Контрольная работа №2

1. Вычислите несобственные интегралы или докажите их расходимость.

1.1. $\int\limits_{3}^{\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}$. **1.2.** $\int\limits_{-1}^{3}\frac{x^4}{x^5+1}\,dx$ **1.3.** $\int\limits_{4}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^5}}$

1.4. $\int\limits_{1}^{3}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$ **1.5.** $\int\limits_{0}^{1}\frac{x}{1-x^4}dx$.

2. Произвести вычисления.

2.1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2+1$ и прямой $y=3-x$.

2.2. Вычислите длину дуги кривой $\rho=2\sin\varphi$.

2.3. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривыми $y=e^x$, $x=0$, $y=0$,x=1.

2.4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линией $\rho=4\cos 3\varphi$.

2.5. Вычислите длину дуги арки циклоиды $x=9(t-\sin t)$, $y=9(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$.

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Несобственные интегралы по бесконечному промежутку

Пример 1. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{x^3dx}{\left(1-2x^4\right)^5}$ или доказать его расходимость

Решение.

$$\int\limits_{1}^{\infty}\frac{x^3dx}{\left(1-2x^4\right)^5}=\left\langle \begin{matrix} u=1-2x^4; & x^3dx=-\frac{1}{8}du; & \text{если } x=1, \text{ то } u=-1; \\ du=-8x^3dx; & & \text{если x} \to\infty, \text{ то } u\to-\infty \end{matrix}\right\rangle=$$

$$=-\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\frac{1}{8}du}{u^5}=-\frac{1}{8}\lim_{N\to-\infty}\int\limits_{1}^{N}u^{-5}du=-\frac{1}{8}\lim_{N\to-\infty}\left.\frac{u^{-4}}{-4}\right|_1^N=\frac{1}{32}\lim_{N\to-\infty}\left.\frac{1}{u^4}\right|_1^N=\frac{1}{32}\lim_{N\to-\infty}\left(\frac{1}{N^4}-1\right)=\frac{1}{32}(0-1)=-\frac{1}{32}.$$

Таким образом, несобственный интеграл равен $-\frac{1}{32}$, т. е. он сходится.

Несобственные интегралы второго рода

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\limits_{1}^{5}\frac{dx}{(x-4)^4}$ или доказать его расходимость.

Решение. $\int\limits_{1}^{5}\frac{dx}{(x-4)^4}=\int\limits_{1}^{4}\frac{dx}{(x-4)^4}+\int\limits_{4}^{5}\frac{dx}{(x-4)^4}=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int\limits_{1}^{4-\varepsilon}(x-4)^{-4}dx+\lim\limits_{\varepsilon_1\to0}\int\limits_{4+\varepsilon_1}^{5}(x-4)^{-4}dx=$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(x-4)^{-3}}{-3}\Bigg|_1^{4-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon_1\to 0}\frac{(x-4)^{-3}}{-3}\Bigg|_{4+\varepsilon_1}^{5} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{(4-\varepsilon-4)^{-3}}{-3}-\frac{(1-4)^{-3}}{-3}\right]+$$

$$\lim_{\varepsilon_1\to 0}\left[\frac{(5-4)^{-3}}{-3}-\frac{(4+\varepsilon_1-4)^{-3}}{-3}\right]=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{3\varepsilon^3}-\frac{1}{3^4}\right]+\lim_{\varepsilon_1\to 0}\left[-\frac{1}{3}+\frac{1}{3\varepsilon_1^3}\right]=\infty+\infty.$$

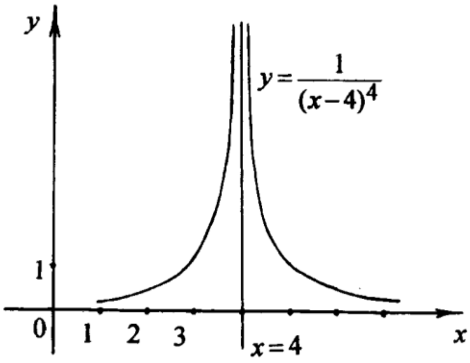

рис. 1

Так как оба предела стремятся к бесконечности, то они не существуют и поэтому, несобственный интеграл расходится (рис. 1).

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Пример 3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x+y=5$, $y=\frac{4}{x}$

Решение. Первое уравнение определяет на плоскости прямую линию, второе – гиперболу (рис. 2).

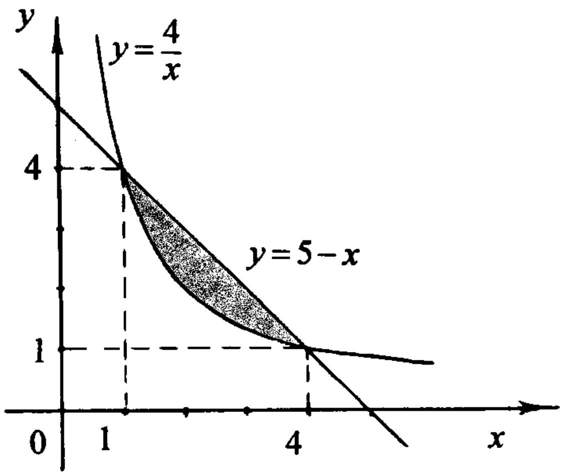

рис. 2

Найдем их точки пересечения

$$\begin{cases} x+y=5 \\ y=\dfrac{4}{x} \end{cases} \Rightarrow x+\frac{4}{x}=5;\ x^2-5x+4=0 \Rightarrow x_1=1,\ x_2=4;\ y_1=4,\ y_2=1$$

$$S=\int_1^4(5-x)dx-\int_1^4\frac{4}{x}dx=\left(5x-\frac{x^2}{2}-4\ln x\right)\Bigg|_1^4=(20-8-4\ln 4)-$$

$$-\left(5-\frac{1}{2}-4\ln 1\right)=7.5-4\ln 4\approx 7.5-4\cdot 1.39=1.94$$

Пример 4. Вычислить площадь области, ограниченной кривой, уравнение

которой в полярной системе координат имеет вид $r = 3\cos 2\varphi$, $r \geq 0, 0^o \leq \varphi \leq 360^o$
Решение.

