

Лабораторная работа № 3.

Разработка и исследование нелинейной математической модели динамического процесса

Цель работы: практическое применение знаний в области математики и физики при создании и исследовании нелинейных математических моделей процессов различной природы.

Задача: разработать нелинейную математическую модель заданного процесса, провести её линеаризацию и исследование.

Этапы работы:

1. Изучить необходимый теоретический материал.
2. Изучить рассматриваемый динамический процесс.
3. Разработать математическую модель изучаемого процесса и оценить принципиальную возможность аналитического решения полученного уравнения динамики.
4. Определить значения параметров процесса, соответствующие установившемуся режиму.
5. Линеаризовать полученную математическую модель в окрестностях установившегося режима.
6. Найти аналитическое решение линеаризованного уравнения динамики при некотором сочетании параметров.
7. Найти численное решение уравнения динамики в окрестностях установившегося режима.
8. Сравнить между собой результаты п. 7 и п. 8 при различных величинах отклонений от установившегося режима.
9. Оформить отчет по лабораторной работе.

Отчет о работе должен содержать:

1. Описание исследуемого динамического процесса с его графической иллюстрацией.
2. Нелинейную математическую модель изучаемого процесса.
3. Условия установившегося режима.
4. Процедуру линеаризации полученной модели.

5. Аналитическое решение линейного уравнения динамики.
6. Численное решение нелинейного уравнения динамики.
7. Сравнение результатов, полученных для линейной и нелинейной модели, при различных отклонениях от установившегося режима.
8. Выводы и заключения по лабораторной работе.

Варианты заданий.

Провести математическое моделирование следующих динамических процессов:

1. Движение груза малого размера, соединенного невесомым недеформируемым стержнем с неподвижной точкой подвеса.
2. Движение однородного недеформируемого стержня, один из концов которого соединен с неподвижной точкой подвеса.
3. Движение груза малого размера по внутренней поверхности идеально гладкого положенного на бок цилиндра.
4. Движение груза малого размера, соединенного невесомым недеформируемым стержнем с неподвижной точкой подвеса, при условии, что вся конструкция помещена в сосуд с жидкостью.
5. Движение однородного недеформируемого стержня, один из концов которого соединен с неподвижной точкой подвеса, при условии, что вся конструкция помещена в сосуд с жидкостью.
6. Движение груза малого размера, соединенного невесомым недеформируемым стержнем с неподвижной точкой подвеса, при наличии постоянного бокового ветра.
7. Движение однородного недеформируемого стержня, один из концов которого соединен с неподвижной точкой подвеса, при наличии постоянного бокового ветра.
8. Движение груза малого размера, соединенного невесомым недеформируемым стержнем с неподвижной точкой подвеса и идеальным упругим элементом – с одной из точек неподвижного основания.
9. Движение однородного недеформируемого стержня, один из концов которого соединен с неподвижной точкой подвеса, а второй при

помощи идеального упругого элемента – с одной из точек неподвижного основания.

10. Движение груза малого размера, соединенного невесомым недеформируемым стержнем с неподвижной точкой подвеса и идеальным упругим элементом – с одной из точек неподвижной вертикальной стенки.

11. Движение однородного недеформируемого стержня, один из концов которого соединен с неподвижной точкой подвеса, а второй при помощи идеального упругого элемента – с одной из точек неподвижной вертикальной стенки.

12. Движение груза малого размера, соединенного невесомым недеформируемым стержнем с неподвижной точкой подвеса, при условии, что груз имеет отрицательный электрический заряд, а вся конструкция помещена между обкладками плоского заряженного конденсатора (пластина с отрицательным зарядом располагается внизу).

13. Движение груза малого размера, соединенного невесомым недеформируемым стержнем с неподвижной точкой подвеса, при условии, что груз имеет отрицательный электрический заряд, а вся конструкция помещена между обкладками плоского заряженного конденсатора (пластина с отрицательным зарядом располагается сверху).

14. Движение груза малого размера, соединенного невесомым недеформируемым стержнем с неподвижной точкой подвеса, при условии, что груз имеет отрицательный электрический заряд, а строго под точкой подвеса располагается отрицательно заряженное тело малых размеров.

15. Движение груза малого размера, соединенного невесомым недеформируемым стержнем с неподвижной точкой подвеса, при условии, что груз имеет отрицательный электрический заряд, а строго под точкой подвеса располагается положительно заряженное тело малых размеров.

16. Движение однородного по массе тела сферической формы и малой плотности, погруженного в воду (плотность тела меньше плотности воды).
17. Движение однородного по массе тела конической формы и малой плотности, погруженного в воду (плотность тела меньше плотности воды).
18. Движение однородного по массе тела сферической формы и малой плотности, погруженного в воду (плотность тела меньше плотности воды), соединенного идеальным упругим элементом с неподвижной точкой подвеса (центра масс тела располагается точно под точкой подвеса).
19. Движение однородного по массе тела конической формы и малой плотности, погруженного в воду (плотность тела меньше плотности воды), соединенного идеальным упругим элементом с неподвижной точкой подвеса (центра масс тела располагается точно под точкой подвеса).
20. Движение в вертикальной плоскости груза, подвешенного на пружине, при условии, что груз имеет отрицательный электрический заряд, а строго под точкой подвеса располагается отрицательно заряженное тело малых размеров.
21. Движение в вертикальной плоскости груза, подвешенного на пружине, при условии, что груз имеет отрицательный электрический заряд, а строго под точкой подвеса располагается положительно заряженное тело малых размеров.
22. Вытекание жидкости из отверстия в нижней части резервуара конической формы, в который сверху наливается вода с постоянным объёмным расходом.
23. Вытекание жидкости из отверстия в нижней части резервуара сферической формы, в который сверху наливается вода с постоянным объёмным расходом.
24. Движение рамки с протекающим по ней постоянным током в постоянном магнитном поле (учитывать крутильную жесткость проводов).

