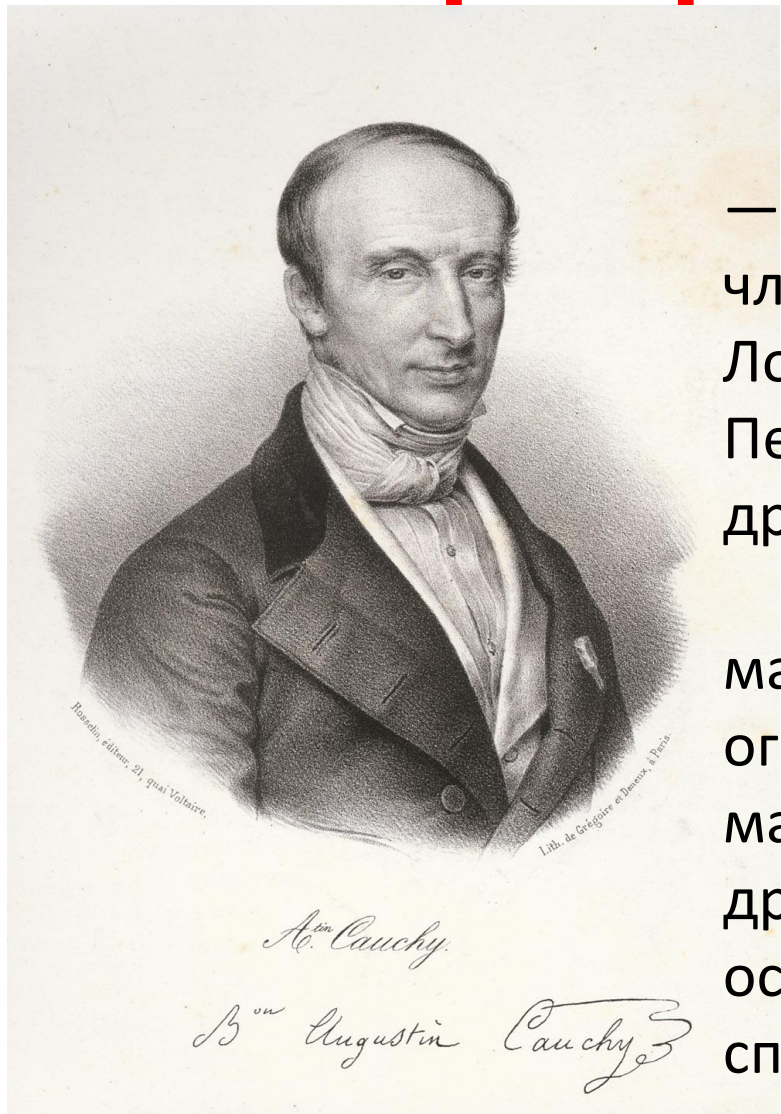


# Лекция 1

# Теория рядов. Создатели



**Огюстён Луи Кошй́ (1789-1857)**

— французский математик и механик, член Парижской академии наук, Лондонского королевского общества, Петербургской академии наук и других академий.

Разработал фундамент математического анализа, внёс огромный вклад в анализ, алгебру, математическую физику и многие другие области математики; один из основоположников механики сплошных сред. Его имя внесено в список величайших учёных Франции.

# Теория рядов. Создатели



**Жан Лерон Д'Аламбёр**  
**(д'Аламбер, Даламбер)**  
(1717 — 1783) — французский учёный-энциклопедист. Широко известен как философ, математик и механик. Член многих академий.

В математике:  
дифференциальное исчисление,  
теория рядов, гидродинамика,  
дифференциальные уравнения,  
общая алгебра, небесная  
механика и др.

***«Работайте, работайте —  
а понимание придёт потом»***

# Числовые ряды

## Основные понятия

Числовым рядом называется выражение вида

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

где  $a_1, a_2, \dots$  - члены ряда,  $a_n$  - общий член ряда,

$$S_k = \sum_{n=1}^k a_n \text{ - } k\text{-ая частичная сумма ряда. } a_n = f(n)$$

Ряд сходится, если  $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = S$ .  $S$  – сумма ряда.

Ряд расходится, если  $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k$  бесконечен или не существует.

