

Ряды в комплексной плоскости

- Числовые ряды

Числовым рядом называется выражение вида

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

где a_1, a_2, \dots - члены ряда, a_n - общий член ряда,

$$S_k = \sum_{n=1}^k a_n \text{ - } k\text{-ая частичная сумма ряда.}$$

Ряд сходится, если $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = S$. S – сумма ряда.

Ряд расходится, если $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k$ бесконечен или не существует.

Числовым рядом называется выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \cdots$$

где члены ряда u_n комплексные числа.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) + \cdots$$

или
$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

п-ая частичная сумма ряда
$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k + i \sum_{k=1}^n b_k$$

Ряд сходится, если существует предел

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S_1 + iS_2$$

иначе – расходится.

Необходимый признак сходимости: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится абсолютно, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots$$

Достаточные признаки сходимости:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$$

...Даламбера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} < 1$$

...Коши

Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n \dots$
или $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$.

Область сходимости – совокупность всех значений z , при которых ряд сходится.

Теорема Абеля. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ сходится

при $z = z_0$, то он абсолютно сходится при всех z таких, что $|z| < |z_0|$.

Следствие. Всякий степенной ряд сходится внутри круга сходимости $|z| < R$, где R -радиус сходимости.

- Сумма степенного ряда внутри круга сходимости – аналитическая функция.
- Степенной ряд внутри круга сходимости можно почленно дифференцировать и интегрировать. При этом радиус сходимости не изменяется.
- Радиус сходимости можно находить по формуле

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_n}{u_{n+1}} \right| \quad \text{или} \quad R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|}}$$

Ряд Тейлора

Пусть точка z_0 **правильная** для функции $f(z)$.

Тогда

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots \\ \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{(n)} + \dots$$

-ряд Тейлора функции $f(z)$ в точке z_0 .

При этом

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

Разложение некоторых элементарных функций

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots \quad |z| < 1$$

$$(1+z)^a = 1 + \frac{a}{1!}z + \frac{a(a-1)}{2!}z^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}z^3 + \dots \quad |z| < 1$$

Нули аналитической функции

Точка z_0 -**нуль** функции $f(z)$, если $f(z_0) = 0$.

Если $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$; $f^{(m)}(z_0) \neq 0$,

то z_0 - **нуль порядка m (m -нуль)**.

Тогда разложение в ряд Тейлора имеет вид

$$f(z) = c_m (z - z_0)^m + c_{m+1} (z - z_0)^{m+1} + \dots$$

или

$$f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z), \quad \varphi(z) = c_m + c_{m+1} (z - z_0) + \dots$$

причём $\varphi(z_0) = c_m \neq 0$.

Замечание: Нуль 1 порядка – **простой нуль**.

Ряд Лорана

- **Задача.** Разложить в ряд в окрестности $z_0 = 0$ (по степеням z) функцию $f(z) = \frac{1}{z-1}$.

Решение.

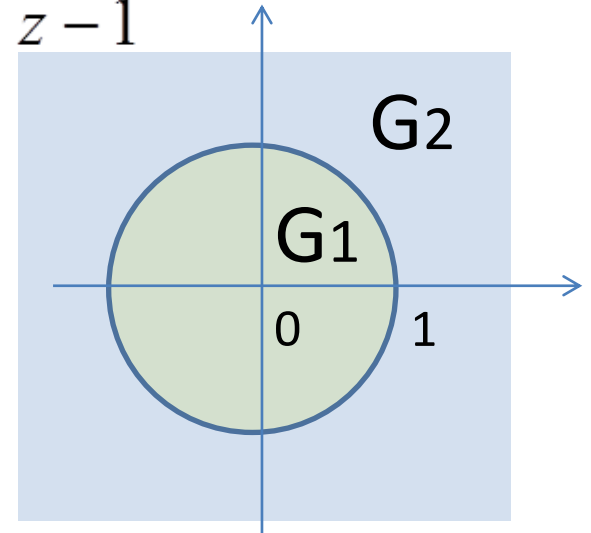
Рассмотрим 2 случая:

1) $|z| < 1$ (область G_1). Тогда

$$f(z) = \frac{1}{z-1} = -\left(1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots\right)$$

2) $|z| > 1$ (область G_2). Тогда

$$f(z) = \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \cdot \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{z^n} + \dots\right)$$



Теорема Лорана. Всякую функцию, аналитическую в кольце $r < |z - z_0| < R$ ($0 \leq r < R \leq \infty$), можно разложить в этом кольце в ряд (**ряд Лорана**)

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

где коэффициенты

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

а C – любая окружность с центром в точке z_0 , лежащая внутри данного кольца.

