

Матрицей смежности $A(G)$ неориентированного графа G называется матрица размерности $n \times n$, элементы которой определяются следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если вершины } x_i \text{ и } x_j \text{ смежны,} \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Матрица смежности для данного графа имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицей инцидентности $B(G)$ неориентированного графа G с n вершинами и m ребрами называется матрица размерности $n \times m$, элементы которой определяются следующим образом:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если вершина } x_i \text{ инцидентна ребру } a_j, \\ 0 \text{ в противном случае или если } a_j \text{ - петля.} \end{cases}$$

В графе G обозначим ребро, соединяющее вершины x_i и x_j, через a_{ij} (два индекса использовать удобнее). Так, например, ребро a_{23} инцидентно вершинам x_2 и x_3. Матрица инцидентности для нашего графа имеет вид:

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} a_{12} & a_{14} & a_{15} & a_{23} & a_{24} & a_{34} & a_{37} & a_{46} & a_{56} & a_{67} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Обозначения вершин и ребер графа не включаются в матрицу инцидентности, а записаны только для удобства.

Расстоянием $d(x, y)$ между вершинами x и y в неориентированном графе G называется наименьшее число ребер, соединяющих эти вершины. **Условный радиус** графа G относительно вершины c определяется формулой:

$$r(c) = \max_{x \in V(G)} d(c, x).$$

Здесь $V(G)$ – это множество вершин графа G.

Радиус графа G определяется как наименьший из условных радиусов графа, а **центр графа** составляют вершины, условные радиусы графа относительно которых совпадают с радиусом графа.

Для данного графа таблица расстояний и условных радиусов вершин имеет вид:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$r(x_i)$
x_1	0	1	2	1	1	2	3	3
x_2	1	0	1	1	2	2	2	2
x_3	2	1	0	1	3	2	1	3
x_4	1	1	1	0	2	1	2	2
x_5	1	2	3	2	0	1	2	3
x_6	2	2	2	1	1	0	1	2
x_7	3	2	1	2	2	1	0	3

Радиус графа G $r(G) = 2$, следовательно, центр графа это множество вершин $\{x_2, x_4, x_6\}$.

3.2. Задачи оптимизации на графах

ЗАДАНИЕ 3.2

Для графа, описанного в задании 3.1 вычислить:
1) Минимальное остовное дерево.
2) Кратчайший путь из одного источника.

Для решения задач данного раздела считать граф ориентированным (направление дуги отмечается упорядоченной парой вершин, формирующих ребро). Вес дуги равен длине отрезка между вершинами графа.

Пример 3.2.1. Рассмотрим нагруженный *граф* G, показанный на рисунке ниже.

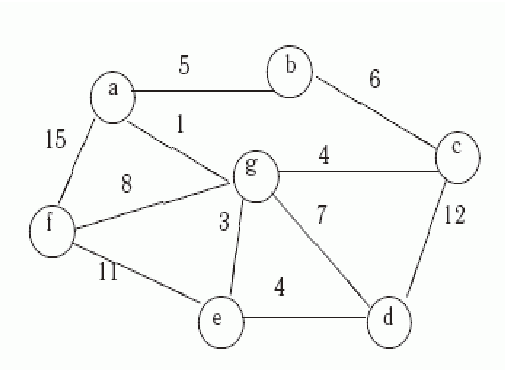


Рис. Граф G

Во многих задачах в заданном графе нужно выделить некоторую часть, обладающую тем или иным свойством.

Определение 11.1. *Граф* $G_1=(V_1,E_1)$ называется подграфом графа G=(V,E), если $V_1 \subseteq V$ и $E_1 \subseteq E$.

Для неориентированных связных графов одним из интересных классов подграфов являются деревья, сохраняющие *связность* вершин. Они называются *остовами*, *остовными деревьями*, каркасами или скелетами графа.

Определение 11.2. ***Остовом*** (неориентированного) *связного графа* G=(V,E) называется его *подграф* S=(V,T), являющийся деревом.

Пусть задана *функция* c: E -> R, приписывающая каждому ребру $e \in E$ его *стоимость* (*вес*, длину) $c(e) \in R$ (R - множество вещественных чисел). Тогда *стоимость* c(S) дерева S определяется как сумма стоимостей всех его ребер, т.е. $c(S) = \sum_{e \in T} c(e)$.

Минимальным остовом называется *остов* минимальной стоимости.

Таким образом, *минимальный остов* - это самая дешевая (короткая) система путей, связывающая все вершины G.

Опишем процедуру построения *минимального остова*, предложенную Дж. Крускалом в 1956г.

