




Лекция 4

Теорема 4. Структура общего решения уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  .

Если y_1 и y_2 - два линейно независимых частных решения уравнения , то общее решение имеет вид $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, где C_1, C_2 - произвольные постоянные.

Доказательство.

- 1) по теореме 1 $y(x)$ есть решение уравнения 
- 2) Докажем, что это общее решение, т.е. для любых начальных условий можно найти C_1, C_2

Пусть начальные условия $y(x_0) = y_0; y'(x_0) = y'_0;$
 $x_0 \in (a; b)$

Тогда
$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) \\ y'_0 = C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0) \end{cases}$$

Эта система линейных уравнений с неизвестными C_1, C_2 имеет единственное решение, т.к.

определитель системы $\Delta = W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0.$

(теорема Кронекера-Капелли)

Следовательно, задача Коши разрешима,

и $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ - общее решение
уравнения




Фундаментальная система решений уравнения

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad \text{1}$$


это совокупность линейно независимых частных решений **1** такая, что любое другое частное решение есть линейная комбинация этой системы.

Для уравнения **1** любые два линейно независимых частных решения образуют фундаментальную систему решений.




Линейные неоднородные дифференциальные уравнения 2 порядка

Общий вид: $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 


Соответствующее ему однородное уравнение:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$
 

Теорема. Структура общего решения уравнения  .

Общим решением ДУ  является сумма общего решения ДУ  $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ и какого-либо частного решения y^* ДУ  , т.е. $y = \bar{y} + y^*$.

Доказательство.

1) Докажем, что $y = \bar{y} + y^*$ - решение ДУ 

$$\begin{aligned} & (\bar{y} + y^*)'' + p(\bar{y} + y^*)' + q(\bar{y} + y^*) = \\ & = \underbrace{(\bar{y})'' + p(\bar{y})' + q\bar{y}}_0 + \underbrace{(y^*)'' + p(y^*)' + qy^*}_{f(x)} = f(x) \end{aligned}$$

2) Докажем, что это общее решение. Пусть даны
какие-то начальные условия $y(x_0) = y_0; y'(x_0) = y'_0$;

Тогда

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + y^*(x_0) = y_0 \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + (y^*)'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

Эта система линейных уравнений с неизвестными C_1, C_2 имеет единственное решение, т.к.
определитель системы есть не равный нулю
определитель Вронского $\Delta = W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$
(следует из теоремы Кронекера–Капелли)

Теорема (о наложении решений)

Пусть y_1^* - частное решение ДУ $y'' + py' + qy = f_1(x)$
и y_2^* - частное решение ДУ $y'' + py' + qy = f_2(x)$
тогда $y^* = y_1^* + y_2^*$ - решение ДУ

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x) .$$

(доказать самостоятельно)

Линейные ДУ 2 порядка с постоянными коэффициентами без правой части (однородные)

Общий вид

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (1)$$

где p, q – постоянные коэффициенты.

Будем искать частные решения в виде $y = e^{kx}$.
Тогда $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$.

Подставим в уравнение:

$$k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0 \quad \text{или} \quad e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$$

$$k^2 + pk + q = 0$$

- **характеристическое уравнение.**

Дискриминант $D = p^2 - 4q$

Возможны 3 случая:

1) $D > 0$;

2) $D = 0$;

3) $D < 0$;

Случай 1. Дискриминант характеристического уравнения больше нуля: $D = p^2 - 4q > 0$.

Тогда это уравнение имеет два различных корня $k_1 \neq k_2$

В этом случае функции $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$ линейно независимые решения ДУ **1** и они образуют **фундаментальную систему решений**.

Общее решение запишем в виде: $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$

Пример. Решить уравнение $y'' + 5y' + 6y = 0$.

Решение. Выпишем характеристическое уравнение

$$k^2 + 5k + 6 = 0 \quad \text{Дискриминант} \quad D = 25 - 24 = 1 > 0$$

Корни $k_1 = -3$; $k_2 = -2$. Общее решение:

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x}$$

Случай 2. Дискриминант характеристического уравнения равен нулю: $D = p^2 - 4q = 0$.

Тогда это уравнение имеет два равных корня $k_1 = k_2 = k$

В этом случае функция $y_1 = e^{kx}$ - одно из частных решений. Второе, линейно независимое от первого, будем искать в виде: $y_2 = xe^{kx}$.