25. Движение поршня, закрывающего сверху газ в сосуде (процесс считать изотермическим).
26. Движение поршня, закрывающего снизу разреженный газ в сосуде (процесс считать изотермическим).
27. Вращение колеса, ось которого жестко закреплена, а одна из точек обода соединена идеальной пружиной с неподвижным основанием.
28. Движение в горизонтальной плоскости груза малого размера, способного перемещаться только в радиальном направлении и соединенного пружиной с осью вращения.
29. Изменение температуры резистора, подключенного к источнику постоянного напряжения и помещенного в вакуумную колбу (учитывать потери тепла за счёт излучения).
30. Подъём воздушного шара постоянного объёма и массы с учётом переменной плотности воздуха.

Теоретическая справка

Как показывает практика, лишь в очень редких случаях реальные объекты или процессы могут быть описаны линейными дифференциальными уравнениями. Как правило, такие уравнения получаются при описании либо очень простых объектов, либо в случае предельного упрощения рассматриваемых сложных объектов. Гораздо чаще в процессе математического моделирования используются нелинейные дифференциальные уравнения.

Нелинейной называется такая математическая модель, в которой для описания динамики изучаемого объекта, процесса или явления используются нелинейные дифференциальные уравнения. Примерами нелинейных моделей являются зависимости, описывающие кулоновское трение, зону нечувствительности (люфт), гистерезис и т. д.

Существуют различные способы классификации нелинейностей: статические и динамические, непрерывные и имеющие разрывы, стационарные и нестационарные, однозначные и неоднозначные и т. д.

Нестационарной называется такая математическая модель, в которой коэффициенты уравнения динамики изучаемого объекта,

процесса или явления изменяются с течением времени. В качестве примера нестационарных моделей можно привести движение тела переменной массы (полёт ракеты), процессы старения и износа конструкций, процессы разрушения материалов с течением времени и т. д.

Считается, что наиболее полно и точно объект, процесс или явление можно описать с помощью нелинейных нестационарных моделей. Однако, работа с такими моделями весьма сложна и чаще всего может проводиться только численными методами (аналитическое решение математической задачи получить, как правило, не представляется возможным). Поэтому для удобства исследования и практического использования сложные модели стараются упростить, используя процедуру линеаризации.

Линеаризацией называют процесс сведения нелинейного уравнения к линейному, описывающему поведение объекта в некоторой окрестности установившегося режима.

Установившимся называется такой режим, при котором интересующая нас выходная величина не изменяется с течением времени.

Полученные в ходе линеаризации уравнения называются линеаризованной математической моделью. Они достаточно хорошо описывают поведение изучаемого объекта, процесса или явления в окрестностях установившегося режима, но могут давать неточные или некорректные результаты при больших отклонениях от него.

Существуют различные методы линеаризации. Рассмотрим 2 метода линеаризации, наиболее широко используемых на практике.

Первый метод линеаризации. Если нелинейная функция, входящая в уравнение математической модели, является аналитической в некоторой области, то её можно разложить в ряд Тейлора.

Пусть, например, нелинейное дифференциальное уравнение динамики объекта имеет вид:

$$\dot{y} = f(u, y).$$

Здесь y – интересующая нас выходная величина, \dot{y} – её производная по времени, u – некоторое внешнее воздействие.

Будем полагать, что существует некоторый установившийся режим (u_0, y_0) , такой что $f(u_0, y_0) = 0$.

Разложим правую часть уравнения динамики в ряд Тейлора в окрестностях установившегося режима:

$$f(u, y) = f(u_0, y_0) + \left. \frac{df}{du} \right|_{u_0, y_0} \Delta u + \left. \frac{df}{dy} \right|_{u_0, y_0} \Delta y + R_n.$$

Здесь $\Delta u = u - u_0$, $\Delta y = y - y_0$ – отклонения от установившегося режима, R_n – остаточный член.

Считая величину приращения малой, можно отбросить остаточный член. Кроме того, согласно принятому ранее допущению $f(u_0, y_0) = 0$. Тогда линеаризованное уравнение динамики можно записать следующим образом:

$$\frac{d(\Delta y)}{dt} = \left. \frac{df}{du} \right|_{u_0, y_0} \Delta u + \left. \frac{df}{dy} \right|_{u_0, y_0} \Delta y.$$

Таким образом, мы получили линейное дифференциальное уравнение, которое можно исследовать аналитическими методами.

Следует отметить, что в процессе линеаризации произошел переход к новой переменной – вместо абсолютного значения выходной величины мы рассматриваем закон её отклонения от установившегося значения.