1.  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n$  *расходится*
2.  $1 + 1 + 1 + 1 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} 1$  *расходится*
3.  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$  *расходится*
4.  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  *расходится*
5.  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  *сходится*
6.  $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n}$  *сходится*
7.  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \dots$  ?

# Геометрическая прогрессия

Последовательность  $a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, \dots$

$a_n = a_{n-1}q$ ;  $q$  - знаменатель прогрессии.

$$a_n = a_1q^n; \quad S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Для бесконечно убывающей геом.прогрессии

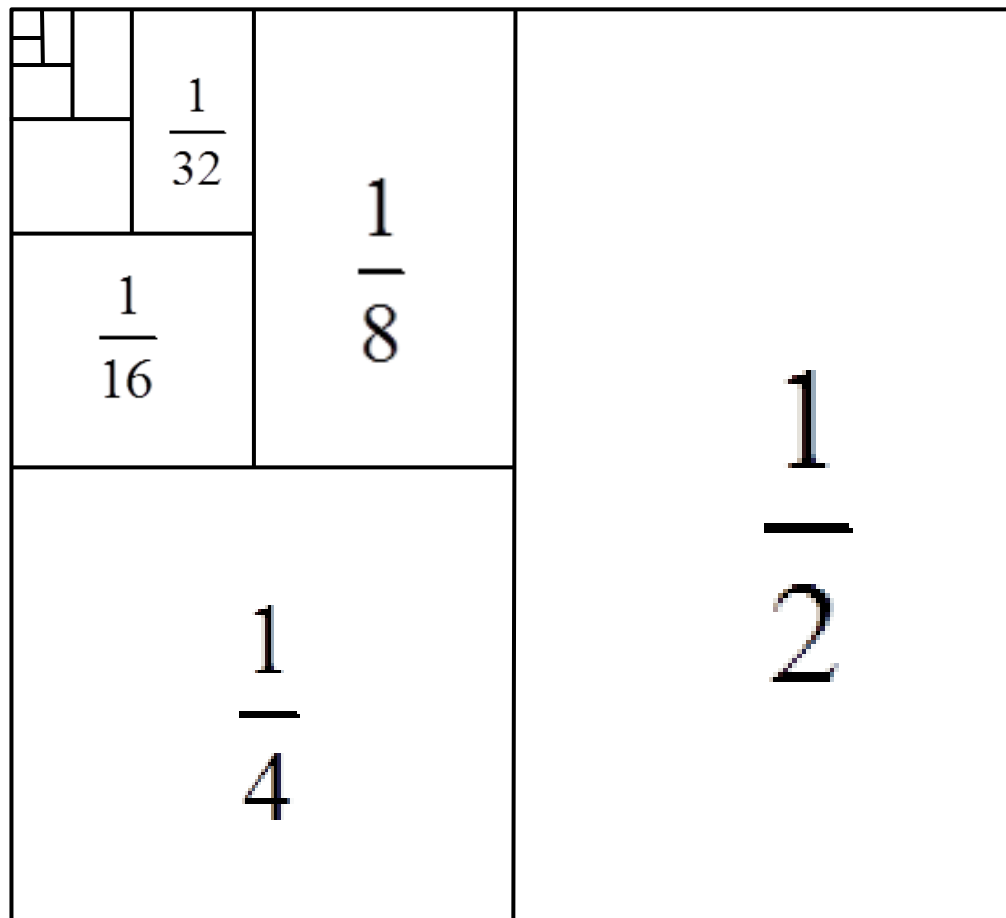
$$(б.у.г.п.) \quad S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} \quad (|q| < 1)$$

Пример.

$$1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + \dots = 1,111\dots = \frac{10}{9}$$

- Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$



# Свойства рядов

**Свойство 1.** Если отбросить конечное число членов ряда, то оставшийся ряд будет сходиться или расходиться совместно с ИСХОДНЫМ.

*Доказательство.* Пусть  $n$  – старший номер из отброшенных и  $S_1$  – сумма отброшенных членов, а  $S_2$  – остаток ряда. Тогда

$$S_n = S_1 + S_2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S_1 + \lim_{n \rightarrow \infty} S_2$$



# Свойства рядов

**Свойство 2.** Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$  сходится и  $c$  – произвольное число, то  $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \cdot S$ .

**Свойство 3.** Если ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$  сходятся, то сходится и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B$

#### 4. Необходимый признак сходимости

Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  .