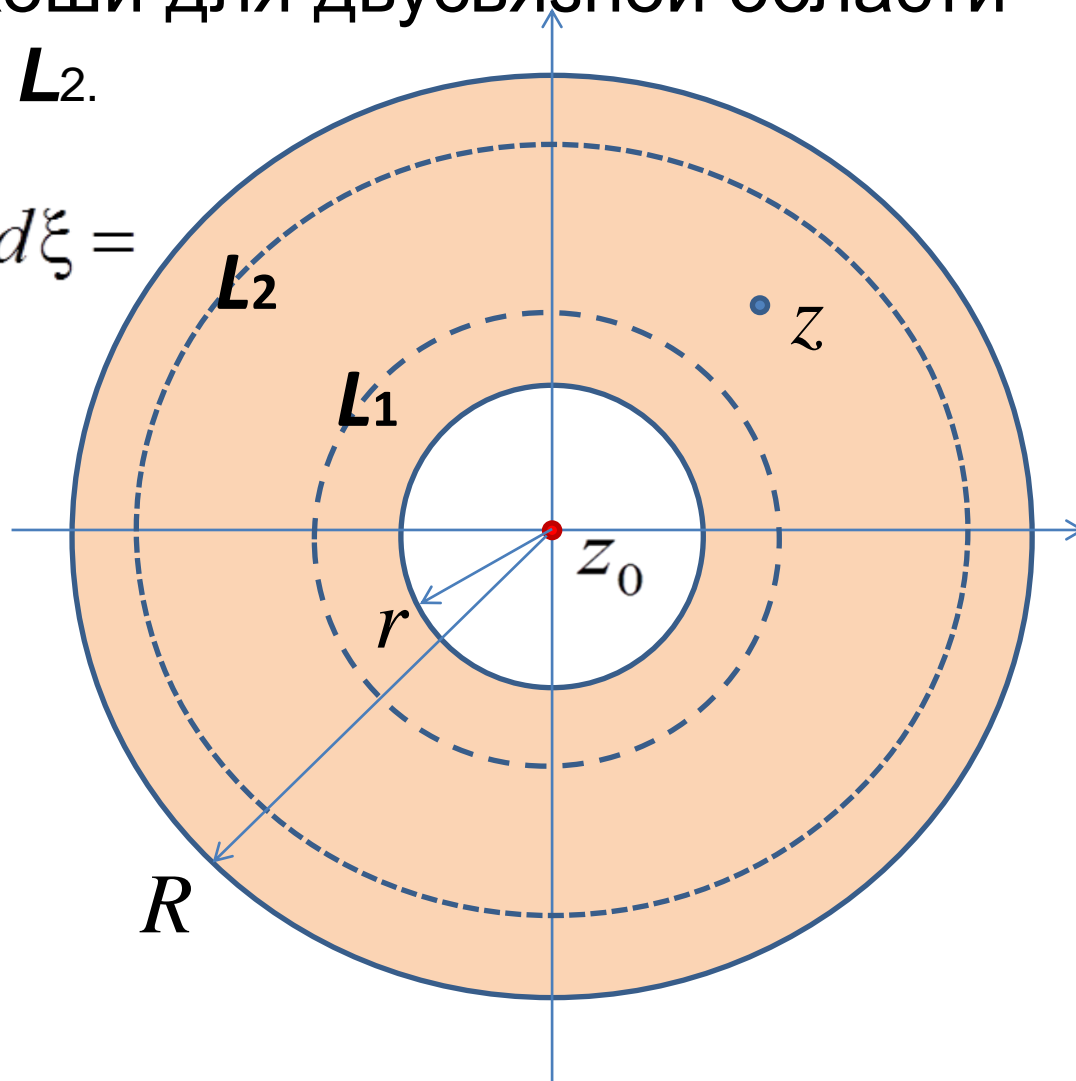
Доказательство:

Применим терему Коши для двусвязной области –
- кольца между L_1 и L_2 .

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_1+L_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{L_1} - \oint_{L_2} \right) =$$

(каждый контур
проходится против
часовой стрелки)



Интеграл по L_1 $\oint_{L_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi$ раскладывается
по отрицательным степеням $z - z_0$

Две части ряда Лорана

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n}_{\text{правильная часть}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}}_{\text{главная часть}}$$

Особые точки ф.к.п.