Второй метод линеаризации. Пусть, как и в предыдущем случае, нелинейное дифференциальное уравнение динамики объекта имеет вид:

$$\dot{y} = f(u, y).$$

В исходном нелинейном уравнении заменим значения переменных величин следующими выражениями:

$$\begin{cases} y = y_0 + \Delta y ; \\ u = u_0 + \Delta u . \end{cases}$$

После этого получим:

$$\frac{d}{dt}(y_0 + \Delta y) = f(u_0 + \Delta u, y_0 + \Delta y).$$

В результате выполнения эквивалентных преобразований, в правой части уравнения динамики можно будет выделить 3 группы слагаемых: не содержащие приращение Δy или Δu , содержащие приращение Δy или Δu в виде простого множителя, содержащие некоторые степени приращения Δy или Δu . Полагая приращение малым, слагаемые третьей группы можно отбросить. При этом слагаемые первой группы будут описывать опорное движение объекта, а слагаемые второй группы – движение в отклонениях от опорной траектории.

Линеаризованная модель описывает поведение объекта лишь в малой окрестности установившегося режима (в малых отклонениях от опорной траектории). При больших отклонениях линеаризованная модель, как правило, становится неадекватной. Для корректного использования линеаризованной модели необходимо проводить оценку величины остаточного члена.

Линеаризованная модель всегда менее точна, чем нелинейная модель. Поэтому результаты, полученные для линеаризованной модели, лишь с некоторыми допущениями могут быть использованы при исследовании нелинейной модели.

Пример

Требуется провести математическое моделирование движения колеса, вращающегося вокруг своей оси в вертикальной плоскости при условии, что на его ободе жестко закреплён груз малых размеров.

Будем полагать, что масса ступиц пренебрежимо мала, а момент трения на валу пропорционален скорости вращения. Графическая иллюстрация описываемого процесса представлена на рисунке 3.1.

Получение нелинейного уравнения динамики. Составим для рассматриваемого колеса с грузом уравнение движения, воспользовавшись вторым законом Ньютона:

$$(J + mR^2) \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -M_{TP} - M_T .$$

Здесь J – момент инерции колеса без учёта груза, m – масса груза, R – радиус колеса, α – угол отклонения груза от вертикали, $M_{тр}$ – момент сил трения на оси колеса, M_T – момент силы тяжести.

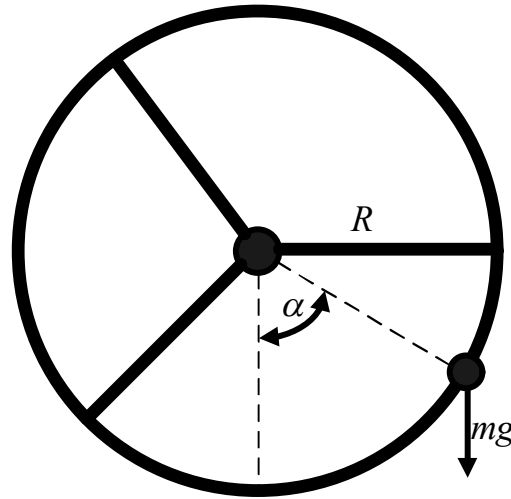


Рисунок 3.1 – Графическая иллюстрация динамического процесса

Начальные условия примут вид:

$$\begin{cases} \alpha(0) = \alpha_0; \\ \dot{\alpha}(0) = \omega_0. \end{cases}$$

Учитывая сделанные ранее предположения, преобразуем уравнение динамики:

$$(J + mR^2) \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -k \frac{d\alpha}{dt} - mgR \sin \alpha .$$

Здесь k – коэффициент трения.

Проведя эквивалентные преобразования, получим уравнение движения колеса:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{k}{J + mR^2} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{mgR}{J + mR^2} \sin \alpha = 0 .$$

Несмотря на кажущуюся простоту, это нелинейное дифференциальное уравнение, решение которого может быть получено только численными методами.

Определение установившегося режима. Если интересующие нас параметры динамического объекта, процесса или явления не изменяются с течением времени, то говорят, что имеет место

установившийся режим. Чтобы найти условия установившегося режима, все производные выходной величины приравнивают к нулю.

В нашем случае примем угловую скорость и угловое ускорение равными нулю:

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0, \frac{d^2\alpha}{dt^2} = 0 \Rightarrow \frac{mgR}{J + mR^2} \sin \alpha_0 = 0.$$

Откуда $\alpha_0 = 0$ (формально условие выполняется и при $\alpha_0 = 180^\circ$, но при этом малейшее отклонение от вертикали вызовет переворот конструкции – имеет место ситуация так называемого неустойчивого равновесия).

Линеаризация уравнения динамики. Для получения линеаризованной модели движения колеса разложим функцию $\sin \alpha$ в ряд Тейлора в окрестностях точки α_0 :

$$\sin \alpha = \Delta\alpha - \frac{(\Delta\alpha)^3}{3!} + \frac{(\Delta\alpha)^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\Delta\alpha)^{2n+1}.$$

Здесь обозначено $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0$. В нашем случае, так как установившееся значение угла равно нулю, $\Delta\alpha = \alpha$. Но так бывает далеко не всегда.

Полагая члены ряда степени выше первой пренебрежимо малыми, получим: $\sin \alpha \approx \Delta\alpha$.