**Доказательство.**

$$\begin{array}{rcc} S_n & = & S_{n-1} + a_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} S_n & = & \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \\ \Downarrow & & \Downarrow \quad \Downarrow \\ S & = & S + 0 \end{array}$$

**Пример.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2}$  расходится.

**Гармонический ряд**  
**расходится!**

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

**Доказательство.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e \Rightarrow n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 \Rightarrow \frac{1}{n} > \ln \frac{n+1}{n}$$

$$\frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n$$

---

$$S_n > \ln(n+1)$$

$$\begin{aligned} &1 > \ln 2 - \ln 1 \\ &+ \frac{1}{2} > \ln 3 - \ln 2 \\ &+ \frac{1}{3} > \ln 4 - \ln 3 \\ &+ \dots \end{aligned}$$

# Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов

## 1. Признаки сравнения

Пусть  $\forall n \ a_n \geq b_n > 0$  , тогда

если  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, то  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходится,

если  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  расходится, то  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится.

(Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  мажорирует ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  )

## 2. Предельный признак сравнения

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c \quad (0 < c < \infty)$  .

Тогда ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходятся и

расходятся совместно.

**Пример.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+3^n}$  сравним с рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$

### 3. Признак Даламбера

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ . Тогда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, если  $l < 1$ ;

и расходится, если  $l > 1$ .

**Доказательство.**

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - l \right| < \varepsilon \quad \text{или} \quad l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon$$

Пусть  $l < 1$ . Выберем такое  $\varepsilon$ , что  $q = l + \varepsilon < 1$ .

Тогда  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q \Rightarrow a_{n+1} < a_n q$ . Пусть  $b_{n+1} = a_n q$

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_{n+1}$  сходится (б.у.г.п.). Тогда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится.

## 4. Радикальный признак Коши

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ . Тогда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, если  $l < 1$ ;

и расходится, если  $l > 1$ .

**Доказательство.**

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \left| \sqrt[n]{a_n} - l \right| < \varepsilon \quad \text{или} \quad \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon$$

Пусть  $l < 1$ . Выберем такое  $\varepsilon$ , что  $q = l + \varepsilon < 1$ .

$$\text{Тогда} \quad \sqrt[n]{a_n} < q \quad \Rightarrow \quad a_n < q^n$$

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$  сходится (б.у.г.п.). Тогда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится.

## Примеры.

$$1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{9}{8} + \dots$$

$$2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = 2 + 2 + \frac{4}{3} + \dots$$

$$3 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{6}{27} + \dots$$

$$4 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{n^2} = \frac{2}{3} + \frac{9}{16} + \frac{262144}{531441} + \dots$$