***Алгоритм* МинОстов**

Вход: *связный граф* G=(V,E) и *функция* стоимости ребер c: E -> R.
Выход: *минимальный остов* S=(V,T).
Этап 1. Пусть E содержит m ребер. Упорядочим их *по* возрастанию стоимостей: $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_i, \ldots, e_m\}$ так, что $c(e_1) \le c(e_2) \le \ldots \le c(e_i) \le \ldots \le c(e_m)$
Этап 2. Последовательно для каждого i =1, ... , m определим множество ребер T_i:

$$T_1 = \{e_1\}; \qquad \ldots T_i = \begin{cases} T_{i-1} \cup \{e_i\}, & \text{если во множестве } T_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ нет циклов} \\ T_{i-1}, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Положим $T=T_m$.
Выдать в качестве результата *граф* S=(V,T).

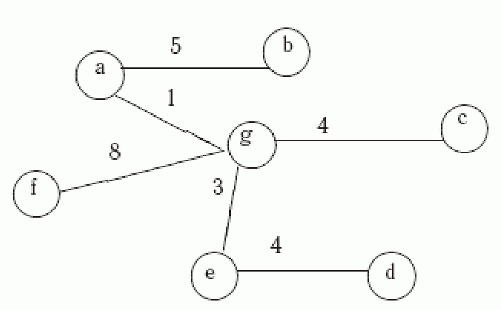
Применим к графу G *алгоритм* МинОстов. На первом этапе упорядочим все ребра, а на втором – рядом с каждым из них определим соответствующее множество T_i.

Ребра, попавшие в T, будем *по* ходу вычисления отмечать знаком '+', а не попавшие - знаком '-'.

E	**c(e)**	**входит**	T_i
(a,g)	1	$+$	$T_1 = \{(a,g)\}$
(g,e)	3	$+$	$T_2 = \{(a,g),(g,e)\}$
(g,c)	4	$+$	$T_3 = \{(a,g),(g,e),(g,c)\}$
(e,d)	4	$+$	$T_4 = \{(a,g),(g,e),(g,c),(e,d)\}$
(a,b)	5	$+$	$T_5 = \{(a,g),(g,e),(g,c),(e,d),(a,b)\}$

E	**c(e)**	**входит**	T_i
(b,c)	6	$-$	$T_6 = T_5$
$(d,g))$	7	$-$	$T_7 = T_6$
(f,g)	8	$+$	$T_8 = \{(a,g),(g,e),(g,c),(e,d),(a,b),(f,g)\}$
(e,f)	11	$-$	$T_9 = T_8$
(c,d)	12	$-$	$T_{10} = T_9$
(a,f)	15	$-$	$T_{11} = T_{10}$

Таким образом, мы построили для G *минимальный остов* S=(V,T), где $T=T_8$ ={ (a,g), (g,e), (g,c), (e,d), (a,b), (f,g)}. Он показан на рис. *Стоимость* этого *остова* c(S)=25.



Замечание. Так как *дерево* с n вершинами содержит в точности (n-1) ребер, то работу алгоритма МинОстов можно прекращать после такого шага i, на котором в T_i окажется |V| - 1 ребер. В нашем примере |V| =7 и *алгоритм* мог остановиться после 8-го шага.

Рис. Минимальный остов S=(V,T) для графа G

Пример 3.2.2. Решим задачу о кратчайшем пути нагруженном графе G=(V={a, b, c, d, e, f}, E) для *выделенной вершины a*∈ V. Зададим длины ребер матрицей C= (c_{uv}), где элемент c_{uv}=c(u,v):

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array}
\begin{pmatrix}
0 & 25 & 5 & 30 & \infty & 75 \\
12 & 0 & \infty & \infty & 120 & 20 \\
\infty & 15 & 0 & 20 & 45 & 60 \\
\infty & \infty & \infty & 0 & 23 & 20 \\
\infty & \infty & 75 & 20 & 0 & 20 \\
40 & 15 & 15 & 26 & \infty & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Пусть G=(V,E) – ориентированный *граф*, для каждого ребра *e* ∈ E которого указана его (неотрицательная) *длина*: c(e) >= 0. Тогда *длина пути* $p=v_1,v_2, \ldots , v_{k+1}$ определяется как сумма длин ребер, входящих в этот *путь*: $c(p) = \sum_{i=1}^{k} c(v_i, v_{i+1})$. Если в G имеется *путь* из вершины a в вершину b, то имеется и такой *путь* минимальной длины. Он называется *кратчайшим путем* из a в b. Конечно, в графе может оказаться несколько различных *кратчайших путей* из a в b.