Тогда линеаризованное уравнение динамики будет иметь вид:

$$\frac{d^2(\Delta\alpha)}{dt^2} + \frac{k}{J + mR^2} \frac{d(\Delta\alpha)}{dt} + \frac{mgR}{J + mR^2} (\Delta\alpha) = 0.$$

Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка, общее решение которого может иметь различный вид в зависимости от соотношения коэффициентов. Рассмотрим все возможные варианты.

1. Если $\left(\frac{k}{J + mR^2}\right)^2 - 4\frac{mgR}{J + mR^2} > 0$, то характеристическое

уравнение имеет два различных действительных корня, а общее решение дифференциального уравнения определяется выражением:

$$\Delta\alpha = C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t}.$$

Здесь C_1 и C_2 – константы интегрирования, определяемые из начальных условий, а параметры λ_1 и λ_2 задаются выражениями:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2} \frac{k}{J + mR^2} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{k}{J + mR^2}\right)^2 - 4 \frac{mgR}{J + mR^2}}; \\ \lambda_2 = \frac{1}{2} \frac{k}{J + mR^2} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{k}{J + mR^2}\right)^2 - 4 \frac{mgR}{J + mR^2}}. \end{cases}$$

При заданных значениях угла отклонения $\Delta\alpha_0$ и скорости его изменения ω_0 в начальный момент времени, можно определить константы интегрирования:

$$\begin{cases} \Delta\alpha_0 = C_1 + C_2; \\ \omega_0 = -\lambda_1 C_1 - \lambda_2 C_2. \end{cases}$$

Решив полученную систему, найдём искомые значения:

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{\omega_0 + \lambda_2 \Delta\alpha_0}{\lambda_1 - \lambda_2}; \\ C_2 = \frac{\omega_0 + \lambda_1 \Delta\alpha_0}{\lambda_1 - \lambda_2}. \end{cases}$$

2. Если $\left(\frac{k}{J + mR^2}\right)^2 - 4 \frac{mgR}{J + mR^2} = 0$, то характеристическое

уравнение имеет два одинаковых действительных корня, а общее решение дифференциального уравнения определяется выражением:

$$\Delta\alpha = C_1 e^{-\lambda t} + C_2 t e^{-\lambda t}.$$

Здесь C_1 и C_2 – константы интегрирования, определяемые из начальных условий, а параметр λ задаётся выражением:

$$\lambda = \frac{1}{2} \frac{k}{J + mR^2}.$$

Определим константы интегрирования из начальных условий:

$$\begin{cases} \Delta\alpha_0 = C_1; \\ \omega_0 = -\lambda C_1 + C_2. \end{cases}$$

Решив полученную систему, найдём искомые значения:

$$\begin{cases} C_1 = \Delta\alpha_0 ; \\ C_2 = \omega_0 + \lambda\Delta\alpha_0 . \end{cases}$$

3. Если $\left(\frac{k}{J+mR^2}\right)^2 - 4\frac{mgR}{J+mR^2} < 0$, то характеристическое

уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня, а общее решение дифференциального уравнения определяется выражением:

$$\Delta\alpha = e^{-\beta t} (C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)).$$

Здесь C_1 и C_2 – константы интегрирования, определяемые из начальных условий, а параметры β и ω задаются выражениями:

$$\begin{cases} \beta = \frac{1}{2} \frac{k}{J+mR^2} ; \\ \omega = \sqrt{\frac{mgR}{J+mR^2} - \beta^2} . \end{cases}$$

Определим константы интегрирования из начальных условий:

$$\begin{cases} \Delta\alpha_0 = C_2 ; \\ \omega_0 = -\beta C_2 + \omega C_1 . \end{cases}$$

Решив полученную систему, найдём искомые значения:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{\omega_0 + \beta\Delta\alpha_0}{\omega} ; \\ C_2 = \Delta\alpha_0 . \end{cases}$$

Найденные аналитические решения задачи в различных случаях позволяют качественно оценить динамику изучаемого процесса. Так, например, если коэффициент сопротивления относительно велик, то движение колеса с грузом будет представлять собой асимптотическое перемещение в положение равновесия. Если же коэффициент сопротивления сравнительно мал, то движение колеса с грузом будет представлять собой затухающие гармонические колебания вокруг положения равновесия. Как видно, все полученные результаты хорошо согласуются с известными экспериментальными данными и общим физическим смыслом рассматриваемой задачи.

Сравнительный анализ нелинейной и линеаризованной модели. Зададим конкретные числовые значения параметров и рассмотрим поведение исходной нелинейной и линеаризованной модели при различных начальных условиях. Пусть, например, $J = 5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $m = 2 \text{ кг}$; $R = 0,5 \text{ м}$; $k = 2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}$; $\alpha_0 = \pi/18$; $\omega_0 = 0 \text{ рад/с}$.

В этом случае нелинейное уравнение динамики будет иметь вид:

$$\ddot{\alpha} + 0,3636\dot{\alpha} + 1,7836 \sin \alpha = 0.$$

Решение этого дифференциального уравнения может быть получено только численными методами. Сведём полученное уравнение высокого порядка к системе уравнений первого порядка, для чего введём обозначение $\omega = \dot{\alpha}$. Получим:

$$\begin{cases} \dot{\omega} + 0,3636\omega + 1,7836 \sin \alpha = 0; \\ \dot{\alpha} = \omega. \end{cases}$$

Заменяем производную функции конечной разностью:

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{y(i+1) - y(i)}{h}.$$

Тогда расчётные формулы численного решения будут иметь вид:

$$\begin{cases} \omega(i+1) = \omega(i) - h(0,3636\omega(i) + 1,7836 \sin \alpha(i)); & \omega(0) = 0; \\ \alpha(i+1) = \alpha(i) + h\omega(i); & \alpha(0) = \pi/18. \end{cases}$$

Здесь h – шаг интегрирования.

