**курс лекций:  
метрология и Информационно-измерительная техника (МиИИТ)**

**2021 осень**

**тема 1. Основы метрологии**

**…**

**[ФРАГМЕНТ ЛЕКЦИИ]**

*Косвенное измерения* (КИ) это измерение, результат которого получают с использованием известной зависимости физической величины (функции) от нескольких других, значения которых могут быть получены **прямыми измерениями**.

Простейшие типовые примеры представлены на рисунке 1.1.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | |  |  |
| Пример 1 | Пример 2 | Пример 3 | Пример 4 |
| *R*=*UV*/*IA* | *PR*=*UV*·*IA* | *PR*=*R*·*IA*2 | *PR*= *UV*2*/R* |

Рисунок 1.1 – Примеры косвенных измерений

**…**

**1.2 Вычисление погрешностей косвенных измерений. Краткая теория**

Для вычисления погрешности КИ мы располагаем известной функциональной зависимостью результата *Y* от аргументов – результатов прямых измерений *Х*1, *Х*2,…, *Хn*:

*Y* = *f* (*Х*1, *Х*2, … *Хn*)

Требуется найти погрешность Δ*Y*, возникающую от погрешностей   
Δ*Х*1, Δ*Х*2,… Δ*Хn*.

Упростим обозначения: Δ*Y* = Δ; Δ*Х*1 = Δ1; Δ*Х*2 = Δ2; … Δ*Хn* = Δ*n*.

Для решения нашей задачи в математике имеет место т.н. «формула полного дифференциала»:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.1) |

Если мы используем при расчёте погрешности **метод наихудшего случая** (МНС), то предельное значение Δп в свёрнутой форме:

|  |  |
| --- | --- |
| *Р* = 1. | (1.2) |

Примечание – Погрешности ∆i в проведённом эксперименте могут иметь как положительное значение, так и отрицательное. Эти знаки могут меняться от эксперимента к эксперименту. Используя МНС, мы выбираем наихудшие сочетания знаков: или все «плюс» или все «минус».

**Два частных случая** позволяют формализовать решение практических задач по расчёту погрешностей КИ.

**Частный случай 1.**

***Y* = a1*X*1 + a2*X*2 +...+a*nXn* =** ,

т.е. ***Y*** – линейная функция аргументов ***Х*1, *Х*2,…, *Хn***.

Воспользуемся выражениями (1.1 и 1.2):

, следовательно,

и

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.3) |

**Примеры:**

а) *Y* = *X*1 + *X*2; *Р* = 1.

Здесь *a*1 = *а*2 = 1, тогда: Δ = 1⋅Δ1 + 1⋅Δ2;

Для МНС: Δп = ± (|1⋅Δ1,п| + |1⋅Δ2,п|);

б) *Y* = *X*1 – *X*2; *Р* = 1.

Здесь *a*1 = 1; *а*2 = – 1, тогда: Δ = Δ1 – Δ2;

Δп = ± (|1⋅Δ1,п| + |1⋅Δ2,п|);

**Полезный вывод: Δп для суммы и разности аргументов одинаковы.**

**Частный случай 2.**

***Y* = *X*1a1·*X*2a2· *…* ·*Xnan***,

где *а1*; *а2*;…*аn* – действительные числа, положительные или отрицательные, целые или дробные.

**Пример:** *Y* = здесь *а1* = 2; *а2* = – 0,5.

Частные производные:

=;

=

……………………………………….

=

Далее:

=Y;

=……..;

……………………….

=……..;

Следовательно,

Δ = *Y*(a1δ1 + a2δ2 + ...+ a*n*δ*n*);

δ = .

Предельное значение:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.4) |

**Забыли выкладки и используем только окончательное выражение (1.4)**

**Примеры:**

а) *Y* = *X*1*X*2; *P* =1.

Здесь: *а1* = *а2* = 1, тогда δ = 1⋅δ1 + 1⋅δ2;

Для МНС имеем: δп = ± (|1⋅δ1.п| + |1⋅δ2.п|);

б) *Y* =  *P* =1

Здесь: *а1* = 1; *a2* = – 1, тогда δ = 1⋅δ1 – 1⋅δ2;

Для МНС имеем: δп = ± (|1⋅δ1.п| + |1⋅δ2.п|).

