

Лекция 3

Дифференциальные уравнения высших порядков

- **Уравнения второго порядка** (общий вид)

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (*)$$

Вид, разрешенный относительно старшей производной

$$y'' = f(x, y, y')$$

Общее решение - функция $y = \varphi(x, c_1, c_2)$, где

c_1, c_2 - произвольные постоянные,
обращающая уравнение в тождество
и удовлетворяющая любым начальным условиям:

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0$$

Задача нахождения частного решения ДУ, удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется **задачей Коши**.

График всякого решения ДУ - **интегральная кривая**.

Теорема (существования и единственности решения задачи Коши)

Если в уравнении $y'' = f(x, y, y')$ функция f и её частные производные f'_y и f''_y непрерывны в области D , то для всякой точки (x_0, y_0, y'_0) из D существует единственное решение $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее этим начальным условиям.

Уравнения, допускающие понижение порядка

Рассмотрим 3 частных случая ДУ 2 порядка

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (*)$$

Случай 1. Уравнение $(*)$ не содержит y и y' .

Пусть тогда $y'' = f(x)$.

Двукратное интегрирование даёт общее решение

$$y = \int \left(\int f(x) dx + C_1 \right) dx + C_2$$

Пример. $y'' = 6x$; $y' = 3x^2 + c_1$; $y = x^3 + c_1x + c_2$

Случай 2. Уравнение $(*)$ не содержит y .

Пусть тогда $y'' = f(x, y')$.

Сделаем подстановку $y' = p(x)$; при этом $y'' = p'(x)$;

и уравнение примет вид $p' = f(x, p)$.

Это ДУ 1 порядка.

Пример. Решить уравнение $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$

Решение: после подстановки $y' = p(x)$; $y'' = p'(x)$;

получим $p' + p \operatorname{tg} x = \sin 2x$

Это линейное уравнение 1 порядка. Решим его методом Бернулли.

Представим неизвестную функцию $p(x)$ как

$$p(x) = u \cdot v$$

Тогда получим $v' + v \cdot \operatorname{tg} x = 0$ и отсюда $v = \cos x$

Тогда $u' \cos x = \sin 2x$; $u' = 2 \sin x$;

$$u = -2 \cos x + c_1;$$

Следовательно, $p(x) = -2 \cos^2 x + c_1 \cdot \cos x$;

то есть $y' = -2 \cos^2 x + c_1 \cdot \cos x$;

интегрируя, получим

$$y = -x - \frac{1}{2} \sin 2x + c_1 \sin x + c_2$$

Случай 3. Уравнение $(*)$ не содержит x :

$$F(y, y', y'') = 0$$

Сделаем подстановку $y' = p(y)$. Тогда

$$y'' = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p'_y \cdot p.$$

Уравнение примет вид $F(y, p, p') = 0$. Это ДУ 1 порядка.

Пример. $y'' \cdot \operatorname{tg} y = 2(y')^2$.

Вышеприведенная подстановка приводит к виду

$$p'_y \cdot p \cdot \operatorname{tg} y = 2p^2 \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{2}{\operatorname{tg} y} dy \Rightarrow$$

$$\ln p = 2 \ln \sin y + \ln c_1 \Rightarrow p = c_1 \sin^2 y;$$

то есть $y' = c_1 \sin^2 y$

Решим полученное уравнение.

$$y' = c_1 \sin^2 y; \Rightarrow \frac{dy}{\sin^2 y} = c_1 dx \Rightarrow -\operatorname{ctg} y = c_1 x + c_2;$$

Ответ запишем в виде $y = \operatorname{arcctg}(c_1 x + c_2)$


Замечание. Сократив на p в начале преобразований, мы могли потерять так называемое **особое решение**:

$$p = 0 \Rightarrow y = c$$


Таким образом, общее решение уравнения

$$y = \operatorname{arcctg}(c_1 x + c_2) \text{ и } y = c.$$


Линейные однородные дифференциальные уравнения 2 порядка

Общий вид: $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ ,
где $p(x)$ и $q(x)$ - известные функции.