Линеаризованное уравнение динамики запишется следующим образом:

$$\Delta \ddot{\alpha} + 0,3636\Delta \dot{\alpha} + 1,7836\Delta \alpha = 0.$$

Его аналитическое решение может быть легко найдено по известным формулам. Так как корни характеристического уравнения в этом случае будут комплексно-сопряженными, то общее решение будет иметь вид:

$$\Delta \alpha = e^{-0,1818t} (C_1 \sin(1,3231t) + C_2 \cos(1,3231t)).$$

Учитывая заданные начальные условия, получим расчётную формулу:

$$\Delta \alpha = e^{-0,1818t} (0,0240 \sin(1,3231t) + 0,1745 \cos(1,3231t)).$$

Графики аналитического и численного решений при $h = 0,01$ представлены на рисунке 3.2. Видно, что они практически совпадают, т. е. аналитическое решение линеаризованного уравнения почти не отличается от численного решения нелинейного уравнения.

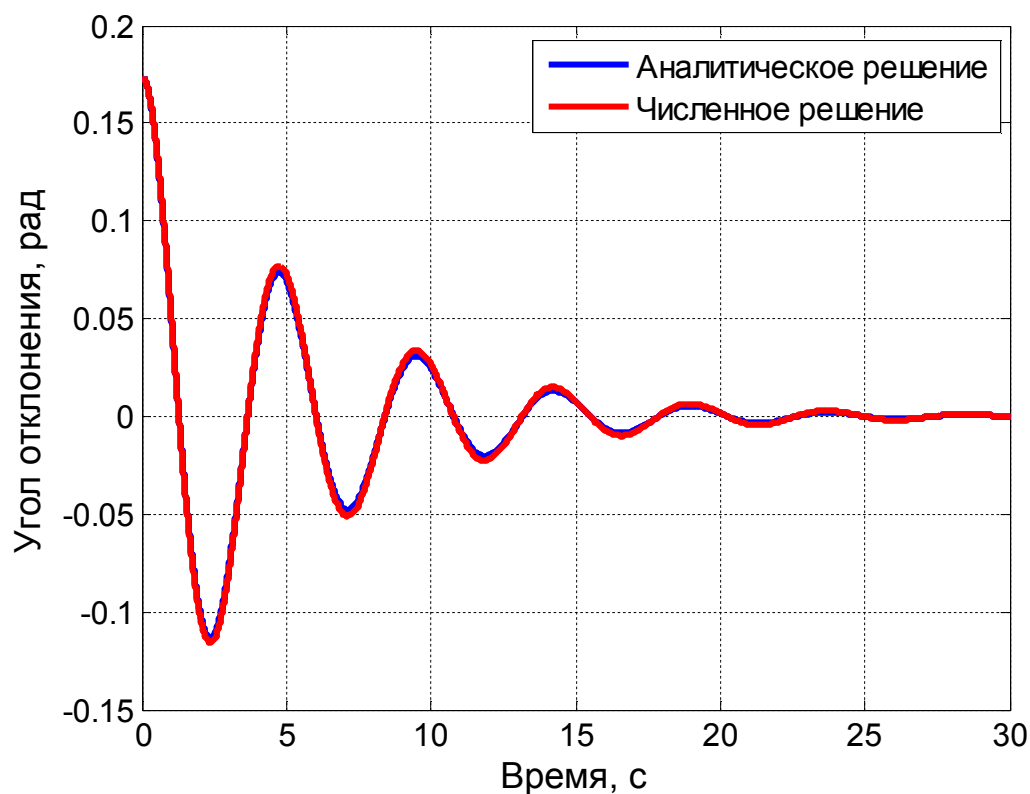


Рисунок 3.2 – Угол отклонения груза от вертикали при $\alpha_0 = \pi/18$

Рассмотрим тот же процесс при иных начальных условиях: $\alpha_0 = \pi/2$; $\omega_0 = 0$ рад/с. Прделав аналогичные операции, определим зависимость угла отклонения груза от вертикали. Графики аналитического и численного решений представлены на рисунке 3.3. Видно, что они отличаются друг от друга, но это отклонение сравнительно мало.

На рисунке 3.4 представлены графики аналитического и численного решений задачи при начальных условиях $\alpha_0 = 5\pi/6$; $\omega_0 = 0$ рад/с. Видно, что графики аналитического и численного решения весьма существенно отличаются, т. е. линеаризованная модель описывает динамику процесса с большими погрешностями.