**Полезный вывод: δп для произведения и частного при *Р*=1 одинаковы.**

Объединяя наши четыре примера, можно сделать следующие выводы:

*для суммы и разности надо* ***суммировать*** *предельные значения абсолютных погрешностей аргументов, для произведения и частного – предельные значения относительных погрешностей аргументов.*

**Несложный комплексный пример расчёта результата КИ.**

Рассмотрим для примера несложную абстрактную функцию   
Y = , где Хi – величины, значения которых известны с погрешностями ∆i.п\*):

Х1 = Х1±∆1.п

Х2 = Х2±∆2.п

Х3 = Х3±∆3.п

Х4 = Х4±∆4.п

Примечание – В общем случае Хi либо результаты **прямых измерений**, либо величины с нормированными значениями погрешностей, например, мера электрического сопротивления с известным допуском.

Проведём расчёт погрешности косвенного измерения функции Y в соответствии с выражениями (1.3) и (1.4).

Исходное выражение для погрешности функции запишем на основании (1.4):

δу=δ1.п+δ2.п+δ(3+4).п= ∆1.п/Х1+∆2.п/Х2+ δ(3+4).п

здесь использовано обозначение δ(3+4).п≡ (∆3.п+∆4.п)/(Х3-Х4)

Окончательно имеем:

∆у.п=[∆1.п/Х1+∆2.п/Х2+(∆3.п+∆4.п)/(Х3-Х4)] Х2/Х1(Х3-Х4)

Осталось подставить значения и произвести расчёт.

**1.3 Решение типовых задач**

**Задание 1**

Сопротивление резистора *R* измеряется с помощью миллиамперметра и вольтметра по схеме, представленной на рис. 1.2.

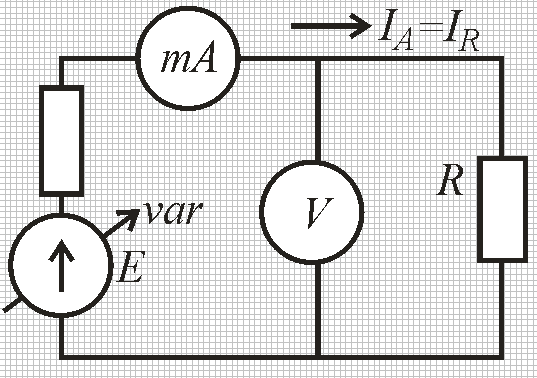


Рисунок 1.2 – Схема косвенного измерения сопротивления постоянному току

Примечания

1 При реализации этой несложной схемы эксперимента следует помнить, что при протекании тока резистор нагревается в соответствии с законом Джоуля-Ленца. Выбирая режимы эксперимента, необходимо соблюдать условие: *PR* ≤ *PR*ном/10, где *PR*ном – номинальная мощность рассеивания резистора, которая записывается в его паспорте. В этом случае саморазогрев резистора хотя и приведёт к изменению его сопротивления, но изменение это не превысит заявленной погрешности его изготовления – допуска. Например, резистор типа С2-29 имеет паспортную мощность 1 Вт, номинальное сопротивление *R*ном = 10,0 кОм, производственный допуск ∆пр=±1,0 %, допустимая рассеиваемая мощность 100 мВт.

2 На практике изменяя *R*вых, следует добиваться, чтобы один из приборов – амперметр или вольтметр – как получится, измерение осуществлял ближе к концу шкалы, тогда точность результата будет оптимизирована. Вывод: лучше, если в эксперименте будут использованы многопредельные приборы.

Известны результаты измерений напряжения и тока:

- результат прямого измерения напряжения *UV* ≡ *UR* =(10,030±0,050) В; *Р*=1;

- результат прямого измерения силы тока *IA* ≡ *IR* =(1,000±0,025) мА; *Р*=1.

Внутренние сопротивления измерительных приборов как у идеальных:

у амперметра – ноль, у вольтметра – бесконечность.

Требуется записать результат косвенного измерения *R*.

Рассчитаем (косвенно измерим) значение сопротивления *R*:

*R*изм*≡ R*=*UR*/*IR* = 10,030 В/1,000 мА = 10,03 кОм

Далее рассчитаем погрешность полученного результата.

В соответствии с (1.4) легко рассчитать относительную погрешность результата δп:

δп = δV.п + δA.п = ± (0,050 /10,030 + 0,025/1,00) = ± (0,00499+0,025) ≈ ± 0,030

Теперь рассчитаем предельное значение погрешности результата в абсолютной форме:

Δп = δп·*R* = 10,03 кОм × 0,030 = ±0,30 кОм

**Окончательно** запишем результат измерения, как мы это привыкли делать:

*R*=(10,03±0,30) кОм; *Р* = 1 (1.5)

**Задание 2**

Как изменится результат косвенного измерения, полученный в задании 1, если стало известно, что внутреннее сопротивление вольтметра имеет значение, равное *RV =* 100 кОм±1%.?