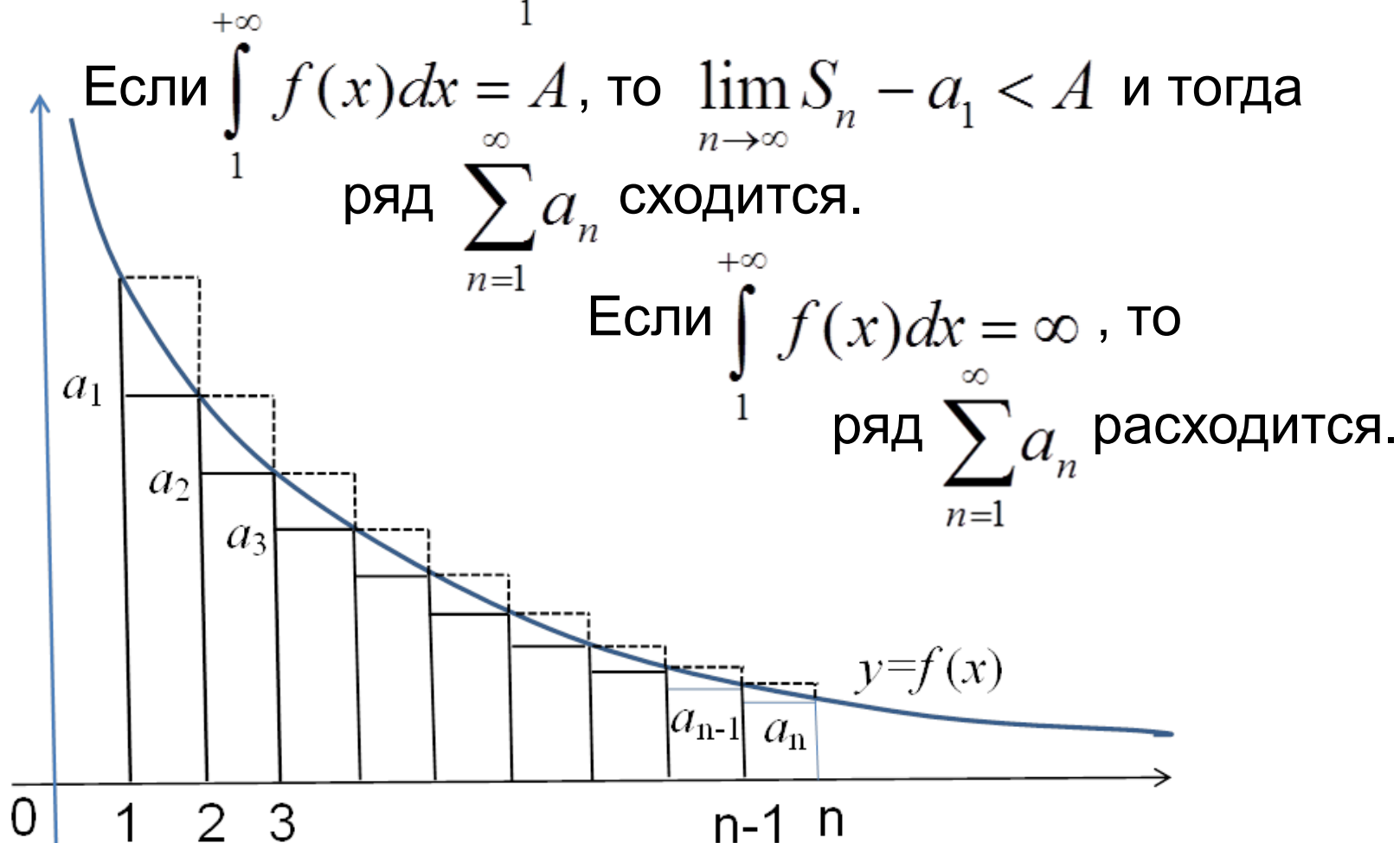
## 5. Интегральный признак Коши

Пусть  $f(x)$  - непрерывная монотонно убывающая функция и  $f(n) = a_n$ . Тогда

ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и несобственный интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  сходятся и расходятся одновременно.

## Доказательство.

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n < \int_1^n f(x) dx < a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}$$



**Пример 1.**  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$

## Обобщенный гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

сходится при  $p > 1$   
и расходится при  $p \leq 1$

Например,

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

# Лекция 2

Саксонский философ, логик, математик, механик, физик, юрист, историк, дипломат, изобретатель и языковед. Основатель и первый президент Берлинской Академии наук.

Важнейшие научные достижения:

- Лейбниц, независимо от Ньютона, создал математический анализ — дифференциальное и интегральное исчисления.
- Лейбниц создал комбинаторику как науку.
- Заложил основы математической логики.
- Описал двоичную систему счисления.
- В механике ввёл понятие кинетической энергии и сформулировал закон сохранения энергии.
- Сформулировал один из важнейших вариационных принципов физики — «принцип наименьшего действия».



Готфрид Вильгельм  
**Лейбниц**  
(1646 — 1716)

Немецкий математик, механик и физик. За свою короткую жизнь (всего 10 лет трудов) он преобразовал сразу несколько разделов математики.

*«Мы склонны видеть в Римане, может быть, величайшего математика середины XIX века, непосредственного преемника Гаусса»*

(Академик П. С. Александров)



Георг Фридрих  
Бернхард **Риман**  
(1826 - 1866)

## 5. Интегральный признак Коши

Пусть  $f(x)$  - непрерывная монотонно убывающая функция и  $f(n) = a_n$ . Тогда

ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и несобственный интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  сходятся или расходятся совместно.

**Пример 1.**  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$

## Обобщенный гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

сходится при  $p > 1$   
расходится при  $p \leq 1$

Например,

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$



Формула Стирлинга для достаточно больших  $n$

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \quad (\text{полезная формула})$$

# Достаточный признак сходимости знакочередующихся рядов

$$a_1 - a_2 + a_3 - \dots = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \quad (a_n > 0) \quad (*)$$

знакочередующийся ряд.