Особые точки функции $f(z)$ - точки, в которых она не дифференцируема.

Особая точка **изолированная**, если в какой-либо окрестности её нет других особых точек.

Пусть z_0 -изолированная особая точка функции.

Тогда $\exists R > 0$, что в кольце $0 < |z - z_0| < R$ функция аналитическая и раскладывается в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

При этом возможны 3 случая:

1) Ряд Лорана не содержит главной части.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

Тогда z_0 - **устраняемая особая точка**.

В этом случае $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c_0 \neq \infty$

Если положить $f(z_0) = c_0$, то $f(z)$ станет
аналитической.

Пример. $f(z) = \frac{\sin z}{z}$, $z_0 = 0$ - **устраняемая о.т.**

2) Ряд Лорана содержит конечное число членов в главной части:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m}; \text{ где } c_{-m} \neq 0$$

Тогда z_0 - **полюс** (**полюс порядка m ; m -полюс**)

В этом случае $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$

Пример. $f(z) = \frac{1}{(z - 1)^2}$, $z_0 = 1$ - полюс 2 порядка

3) Ряд Лорана содержит бесконечное число членов в главной части:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

Тогда z_0 - **существенно особая точка**.

В этом случае $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ не существует.

Пример. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, $z_0 = 0$ - существенно о.т.

Теорема о связи между нулём и полюсом

Если z_0 - полюс порядка m функции $f(z)$, то z_0 является нулём порядка m для $1/f(z)$.

И обратно: нуль m -го порядка для $f(z)$ – полюс m -го порядка для $\frac{1}{f(z)}$.

Доказательство.

Пусть z_0 - нуль порядка m функции $f(z)$. Тогда

$$f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$$

где $\varphi(z)$ – аналитическая в z_0 , и $\varphi(z_0) \neq 0$.

Тогда $(z - z_0)^m \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{\varphi(z)}$ и

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left((z - z_0)^m \frac{1}{f(z)} \right) = \frac{1}{\varphi(z_0)} \neq 0 \ (\neq \infty)$$

Следовательно, для функции $\frac{1}{f(z)}$ точка z_0 -
-полюс порядка m .

Обратное доказывается аналогично.

Замечание: полюс 1 порядка – *простой полюс*.

Случай $z = \infty$ (бесконечно удаленная точка) исследуется аналогично. Изучение функции в окрестности $z = \infty$ можно свести подстановкой $z = \frac{1}{w}$ к изучению функции $f\left(\frac{1}{w}\right)$

Пример1. $f(z) = z^2$ $z_0 = \infty$ - полюс 2 порядка.

Пример2. $f(z) = \frac{1}{z}$ $z_0 = \infty$ - устранимая о.т.

Пример3. $f(z) = \sin z$ $z_0 = \infty$ - существенно о.т.

Вычеты

Пусть $f(z)$ – аналитическая функция;

z_0 – изолированная особая точка; C – контур с центром в z_0 в области аналитичности $f(z)$.

Тогда **вычет** функции $f(z)$ в точке z_0 есть

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz$$

или

$$\operatorname{Res} f(z_0) = c_{-1}$$

Вычисление вычетов

- Если z_0 - **правильная** или **устраняемая о.т.**, то

$$\operatorname{Res} f(z_0) = 0$$

- Если z_0 - **простой полюс**, то

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

- Если z_0 - **простой полюс** и $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, $\varphi(z_0) \neq 0$,

то
$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

- Если z_0 - **существенно особая точка**, то

$$\operatorname{Res} f(z_0) = c_{-1}$$

- Если z_0 - полюс 2 порядка, то

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left((z - z_0)^2 f(z) \right)'$$

- Если z_0 - полюс порядка m , то

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z - z_0)^m f(z) \right)$$

Вычислить вычеты функции во всех особых точках.