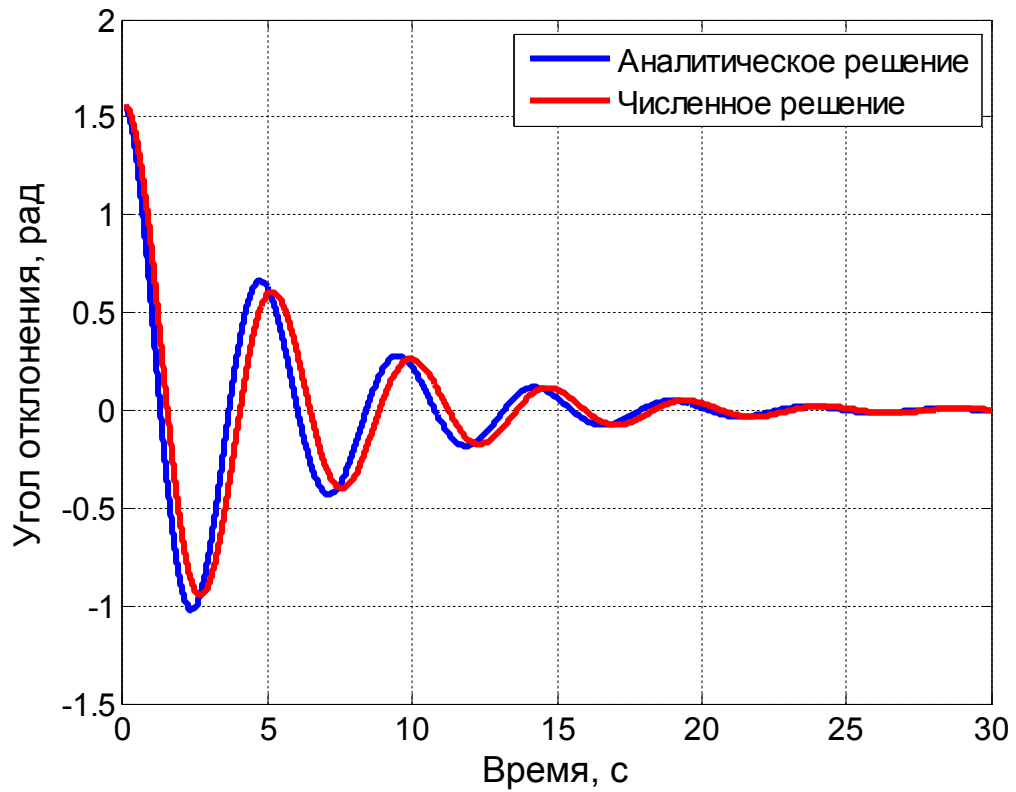


Рисунок 3.3 – Угол отклонения груза от вертикали при $\alpha_0 = \pi/2$

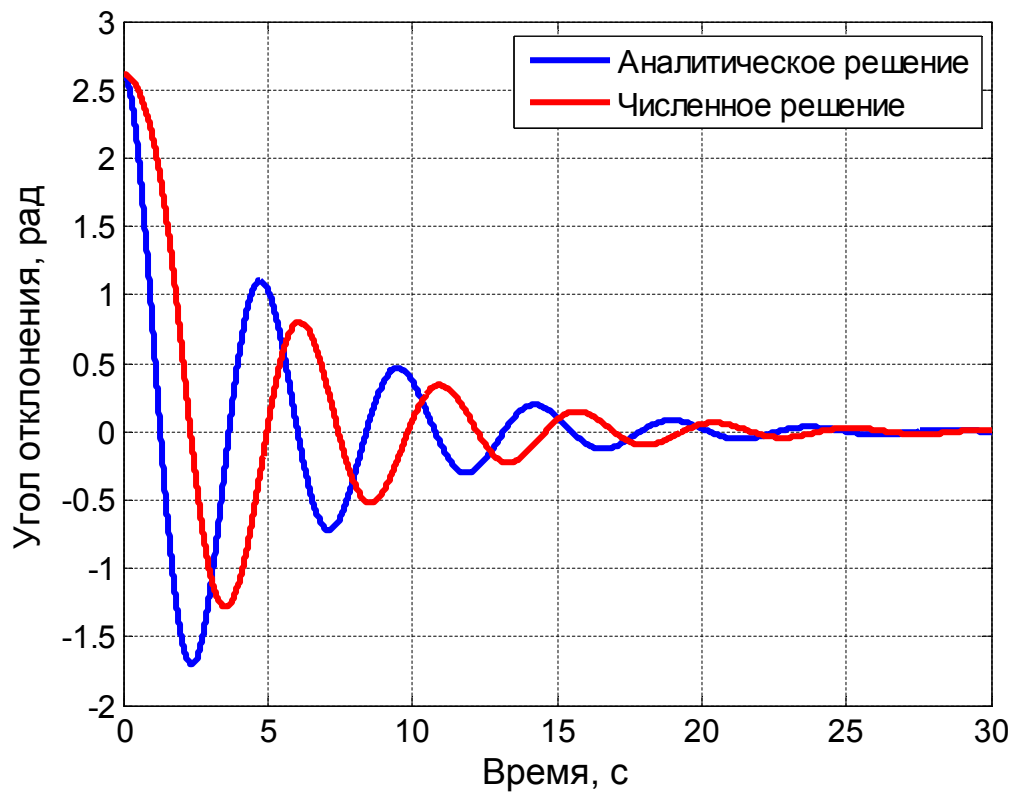


Рисунок 3.4 – Угол отклонения груза от вертикали при $\alpha_0 = 5\pi/6$

Рассмотрим динамику изучаемого процесса при иных значениях параметров. Например, если $J = 5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $m = 2 \text{ кг}$; $R = 0,5 \text{ м}$; $k = 15 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}$; $\alpha_0 = \pi/18$; $\omega_0 = 0 \text{ рад/с}$ (т. е. трение на оси колеса является весьма значительным).