Свойства решений уравнения

Теорема 1. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - частные решения ,
то решением является также и

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \quad \forall C_1, C_2 \in R$$

Доказательство. Подставим $y(x)$ в 

$$\begin{aligned} (C_1 y_1'' + C_2 y_2'') + p(C_1 y_1' + C_2 y_2') + q(C_1 y_1 + C_2 y_2) = \\ C_1 \underbrace{(y_1'' + p y_1' + q y_1)}_0 + C_2 \underbrace{(y_2'' + p y_2' + q y_2)}_0 = 0 \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Две функции $f(x)$ и $g(x)$ линейно независимы на $[a;b]$,
если $c_1 f(x) + c_2 g(x) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$,

т.е. линейная комбинация $c_1 f + c_2 g$ линейно
независимых функций равна нулю тогда и только
тогда, когда коэффициенты c_1, c_2 равны нулю.

Если же f и g линейно зависимы, то $\frac{f(x)}{g(x)} = \text{const}$

Например, $e^x, 5e^x$ - линейно зависимы;

e^x, e^{-x} - линейно независимы;

$\sin x, \cos x$ - линейно независимы;

x, x^2 - линейно независимы.

Определитель Вронского (вронскиан) двух
гладких функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$:

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

Имеем

$$W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2 ;$$

$$W'(x) = y_1' y_2' - y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2 =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}$$

Польский математик, философ-мистик. Окончил артиллерийскую школу, принимал участие в обороне Варшавы, служил в штабе Суворова.

В 21 год вышел в отставку, изучал юридические науки, историю философии и высшую математику.

Его математические работы отмечены широтой охвата материала и общностью постановки задач. Они могли произвести переворот в науке. Но его болезненная гордость, склонность к мистицизму и, наконец, сложность использованных обозначений, помешали этому.

Уже после его смерти обнаружено его авторство многих методов и теорем, открытых позже другими математиками.



**Юзеф Мария
(Хёне)
Вроньский
1776-1853**

Теорема 2. Если гладкие функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы на $(a;b)$, то

$$W(y_1, y_2)(x) \equiv 0 \quad \forall x \in (a;b)$$

Доказательство.

Пусть $y_1(x) = ky_2(x)$, тогда $y_1' = ky_2'$ и

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} ky_2 & y_2 \\ ky_2' & y_2' \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} y_2 & y_2 \\ y_2' & y_2' \end{vmatrix} = 0$$

Теорема 3. Если y_1 и y_2 - линейно независимые на $(a;b)$ решения уравнения  ,

$$\text{то } W(y_1, y_2) \neq 0 \quad \forall x \in (a;b)$$

Доказательство.

Так как y_1 и y_2 - решения ур-я  , то

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0 \quad \text{и} \quad y_2'' + py_2' + qy_2 = 0$$

Умножим первое уравнение на y_2 , второе – на y_1
и вычтем из второго уравнения первое уравнение.

Получим $(y_1y_2'' - y_1''y_2) + p(y_1y_2' - y_1'y_2) = 0$, т.е.

$$W' + pW = 0;$$

решаем полученное дифференциальное уравнение

$$\frac{dW}{dx} = -pW; \quad \frac{dW}{W} = -pdx; \quad \ln W = -\int p dx + \ln C$$


$$W = Ce^{-\int p(x) dx} \quad \langle C > 0 \rangle$$

Т.к. $W > 0 \quad \forall x \in (a; b)$, и теорема доказана.


$$W = W_0 e^{-\int_{x_0}^x p(x) dx}$$

- **формула Лиувилля**

Теорема 4 (Структура общего решения уравнения).

Если y_1 и y_2 - два линейно независимых частных решения уравнения , то общее решение имеет вид $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, где C_1, C_2 - произвольные постоянные.

Доказательство.

- 1) по теореме 1 $y(x)$ есть решение уравнения 
- 2) Докажем, что это общее решение, т.е. для любых начальных условий можно найти C_1, C_2

Пусть начальные условия $y(x_0) = y_0; y'(x_0) = y'_0;$
 $x_0 \in (a; b)$

Тогда
$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) \\ y'_0 = C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0) \end{cases}$$

Эта система линейных уравнений с неизвестными C_1, C_2 имеет единственное решение, т.к. определитель системы не равен нулю.

$$\Delta = W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$$

(теорема 3 и теорема Кронекера-Капелли).

Следовательно, задача Коши разрешима,

и $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ - общее решение
уравнения