Пример 1. $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+i)^2}$

$z = 1$ - простой полюс;

$$\operatorname{Res} f(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)z}{(z-1)(z+i)^2} = \frac{1}{(1+i)^2} = -\frac{i}{2};$$

$z = -i$ - полюс 2 порядка;

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(-i) &= \lim_{z \rightarrow -i} \left((z+i)^2 f(z) \right)' = \lim_{z \rightarrow -i} \left(\frac{1}{z-1} \right)' = \\ &= -\frac{1}{(-i-1)^2} = \frac{i}{2}; \end{aligned}$$

Пример 2. $f(z) = \frac{\sin z^2}{z^3 - z^2}$

$z_0 = 0$ - устранимая особая точка; $\operatorname{Res} f(0) = 0$

$z_1 = 1$ - простой полюс;

$$\operatorname{Res} f(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1) \sin z^2}{z^2 (z-1)} = \sin 1$$

Пример 3. $f(z) = \frac{z}{z^4 + 1}$

Имеем 4 простых полюса

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}, z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}, z_3 = e^{-i\frac{3\pi}{4}}, z_4 = e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

$$\operatorname{Res} f(z_1) = \frac{z_1}{4z_1^3} = \frac{1}{4z_1^2} = \frac{1}{4} e^{-i\frac{\pi}{2}} = -\frac{i}{4};$$

$$\operatorname{Res} f(z_2) = \frac{1}{4z_2^2} = \frac{i}{4};$$

$$\operatorname{Res} f(z_3) = \frac{1}{4z_3^2} = -\frac{i}{4};$$

$$\operatorname{Res} f(z_4) = \frac{1}{4z_4^2} = \frac{i}{4};$$

Пример 4. $f(z) = z^5 \sin \frac{1}{z^2}$

$z_0 = 0$ - существенно особая точка.

Ряд Лорана в окрестности 0 имеет вид

$$f(z) = z^5 \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!z^6} + \frac{1}{5!z^{10}} - \dots \right) = z^3 - \frac{1}{3!z} + \dots$$

$$\operatorname{Res} f(0) = c_{-1} = -\frac{1}{6}.$$

Применение вычетов к вычислению интегралов

Основная теорема Коши о вычетах.

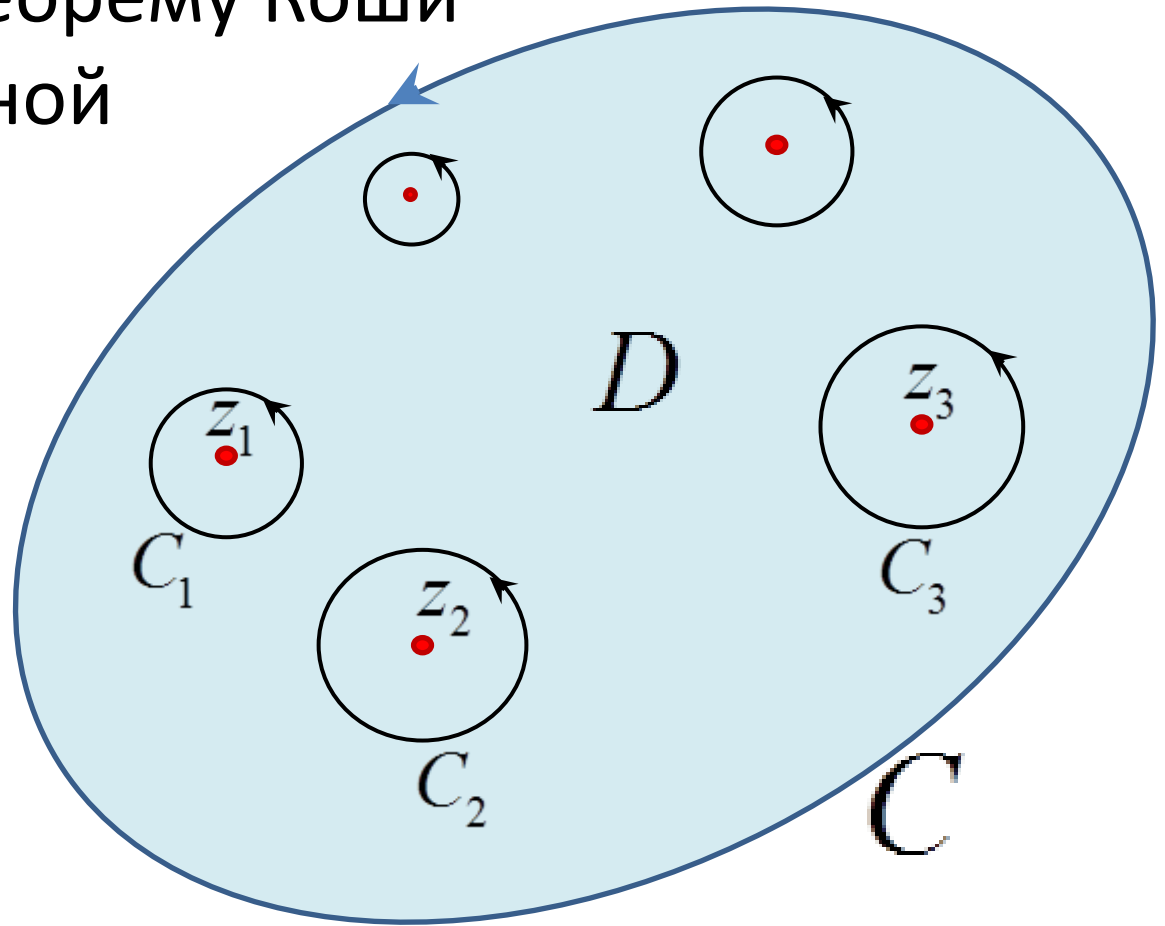
Пусть функция $f(z)$ - аналитическая везде в замкнутой области \bar{D} , ограниченной кривой C , кроме конечного числа изолированных особых точек z_1, z_2, \dots, z_n , лежащих внутри D . Тогда