## Признак Лейбница

Ряд (\*) сходится, если

- 1)  $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$
- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

при этом  $0 < S < a_1$ .

### Доказательство.

❖  $S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots$  / возрастают,

$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots$  / убывают.

Следовательно,  $0 < S_{2m} < a_1 \Rightarrow 0 < S < a_1$

❖  $S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$

**Следствие.** Если заменить сумму сходящегося знакочередующегося ряда **S** его частичной суммой  **$S_n$** , то ошибка не превосходит первого отброшенного члена  $a_{n+1}$ .

## Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда

Если сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ , то сходится и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ .

---

### ***Абсолютная и условная сходимость***

- Ряд абсолютно сходится, если сходится ряд из абсолютных величин его членов.
- Ряд условно сходится, если он сам сходится, а ряд из модулей его членов расходится.

**Ряд Лейбница**  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$   
условно сходится (!)

## Свойства абсолютно сходящихся рядов

### 1. Теорема Дирихле

Если ряд абсолютно сходится, то ряд, полученный из него любой перестановкой членов, тоже сходится и имеет ту же сумму.

2. Абсолютно сходящиеся ряды можно складывать, вычитать и умножать. При этом те же операции испытывают суммы этих рядов.

## Теорема Римана

Если ряд условно сходится, то подходящей перестановкой его членов можно получить ряд с заранее заданной суммой (в том числе  $\infty$  )

*Пример.*

Пусть  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = S$ . Переставим:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots = \\ = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots \right) = \frac{1}{2} S \end{aligned}$$

# Суммы некоторых числовых рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots = e \approx 2,718282$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \dots = \ln 2 \approx 0,6931$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = 1 + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^4}{96} \approx 1,015$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{\pi^2}{12} \approx 0,822$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \dots = \frac{3}{4}$$

# Функциональные ряды

$$u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

Точка  $x_0$  - точка сходимости, если ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x_0)$  сходится.

Совокупность точек сходимости - область сходимости.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(x) = S(x)$$

Сумма ряда  $S(x)$  определена в области сходимости.

Очень важный пример:

$$1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{при} \quad -1 < x < +1$$

Следствие:

$$1 - x + x^2 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \quad |x| < 1$$



# Степенные ряды

Общий вид

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  **коэффициенты ряда.**

При  $x_0 = 0$   $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$

Сходимость степенного ряда (теорема Абеля)

**Если степенной ряд сходится при  $x = x_0$ ,  
то он абсолютно сходится при всех значениях  $x$ ,  
удовлетворяющих неравенству  $|x| < |x_0|$ .**

# Лекция 3

Норвежский математик,  
исследовал и решил проблему  
разрешимости алгебраических  
уравнений, теорию абелевых и  
эллиптических функций,  
эллиптических интегралов,  
теорию сходимости рядов,  
теорию групп, в том числе  
абелевых.

*«Абель оставил математи -  
кам столь богатое наследие,  
что им будет чем заниматься в  
ближайшие 150 лет»*

(Шарль Эрмит)



Нильс Хёнрик  
**Абель**  
(1802 – 1829)

Немецкий математик,  
«отец современного анализа».  
Его исследования существенно  
обогатили математический анализ,  
теорию специальных функций,  
вариационное исчисление,  
дифференциальную геометрию и  
линейную алгебру. В математике  
он всегда стремился к ясности и  
строгости.

*«Вейерштрасс отказывается  
пользоваться интуицией или по  
крайней мере оставляет ей  
только неотъемлемую часть».*  
(А.Пуанкаре)



*Weierstrass*

Карл Тёодор Вильгэльм  
**Вéйерштрасс**  
(1815 - 1897)

# Степенные ряды

Общий вид

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  **коэффициенты ряда.**

При  $x_0 = 0$  
$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

Сходимость степенного ряда (теорема Абеля)

**Если степенной ряд сходится при  $x = x_0$  ,  
то он абсолютно сходится при всех значениях  $x$ ,  
удовлетворяющих неравенству  $|x| < |x_0|$  .**

**Доказательство.**

Т.к. ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$  сходится, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$ .