Естественно спросить, как узнать *длину кратчайшего пути* из a в b и построить его? Лучшие известные на сегодняшний день алгоритмы, отвечающие на этот вопрос, решают, на самом деле, более общую задачу построения всех *кратчайших путей* из одного источника: *по* вершине a найти *длины кратчайших путей* из a во все достижимые из нее вершины и построить для каждой из таких вершин некоторый *кратчайший путь* из a. Если для каждой вершины *v* ∈ V, достижимой из a, зафиксировать один *кратчайший путь* из a в v, то получившийся *граф* будет представлять *ориентированное дерево* с корнем a. Это *дерево* называется *деревом кратчайших путей* из a.

Рассмотрим *алгоритм* построения *дерева кратчайших путей* и определения их длин, предложенный в 1959г. Е. Дейкстрой. Его идея следующая: перед каждым этапом известно множество **отмеченных вершин** S, для которых *кратчайшие пути* найдены ранее; тогда на очередном этапе к нему добавляется *вершина* w, с самым коротким путем из a, проходящим *по* множеству S; после этого пересчитываются *длины кратчайших путей* из a в оставшиеся вершины из V \ S с учетом новой вершины w. *Длина* текущего *кратчайшего пути* из a в v, проходящего *по* множеству S, заносится в ячейку D[v] массива D. В конце работы в этом массиве отыскиваются *длины* соответствующих *кратчайших путей*. Для определения дерева *кратчайших путей* служит *массив* OT, его элемент OT[v] содержит ссылку на вершину, из которой *кратчайший путь* приходит в v .

***Алгоритм* Дейкстры**

Вход: G=(V,E) - ориентированный *граф*, c(u,v) >= 0 -*длина* ребра $(u,v) \in E$ (если $(u,v) \notin E$, то считаем, что $c(u,v) = \infty$) и исходная *вершина* $a \in V$.

=== ИНИЦИАЛИЗАЦИЯ ===
1. S := {a}; ' отметить a
2. D[a] := 0; ' расстояние от a до a
3. ДЛЯ КАЖДОЙ v, принадлежащей V, v != a ВЫПОЛНЯТЬ
4. {D[v] := c(a,v); ' расстояние от a до v через a
5. ЕСЛИ c(a,v) < бесконечности ТО OT[v]:= a ИНАЧЕ OT[v]:= - };
=== ОСНОВНОЙ ЦИКЛ ===
6. ПОКА V \ S не пусто ВЫПОЛНЯТЬ ' есть неотмеченные вершины
7. { выбрать неотмеченную вершину w с минимальным D[w];
8. S := S объединение с {w}; ' отметить w
9. ДЛЯ КАЖДОЙ (неотмеченной) u принадлежит V \ S ВЫПОЛНЯТЬ
10. ЕСЛИ D[u] > D[w] + c(w,u)
11. ТО { D[u] := D[w] + c(w,u);
12. OT[u]:= w}
13. }

Поэтапную работу *алгоритма Дейкстры* удобно представлять в виде таблицы (см.табл.1), строки которой соответствуют его этапам. Первый столбец - номер этапа, второй показывает изменение *множества* отмеченных вершин S, третий - вершину w, добавляемую к S на текущем шаге, четвертый - *длину кратчайшего пути* из a в w, затем идут столбцы со значениями элементов массивов D и OT.

Теорема 11.4. (о корректности *алгоритма Дейкстры*)

Алгоритм Дейкстры строит *дерево кратчайших путей из вершины* a во все достижимые из нее вершины и для каждой такой вершины v определяет *длину* D[v] *кратчайшего пути* в нее из a.

Таблица 1. *Алгоритм Дейкстры* на графе G.

N	**S**	**w**	**D[w]**	**D**					**OT**				
				b	**c**	**d**	**e**	**f**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**
1.	a	c	5	25	5	30	∞	75	a	a	a	-	a
2.	a, c	b	20	20	-	25	50	65	c	a	c	c	c
3.	a, c, b	d	25	-	-	25	50	40	c	a	c	c	b
4.	a, c, b,d	f	45	-	-	-	48	45	c	a	c	d	b
5.	a, c, b,d	e	45	-	-	-	-	45	c	a	c	d	b

Дерево кратчайших путей из вершины a задается массивом OT. Оно представлено на рис.

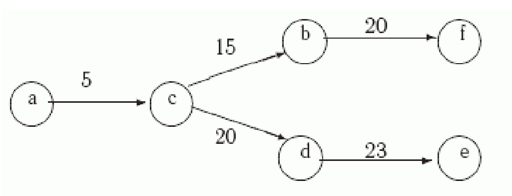


Рис. Дерево кратчайших путей из вершины a в графе G.