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z_k)$$

Доказательство.

Около каждой особой точки опишем окружность C_k , лежащую внутри области D .

Применим теорему Коши для многосвязной области.



Имеем

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz + \cdots + \oint_{C_m} f(z) dz$$

По определению вычета

$$\oint_{C_k} f(z) dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res} f(z_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Отсюда

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i (\operatorname{Res} f(z_1) + \operatorname{Res} f(z_2) + \cdots + \operatorname{Res} f(z_n))$$

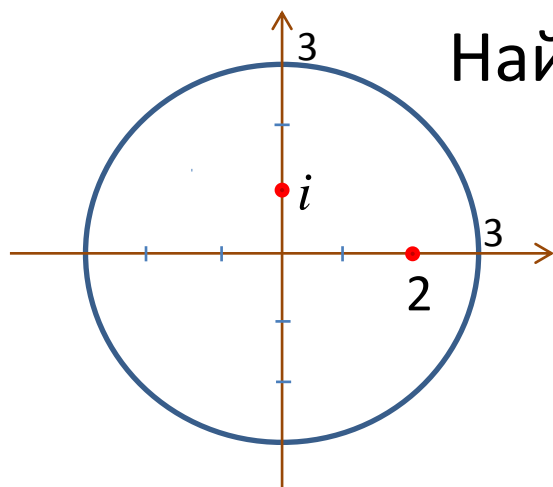
что и требовалось доказать.

Вычислить контурный интеграл с помощью вычетов

• **Пример 1.** $\oint_C \frac{z^3 dz}{(z-2)(z-i)^2} \quad C : |z| = 3$

Особые точки: $z_1 = 2$ - простой полюс;
 $z_2 = i$ - плюс 2 порядка.

Найдем вычеты в особых точках:



$$\begin{aligned} \text{Res } f(z_1) &= \lim_{z \rightarrow 2} \frac{z^3 (z-i)^2}{(z-2)(z-i)^2} = \\ &= \frac{8}{(2-i)^2} = \frac{8}{25}(3+4i); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Res} f(z_2) &= \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{z^3 (z-i)^2}{(z-2)(z-i)^2} \right)' = \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{z^3}{z-2} \right)' = \frac{3z^2(z-2) - z^3}{(z-2)^2} \Big|_{z=i} = \frac{26+18i}{25};\end{aligned}$$

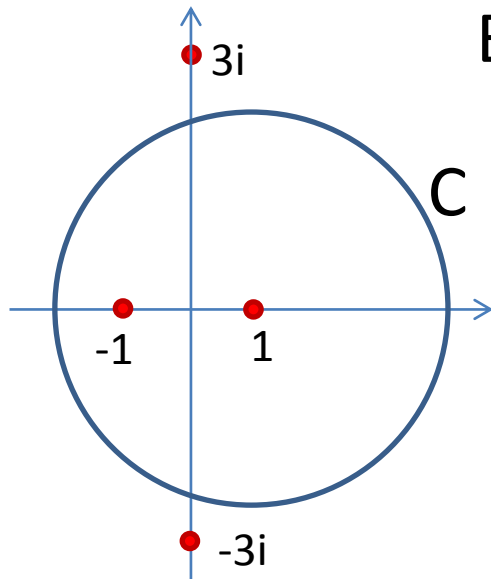
Итак

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{z^3 dz}{(z-2)(z-i)^2} &= 2\pi i \left(\frac{8}{25}(3+4i) + \frac{26+18i}{25} \right) = \\ &= 2\pi i \left(\frac{50+50i}{25} \right) = 4\pi(i-1).\end{aligned}$$

• **Пример 2.** $\oint_C \frac{e^z dz}{z^4 + 8z^2 - 9} \quad C: |z-1|=3$

Найдём особые точки: $z^4 + 8z^2 - 9 = (z^2 - 1)(z^2 + 9) =$
 $= (z-1)(z+1)(z-3i)(z+3i);$

$z_1 = 1; z_2 = -1; z_3 = 3i; z_4 = -3i;$ - все простые
 полюса.