Это значит, что  $\exists M > 0 \quad |a_n x_0^n| \leq M \quad (n = 1, 2, \dots)$

Пусть  $x$  такое, что  $|x| < |x_0|$ . Рассмотрим ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$

Оценим  $n$ -й член этого ряда:

$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \cdot \frac{x^n}{x_0^n} \right| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x^n}{x_0^n} \right| \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$

То есть

$$0 \leq |a_n x^n| \leq M \cdot q^n, \quad \text{где} \quad \left| \frac{x}{x_0} \right|^n = q < 1$$

Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} Mq^n = M \sum_{n=0}^{\infty} q^n$  сходится (б.у.г.п.). Значит  
(по признаку сравнения), сходится ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ .  
Следовательно, ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  сходится абсолютно,  
что и требовалось доказать.

**Следствие.** Если  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$  расходится, то  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$   
расходится при всех  $x$  таких, что  $|x| > |x_0|$ .

(геометрическая интерпретация)

## **Радиус сходимости** степенного ряда -

- число  $R \geq 0$  такое, что

при  $|x| < R$  ряд сходится,

при  $|x| > R$  ряд расходится.

Если  $R = 0$ , то ряд сходится только при  $x = 0$ ,

если  $R = \infty$ , то ряд сходится на всей числовой оси.

**Интервал сходимости** ряда  $(-R; +R)$ .

Сходимость ряда на границах (при  $x = \pm R$ )  
исследуется отдельно.



Для степенного ряда

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

интервал сходимости  $(x_0 - R; x_0 + R)$

## Вычисление радиуса сходимости

Формула Даламбера

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Формула Коши

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Примеры.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-5)^n}{5^n}.$$

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^2 + 1}$$

$$3. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^n} (x+1)^n$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$$

# Равномерная сходимость

Последовательность функций  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$  сходится к функции  $f(x)$  равномерно в области  $D$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon): \forall x \in D \ n > N(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Геометрическая интерпретация:

## Пример.

Последовательность  $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$

- сходится **равномерно** к функции  $f(x) = 0$   
на отрезке  $[0; t]$   $0 < t < 1$
- сходится **неравномерно** к функции  $f(x) = 0$   
на интервале  $[0; 1)$

Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$  равномерно сходится

к сумме  $S(x)$  в области  $D$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall x \in D \quad n > N(\varepsilon) \Rightarrow \underbrace{|S(x) - S_n(x)|}_{\text{остаток ряда}} < \varepsilon$$

## Признак Вейерштрасса

Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$  равномерно сходится в области  $D$ ,

если он мажорируется сходящимся числовым

рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

## Доказательство.

Т.к. ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall x \in D \quad n > N(\varepsilon) \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| < \varepsilon$$

Оценим остаток ряда

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon$$

Это означает, что ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$  равномерно сходится, что и требовалось доказать.

# Свойства равномерно сходящихся степенных рядов

## Свойство 1.

Степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  равномерно сходится  
внутри интервала сходимости (при  $R > 0$ ).

## Свойство 2.

Сумма степенного ряда  $S(x)$  – непрерывная  
функция внутри интервала сходимости при  $R > 0$ .

### Свойство 3.

Сумма степенного ряда  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

внутри интервала сходимости (при  $R > 0$ ) имеет производные любого порядка, получаемые почленным дифференцированием ряда, причём радиусы сходимости полученных рядов также равны  $R$ .

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$



## Свойство 4.

Степенной ряд  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  внутри интервала сходимости (при  $R > 0$ ) можно почленно интегрировать, причем радиус сходимости полученного ряда также равен  $R$ .

$$\int_0^x S(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} \quad \forall x \in (-R; +R)$$

## Примеры.

$$1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad -1 < x < +1$$

$$1 - x + x^2 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$$

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x)$$

# Лекция 4



**Брук Тейлор**  
1685—1731

Английский математик,  
ученик Исаака Ньютона.

Обладая большими  
математическими  
способностями, он в то же  
время был весьма хорошим  
музыкантом и успешно  
занимался живописью. Под  
конец жизни он предался  
исследованиям по  
вопросам религии и  
философии.



**Колин МакЛорен**  
(1698-1746)

## Шотландский математик

В университете Глазго его блестящие математические способности так развились, что в возрасте 15 лет он уже открыл несколько теорем.

В 19 лет пройдя конкурсный отбор, он занял кафедру профессора математики в Абердине.

Научные результаты - в геометрии, алгебре, анализе, теории кривых, теории рядов, теории приливов и др.