В этом случае нелинейное уравнение динамики будет иметь вид:

$$\ddot{\alpha} + 2,7273\dot{\alpha} + 1,7836\sin \alpha = 0.$$

Решение этого дифференциального уравнения может быть получено только численными методами. Расчётные формулы численного решения будут иметь вид:

$$\begin{cases} \omega(i+1) = \omega(i) - h(2,7273\omega(i) + 1,7836\sin \alpha(i)); & \omega(0) = 0; \\ \alpha(i+1) = \alpha(i) + h\omega(i); & \alpha(0) = \pi/18. \end{cases}$$

Здесь h – шаг интегрирования.

Линеаризованное уравнение динамики запишется следующим образом:

$$\Delta\ddot{\alpha} + 2,7273\Delta\dot{\alpha} + 1,7836\Delta\alpha = 0.$$

Его аналитическое решение может быть легко найдено по известным формулам. С учётом заданных начальных условий, получим зависимость угла отклонения от времени:

$$\Delta\alpha = -0,3448e^{-1,6391t} + 0,5193e^{-1,0882t}.$$

Графики аналитического и численного решений при $h = 0,01$ представлены на рисунке 3.5. Видно, что они практически совпадают, т. е. аналитическое решение линеаризованного уравнения почти не отличается от численного решения нелинейного уравнения. На рисунках 3.6 и 3.7 представлены зависимости угла отклонения груза от времени при иных начальных условиях.

Как и в предыдущем случае, при увеличении амплитуды поведение линейной и нелинейной модели начинают всё больше и больше отличаться друг от друга.