Внутри контура **C** лежат z_1, z_2

$$\text{Res } f(z_1) = \left. \frac{e^z}{4z^3 + 16z} \right|_{z=1} = \frac{e}{20};$$

$$\text{Res } f(z_2) = \left. \frac{e^z}{4z^3 + 16z} \right|_{z=-1} = \frac{e^{-1}}{-20};$$

Окончательно получим

$$\oint_C \frac{e^z dz}{z^4 + 8z^2 - 9} = 2\pi i \left(\frac{e}{20} - \frac{e^{-1}}{20} \right) = \frac{\pi i}{5} \operatorname{sh} 1.$$

Применение вычетов к вычислению несобственных интегралов

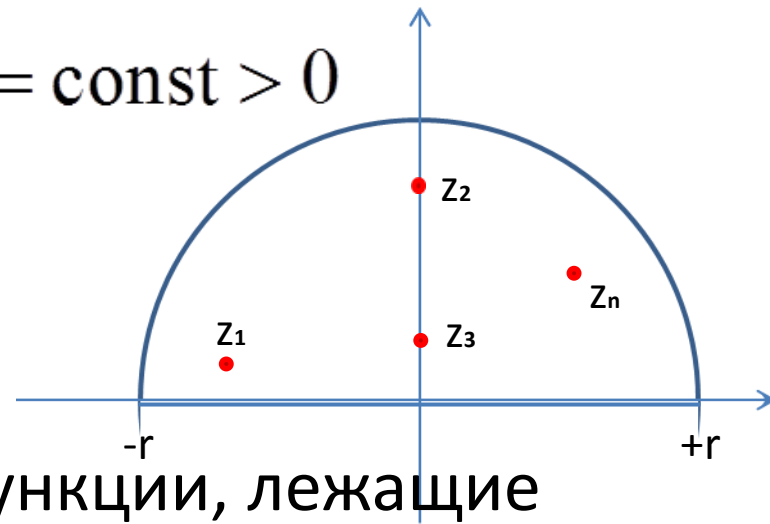
Рассмотрим интеграл вида $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, где функция $f(z)$ связана неравенством

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|^2}, \quad M = \text{const} > 0$$

Рассмотрим полукруг

$$|z| < r, \quad \text{Im } z > 0$$

содержащий все особые точки функции, лежащие в верхней полуплоскости.



Имеем
$$\int_{-r}^{+r} f(x)dx + \int_{C_r^+} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z_k);$$

Здесь C_r^+ - полуокружность $|z| = r, \operatorname{Im} z > 0$

Заметим, что
$$\left| \int_{C_r^+} f(z)dz \right| < \frac{M}{r^2} \cdot \pi r = \frac{\pi M}{r};$$

Переходя к пределу при $r \rightarrow \infty$, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z_k).$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$

Решение.

Интеграл $A = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$ удовлетворяет условиям применения теоремы Коши о вычетах.

Найдем особые точки функции

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}, z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}, z_3 = e^{-i\frac{3\pi}{4}}, z_4 = e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Все особые точки – простые полюса. Из них в верхней полуплоскости лежат z_1, z_2 . Следовательно,

$$A = \frac{1}{2} \oint_{C^+} \frac{z^2 dz}{1+z^4} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i (\operatorname{Res} f(z_1) + \operatorname{Res} f(z_2))$$

Вычислим вычеты:

$$\operatorname{Res} f(z_1) = \frac{z_1^2}{4z_1^3} = \frac{1}{4z_1} = \frac{1}{4} e^{-i\frac{\pi}{4}};$$

$$\operatorname{Res} f(z_2) = \frac{1}{4z_2} = \frac{1}{4} e^{-i\frac{3\pi}{4}};$$

Окончательно:

$$A = \frac{\pi i}{4} \left(e^{-\frac{\pi}{4}i} + e^{-\frac{3\pi}{4}i} \right) = \frac{\pi i}{4} (-i\sqrt{2}) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$