# Свойства равномерно сходящихся степенных рядов

## Свойство 1.

Степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  равномерно сходится внутри интервала сходимости (при  $R > 0$ ).

## Свойство 2.

Сумма степенного ряда  $S(x)$  – непрерывная функция внутри интервала сходимости при  $R > 0$ .

### Свойство 3.

Сумма степенного ряда  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

внутри интервала сходимости (при  $R > 0$ ) имеет производные любого порядка, получаемые почленным дифференцированием ряда, причём радиусы сходимости полученных рядов также равны  $R$ .

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

## Свойство 4.

Степенной ряд  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  внутри

интервала сходимости (при  $R > 0$ ) можно почленно интегрировать, причем радиус сходимости полученного ряда также равен  $R$ .

$$\int_0^x S(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$$

$$\forall x \in (-R; +R)$$



## Примеры.

$$1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$-1 < x < +1$$

$$1 - x + x^2 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$$

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \left( \frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x)$$

# Разложение функций в степенные ряды

Формула Тейлора для функции  $f(x)$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x); \quad R_n(x) - \text{остаточный член}$$

Ряд Тейлора для функции  $f(x)$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

## Ряд Маклорена ( $x_0 = 0$ )

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

### Замечание:

Ряд Тейлора для функции  $f(x)$  необязательно сходится к функции  $f(x)$ .

### *Контрпример.*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при } x \neq 0 \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n$$

# Условия разложимости функции в ряд Тейлора

## Теорема Тейлора

Для того, чтобы ряд Тейлора функции  $f(x)$  сходилась к  $f(x)$  в точке  $x$ , необходимо и достаточно, чтобы в этой точке остаточный член формулы Тейлора стремился к нулю при  $n \rightarrow \infty$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

# Таблица основных разложений

**1.** 
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

**2.** 
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

**3.** 
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

**4.** 
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad x \in (-1; +1]$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{5.} \quad (1+x)^a &= 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \dots = & [-1;1] \text{ npu } a \geq 0 \\
 & & (-1;1] \text{ npu } -1 < a < 0 \\
 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}x^n & (-1;1) \text{ npu } a \leq -1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{6.} \quad \arcsin x &= x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\
 & & x \in [-1;1]
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{7.} \quad \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad x \in [-1;1]$$

$$\mathbf{8.} \quad \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$\mathbf{9.} \quad \operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

Вывод формул **1-9**.

# Приближенное вычисление определенных интегралов

- Разложить подынтегральную функцию в степенной ряд, пользуясь таблицей;
- Проинтегрировать ряд почленно в интервале равномерной сходимости;
- Вычислить члены ряда до достижения необходимой точности;
- Вычислить сумму ряда.



Вычислить с точностью до 0,001

Решение.

$$\int_0^{0,5} e^{-x^2} dx$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$$

$$\int_0^{0,5} e^{-x^2} dx = \left( x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots \right) \Bigg|_0^{0,5} =$$

$$\int_0^{0,5} e^{-x^2} dx = 0,5 - 0,0417 + 0,0031 - 0,0002 + \dots \approx 0,4612$$

Ответ:  $\int_0^{0,5} e^{-x^2} dx \approx 0,461$

Вычислить с точностью до 0,001

$$\int_0^{0,5} x^2 \ln(1 + \sqrt{x}) dx.$$

Решение.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots \quad x \in (-1; +1]$$

$$\ln(1+\sqrt{x}) = \sqrt{x} - \frac{x}{2} + \frac{x^{1,5}}{3} - \frac{x^2}{4} \dots \quad x \in [0; 1]$$

$$x^2 \ln(1+\sqrt{x}) = x^{2,5} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^{3,5}}{3} - \frac{x^4}{4} \dots$$

$$\int_0^{0,5} x^2 \ln(1+\sqrt{x}) dx = \frac{x^{3,5}}{3,5} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^{4,5}}{13,5} - \frac{x^5}{20} + \dots \bigg|_0^{0,5}$$

(внутри интервала сходимости)

$$\int_0^{0,5} x^2 \ln(1 + \sqrt{x}) dx = 0,0253 - 0,0078 + 0,0033 - \\ -0,0016 + 0,0007 - \dots$$

Ответ:  $\int_0^{0,5} x^2 \ln(1 + \sqrt{x}) dx \approx 0,019$