**Решение.**

Ток, измеряемый миллиамперметром *I*A, является суммой двух токов: один протекает через измеряемый резистор *I*R (объект), а второй – через вольтметр *I*V (инструмент). Это показано на рис. 1.3. Второй ток вносит погрешность в измерение. Фактически используемая схема реализует **косвенное измерение** сопротивления **параллельно включённых** резистора *R* и входного сопротивления вольтметра *RV*.

Примечание – Такие погрешности принято относить к погрешностям взаимодействия: взаимодействует инструмент (вольтметр) с объектом (резистором).

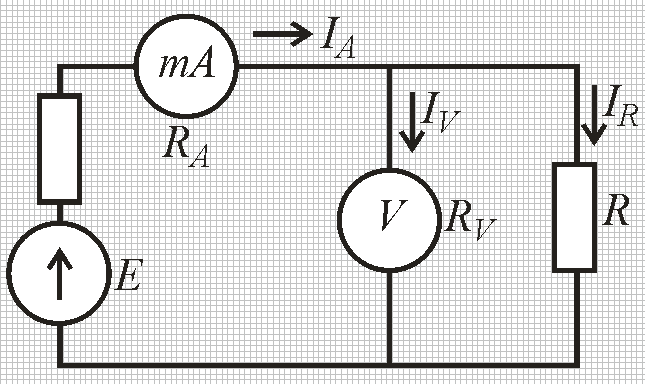


Рисунок 1.3 – Иллюстрация возникновения погрешности взаимодействия при косвенных измерениях сопротивления постоянному току

Следуя высказанному наблюдению, делаем вывод, что в задании 1 мы измерили значение параллельно включённых *R* и *RV*:

*R*изм = (*R·RV*)/(*R+RV*) *=* (10,03±0,30) кОм. (1.6)

Здесь погрешность чисто инструментальная: обусловлена метрологическими характеристиками использованных приборов.

Однако нам необходимо рассчитать (косвенно измерить) значение *R,* которое выведем из (1.6):

*R=*(*RV·R*изм)/(*RV-R*изм)=11,15 кОм.

Рассчитаем погрешность.

В соответствии с (1.4) имеем: δR.п= δRV.п+ δRизм.п+ δ(RV+Rизм).п, где

δ(RV+Rизм).п=(∆RV.п+∆Rизм.п)/(*RV-R*изм)=(1+0,30)/(100-10,03)=0,0144, тогда:

δR.п =0,01+0,30+0,0144=0,32→∆R.п=*R*⋅δR.п=11,15⋅0,32=3,57 кОм.

Окончательно запишем результат:

*R*=(11,2±3,6) кОм; Р=1 (1.7)

**Задание 3**

Как изменится результат косвенного измерения *R*, полученный в   
задании 1, если измерения были проведены по альтернативной схеме, представленной на рис. 1.4? Известно значение входного сопротивления миллиамперметра *RА*=1,00 кОм±1,0%=1,00±0,01 кОм.

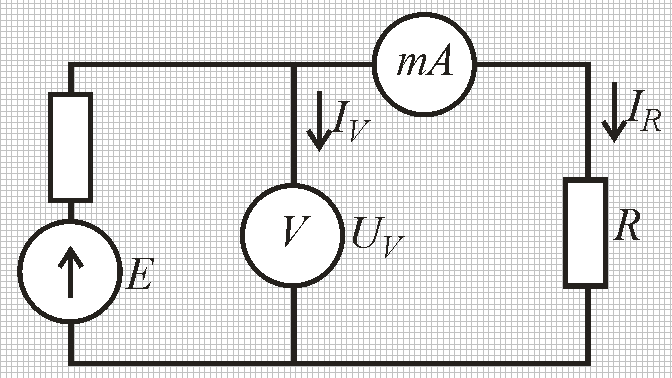


Рисунок 1.4 – Альтернативная схема косвенного измерения сопротивления R

Заметим, что в данной схеме косвенно измеряется сопротивление последовательно включённых резистора *R* и резистора *RА* (входное сопротивление миллиамперметра):

*Rизм*=*R*+*RА* = (10,03±0,30) кОм. (1.8)

Откуда следует, что

*R* = *Rизм* *- RА* = (10,03±0,30) кОм *–* (1,00 ±0,01) кОм = {закончить самостоятельно}.

**Самостоятельно сформулировать** критерий выбора одной из двух схем измерения *R* (рис. 1.3 или 1.4), если известны *RА* и *RV.*