

Лекция 6

Операционное исчисление

Операционное исчисление — один из методов математического анализа, позволяющий в ряде случаев с помощью весьма простых средств решать сложные математические задачи.

В основе метода лежит идея замены изучаемых функций (оригиналов) некоторыми другими функциями (изображениями), получаемыми из первых по определённому правилу (преобразованием Лапласа).

У истоков операционного исчисления стоят Лаплас, О.Хевисайд, М.Ващенко-Захарченко, Дюамель и др.

Исчисление окончательно сформировалось к середине XX века.

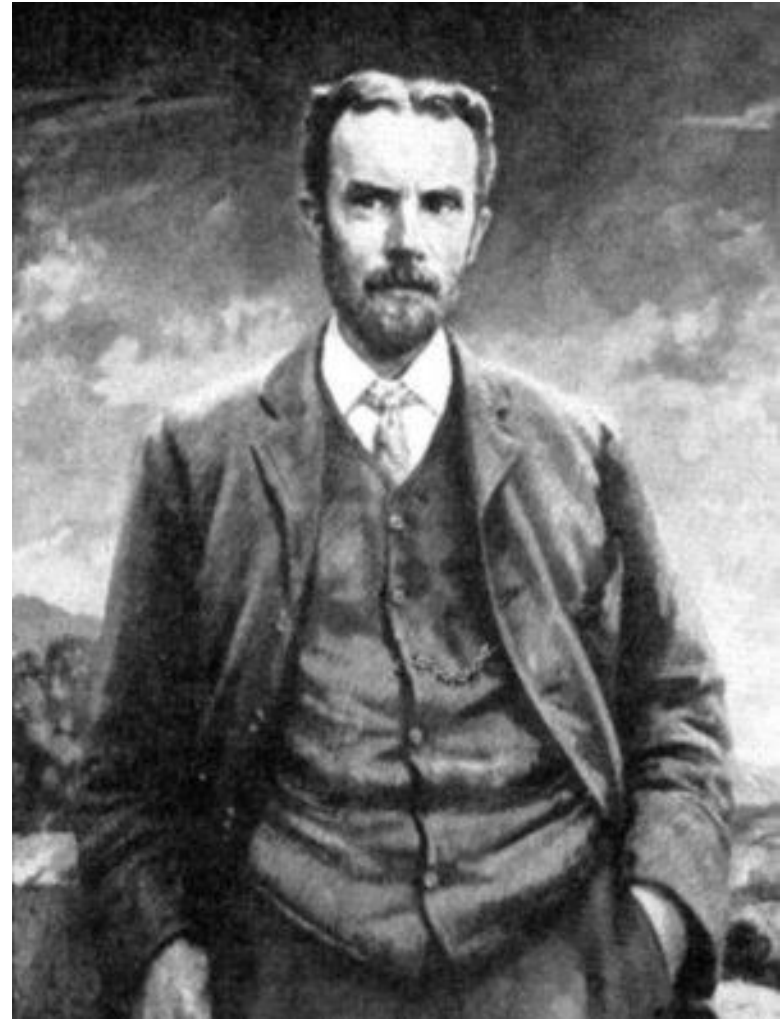
Французский математик, механик, физик и астроном; известен работами в области небесной механики, дифференциальных уравнений, один из создателей теории вероятностей.

Заслуги Лапласа в области чистой и прикладной математики и особенно в астрономии громадны: он усовершенствовал почти все разделы этих наук.



Пьер-Симон, маркиз де **Лаплас**
1749 — 1827

Английский учёный-самоучка, инженер, математик и физик. Впервые применил комплексные числа для изучения электрических цепей, разработал технику применения преобразования Лапласа для решения дифференциальных уравнений, переформулировал уравнения Максвелла в современных терминах и, независимо от других математиков, создал векторный анализ. Несмотря на то, что Хевисайд большую часть жизни был не в ладах с научным сообществом, его работы изменили облик математики и физики.



Оливер Хэвисайд
(1850 – 1925)

Основные определения

- **Оригиналом** называется функция $f(t)$ действительного переменного, удовлетворяющая условиям:
 - 1) $f(t)$ вместе со своей производной $f'(t)$ непрерывна на всей оси t , за возможным исключением точек разрыва I рода, причем на каждом конечном интервале оси таких точек имеется лишь конечное число. Т.е. **$f(t)$ – кусочно непрерывна.**
 - 2) $f(t) = 0$ при $t < 0$.
 - 3) существуют такие постоянные $M > 0$ и $S_0 \geq 0$, что для всякого t
$$|f(t)| < M \cdot e^{s_0 t}$$

Замечания к определению:

- Условие 1) исключает из класса оригиналов функции

$$\frac{1}{t}, \quad \operatorname{tg} t, \quad \sin \frac{1}{t}$$

- Из условия 2) следует, например:

$$f(t) = t^2 \text{ означает } f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ t^2 & \text{при } t \geq 0 \end{cases}$$

- Условие 3) означает, что оригинал растёт не быстрее, чем экспонента, т.е. функции

$$f(t) = e^{t^2}, \quad f(t) = t^t$$

не являются оригиналами.