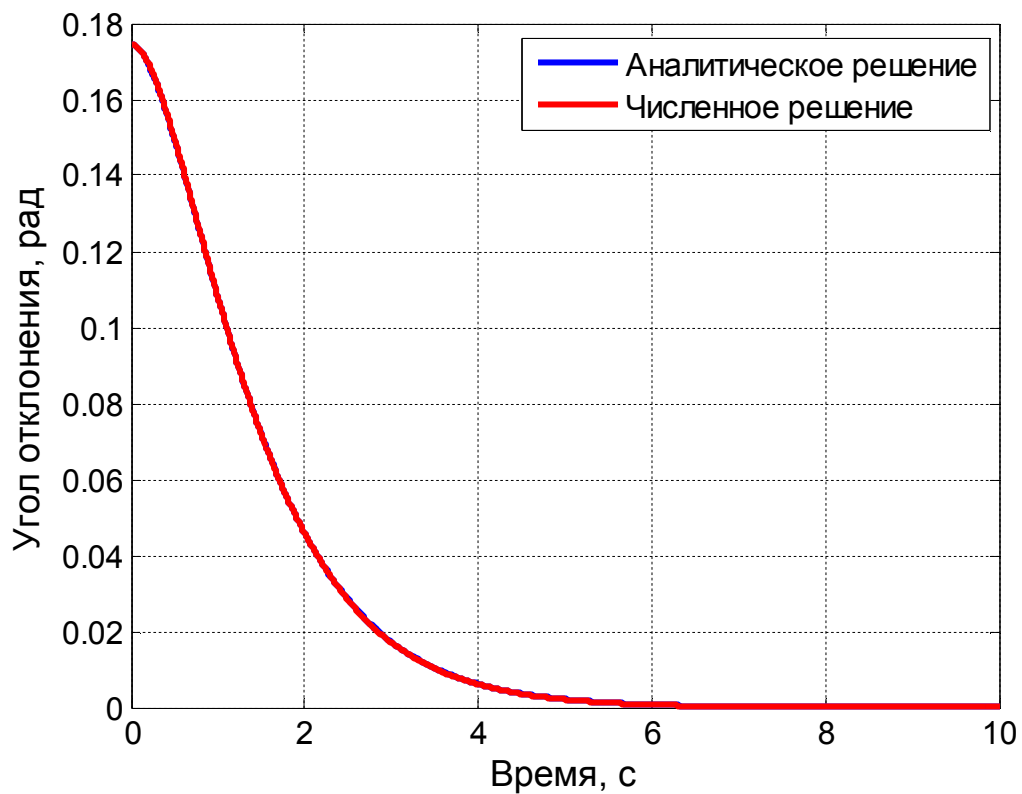


Рисунок 3.5 – Угол отклонения груза от вертикали при $\alpha_0 = \pi/18$

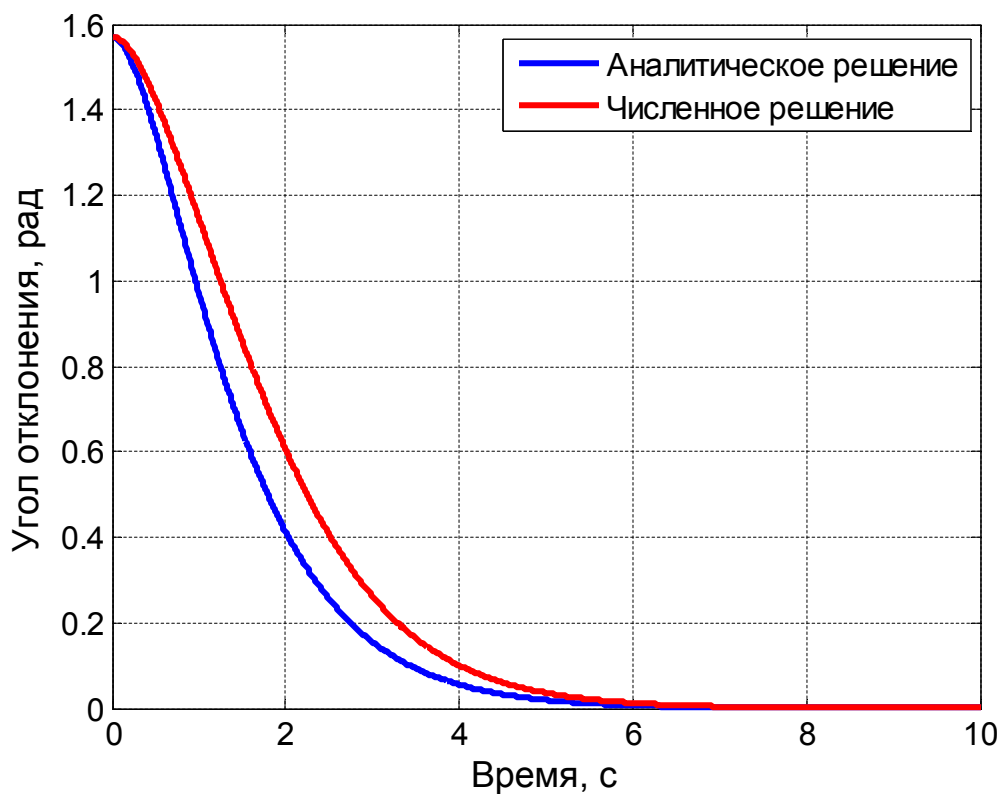


Рисунок 3.6 – Угол отклонения груза от вертикали при $\alpha_0 = \pi/2$

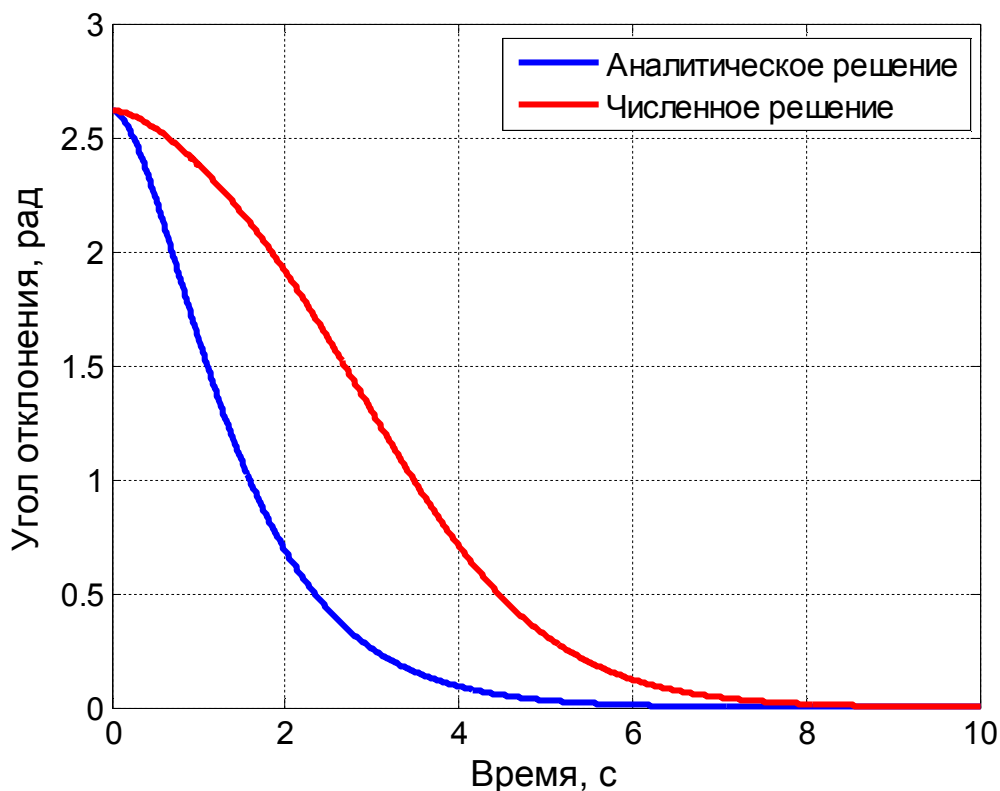


Рисунок 3.7 – Угол отклонения груза от вертикали при $\alpha_0 = 5\pi/6$

Таким образом, была построена нелинейная модель динамического процесса и проведена его линеаризация. Линеаризованная модель более удобна для изучения и практического использования, чем нелинейная, так как позволяет находить аналитическое решение задачи. Однако, линеаризованная модель хорошо описывает поведение динамического объекта только лишь в малой окрестности установившегося режима – и чем больше величина отклонения, тем больше отличаются друг от друга линейная и нелинейная модель.

Контрольные вопросы

1. Какие математические модели называются нелинейными?
2. Какие математические модели называются нестационарными?
3. В чем состоит суть процедуры линеаризации?
4. Что называется установившимся режимом?
5. Опишите основные способы линеаризации нелинейных уравнений динамики.