Убедимся, что это решение уравнения ①: подставим

$$y_2' = e^{kx} + kxe^{kx}; \quad y_2'' = ke^{kx} + ke^{kx} + k^2xe^{kx};$$

$$(2ke^{kx} + k^2xe^{kx}) + p(xe^{kx} + ke^{kx}) + qxe^{kx} =$$

$$= e^{kx} (2k + k^2x + p + pkx + qx) =$$

$$= e^{kx} \left(\underbrace{x(k^2 + pk + q)}_0 + \underbrace{(p + 2k)}_0 \right) = 0$$

Таким образом, линейно независимые функции

$$y_1 = e^{kx} \quad \text{и} \quad y_2 = xe^{kx}$$

образуют **фундаментальную систему решений** уравнения ① и общее решение имеет вид:

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$$

Пример. Решить уравнение $y'' - 6y' + 9y = 0$

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 - 6k + 9 = 0$ имеет два равных корня $k_1 = k_2 = 3$.

Общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$$

Случай 3. Дискриминант характеристического уравнения меньше нуля. Корни его – два комплексных сопряженных числа

$$k_1 = \alpha + i\beta; \quad k_2 = \alpha - i\beta, \quad \text{где} \quad \alpha = -\frac{p}{2}; \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

Соответствующие решения

$$y_1 = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x); \quad y_2 = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

- это *комплексные функции*.

Найдём два *действительных* частных решения ДУ **1**

$$\tilde{y}_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x} \cos \beta x; \quad \tilde{y}_2 = \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Решения \tilde{y}_1 и \tilde{y}_2 образуют **фундаментальную систему решений**, т.к. $W(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \neq 0$

(доказать самостоятельно)

Итак, общее решение уравнения **1** в случае 3:

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

Пример. Решить уравнение $y'' + 2y' + 5y = 0$

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 2k + 5 = 0$

Дискриминант $D = 4 - 20 = -16 < 0$. Корни $k = -1 \pm 4i$

т.е. $\alpha = -1; \beta = 4$ Тогда общее решение имеет вид:

$$y = e^{-x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$$

Линейные ДУ 2 порядка с постоянными коэффициентами с правой частью (неоднородные)

Общий вид: $y'' + py' + qy = f(x)$ 2 где p, q - постоянные коэффициенты, правая часть $f(x)$ - некоторая функция.

По теореме (о структуре) общий вид решения: $y = \bar{y} + y^*$ где \bar{y} - общее решение соответствующего однородного уравнения, а y^* - какое-либо частное решение ДУ 2

Поиск y^* зависит от правой части (функции $f(x)$).

Рассмотрим случаи, когда $f(x)$ имеет

«специальный вид»

Случай 1: Правая часть имеет вид $f(x) = ae^{\alpha x}$.

Тогда будем искать частное решение y^* в подобном же виде: $y^* = Ae^{\alpha x}$.

Однако, если один из корней характеристического уравнения равен α , то полагаем $y^* = Axe^{\alpha x}$

Если же оба корня характеристического уравнения равны α : $k_1 = k_2 = \alpha$, то полагаем $y^* = Ax^2e^{\alpha x}$

Коэффициент A находится методом неопределенных коэффициентов.

Пример.

$$y'' - 3y' + 2y = 12e^{-x}$$

Случай 2. Правая часть есть многочлен степени m от x

$$f(x) = P_m(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$$

Тогда ищем y^* в виде $y^* = R_m(x) = A_0 + A_1x + \cdots + A_mx^m$

Однако, если один из корней характеристического уравнения равен нулю, то полагаем

$$y^* = xR_m(x) = A_0x + A_1x^2 + \cdots + A_mx^{m+1}$$

Пример. $y'' - 3y' = x + 1; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 1.$

Случай 3. Правая часть есть линейная комбинация тригонометрических функций $f(x) = a \cos \beta x + b \sin \beta x$

Тогда ищем частное решение в виде

$$y^* = A \cos \beta x + B \sin \beta x$$

Однако, если корни характеристического уравнения

$$k_{1,2} = \pm i \beta, \text{ то полагаем } y^* = x(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$$

Случай 4.

Правая часть

$$y^* = R_m(x)e^{\alpha x}$$

В этом случае $y^* = R_m(x)e^{\alpha x}$

Если же один из корней характеристического уравнения равен α , то, как всегда в этом случае, умножаем y^* на x

$$y^* = xR_m(x)e^{\alpha x}$$

Если оба корня равны α , то умножаем y^* на x^2

$$y^* = x^2 R_m(x)e^{\alpha x}$$

Случай 5 (наиболее общий). Правая часть имеет вид:

$$f(x) = (P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x) e^{\alpha x}$$

При отсутствии «резонанса» ищем y^* в виде

$$y^* = (R_l(x) \cos \beta x + S_l(x) \sin \beta x) e^{\alpha x}$$

где $l = \max(m, n)$

Если же корни характеристического уравнения

$$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \text{ то}$$

$$y^* = x(R_l(x) \cos \beta x + S_l(x) \sin \beta x) e^{\alpha x}$$