Для построения кривой составим таблицу значений функции.

Таблица 2

φ,°C	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180
r	3	2,55	1,5	0	-	-	-	-	-	0	1,5	2,55	3

Для $180° \leq \varphi \leq 360°$ значения r будут повторяться в силу периодичности функции $\cos x$. Строим кривую по точкам (нижняя часть кривой симметрично достраивается) (рис. 3).

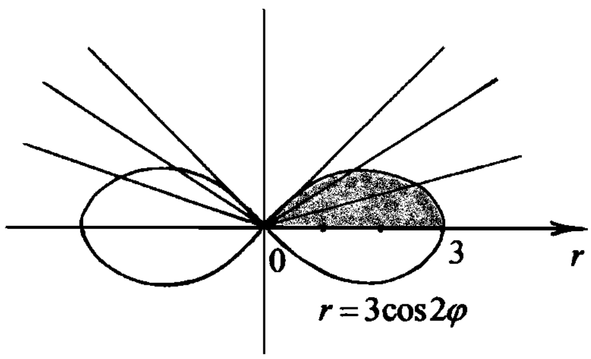

рис. 3

Заметим, что построенная фигура состоит из четырех равных частей, поэтому

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} r^2 d\varphi = 2\int_0^{\pi/4} 9\cos^2 2\varphi d\varphi = 18\int_0^{\pi/4} \frac{1+\cos 4\varphi}{2} d\varphi = 9\left(\varphi + \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{9\pi}{4} \text{ (кв.ед.)}$$

Исследование рядов на сходимость

Пример 5.

Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

Решение. Применим признак Даламбера: $a_n = \frac{2^n}{n!}, a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)}$

$$p = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{2^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n!(n+1)} . \frac{2^{n+1}}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0$$

Так как $p = 0 < 1$, то ряд сходится.

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9n^2 - 4}{5n^2 + 3}\right)^n$

Решение. Применим признак Коши:

$$p=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{9n^2-4}{5n^2+3}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{9n^2-4}{5n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{9-\frac{4}{n^2}}{5+\frac{3}{n^2}}=\frac{9}{5}$$

Так как $p=\frac{9}{5}>1$, то ряд расходится.

Пример 7.

Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

Решение.

Применим интегральный признак. Для этого рассмотрим несобственный интеграл.

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}=\left\rangle\begin{matrix} u=\ln x & T.к.\, x=1,\Rightarrow u=0 \\ du=\frac{1}{x}dx & T.к.\, x=b,\Rightarrow u=\ln b\end{matrix}\right\langle=\lim_{b\to\infty}\int_0^{\ln b}\frac{du}{\sqrt{u}}=\lim_{b\to\infty}2u^{\frac{1}{2}}\Big|_0^{\ln b}=\lim_{b\to\infty}\left(2\sqrt{\ln b}-0\right)=\infty$$

Так как соответствующий интеграл расходится, то расходится и ряд.

Примечание. При нахождении предела в задачах 1-30 часто встречаются 1-ый и 2-ой замечательные пределы:

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$, а также $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

Пример 8.

Найдите область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{4^n}{\sqrt{n^4-1}}(x-2)^n$

Решение.

Найдем радиус сходимости:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{4^n}{\sqrt{n^4-1}}:\frac{4^{n+1}}{\sqrt{(n+1)^4-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4^n}{4^{n+1}}\cdot\sqrt{\frac{(n+1)^4-1}{n^4-1}}\right)=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{(1+\frac{1}{n})^4-\frac{1}{n^4}}{1-\frac{1}{n^4}}}=\frac{1}{4}$$

. Следовательно, интервал сходимости:

$\left(2-\frac{1}{4};2+\frac{1}{4}\right)$ или $\left(\frac{7}{4};\frac{9}{4}\right)$.

Исследуем сходимость на концах интервала:

$$1)\ x=\frac{9}{4};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{\sqrt{n^4-1}}\left(\frac{9}{4}-2\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^4-1}}. \qquad (1)$$

Для исследования ряда (1) применим предельный признак сравнения с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Проверим выполнение признака:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^4-1}}:\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^4}{n^4-1}}=1.$$

Так как предел конечный и отличный от нуля, то ряд (1) сходится, так как сходится при s =2 > 1 гармонический ряд.

2) $x=\frac{7}{4};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{\sqrt{n^4-1}}\left(\frac{7}{4}-2\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^4-1}}$. (2)

Применим к исследованию знакочередующегося ряда (2) признак Лейбница.

Так как абсолютные величины ряда (2) монотонно убывают и

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^4-1}}=0,$$

то по признаку сходимости Лейбница данный ряд сходится.

Ответ: область сходимости $\left[\frac{7}{4};\frac{9}{4}\right]$.