Изображением оригинала $f(t)$ называется функция комплексного переменного, вычисляемая по формуле

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt$$

Переход от оригинала $f(t)$ к изображению $F(p)$ есть **преобразование Лапласа.**

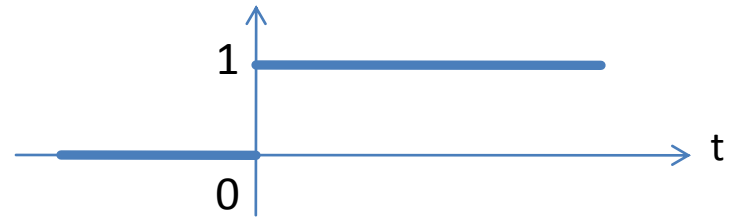
Обозначения: $f(t) \div F(p)$ или $L\{f(t)\} = F(p)$

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

Обозначения: $f(t) \doteq F(p)$ или $f(t) \dot{=} F(p)$ или $f(t) \div F(p)$.

Единичная функция Хевисайда

$$\chi(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ 1 & \text{при } t \geq 0 \end{cases}$$



Найдём изображение $\chi(t)$:

$$F(p) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = \left. \frac{e^{-pt}}{-p} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{p}$$

(при $\operatorname{Re} p > 0$)

Найдём изображение функции $f(t) = e^{at}$

$$L\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-pt} dt = \frac{e^{-(p-a)t}}{-(p-a)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p-a}$$

Необходимо отметить, что несобственный интеграл сходится, если наложить условие: $\operatorname{Re} p > a$

Тогда

$$e^{-(p-a)t} = e^{-(\operatorname{Re} p - a)t} \cdot e^{i(\operatorname{Im} p)t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$$

В дальнейшем это всегда предполагается.

- Теорема о существовании изображения

Изображение $L\{f(t)\} = F(p)$ определено в комплексной полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$, где s_0 - показатель роста $f(t)$.

- Теорема о единственности оригинала

Если $L\{f_1(t)\} = L\{f_2(t)\}$, то $f_1(t) = f_2(t)$

т.е. у **разных** оригиналов **разные** изображения.

Свойства преобразования Лапласа

1. Теорема линейности

Если $f_1(t) \div F_1(p)$, $f_2(t) \div F_2(p)$, то $\forall \alpha, \beta \in R$

$$\alpha \cdot f_1(t) + \beta \cdot f_2(t) \div \alpha \cdot F_1(p) + \beta \cdot F_2(p)$$

т.е. линейная комбинация оригиналов
преобразуется в такую же линейную
комбинацию соответствующих изображений.

Предлагается доказать самостоятельно.

Пример 1. $2 + 3e^{4t} \div \frac{2}{p} + \frac{3}{p-4}$

Пример 2.

$$\begin{aligned}\sin t &= \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \stackrel{.}{=} \\ &\stackrel{.}{=} \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p-i} - \frac{1}{p+i} \right) = \frac{1}{2i} \cdot \frac{2i}{p^2+1} = \frac{1}{p^2+1}.\end{aligned}$$

Пример 3.

$$\begin{aligned}\cos t &= \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \stackrel{.}{=} \\ &\stackrel{.}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-i} + \frac{1}{p+i} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2p}{p^2+1} = \frac{p}{p^2+1}.\end{aligned}$$

2. Теорема подобия

Если $f(t) \div F(p)$ и $a > 0$, то $f(at) \div \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$

Доказательство.

$$\begin{aligned} L\{f(at)\} &= \int_0^{\infty} f(at) \cdot e^{-pt} dt = \left| \begin{array}{l} z = at \\ dz = a dt \end{array} \right| = \\ &= \int_0^{\infty} f(at) \cdot e^{-\frac{p}{a}(at)} \frac{1}{a} d(at) = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(z) \cdot e^{-\frac{p}{a}z} dz = \\ &= \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) \end{aligned}$$

Пример 4.

$$\sin t \doteq \frac{1}{p^2 + 1}; \quad \sin \omega t \doteq \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2};$$

Пример 5.

$$\cos t \doteq \frac{p}{p^2 + 1}; \quad \cos \omega t \doteq \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\frac{p}{\omega}}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{p}{p^2 + \omega^2};$$

Обратная задача.

По данному изображению найти оригинал.

Например, $F(p) = \frac{1}{(p-a)(p-b)}$; - изображение

Тогда $\frac{1}{(p-a)(p-b)} = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{p-a} + \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{p-b}$;

Поэтому $f(t) = \frac{1}{a-b} \cdot e^{at} + \frac{1}{b-a} \cdot e^{bt}$; - оригинал

3. Дифференцирование оригинала

Если $f(t)$ – оригинал с показателем роста s ,
существует $f'(t)$ – также оригинал и $f(t) \div F(p)$,

то $f'(t) \div pF(p) - f(0)$ при $\operatorname{Re} p > s$

Доказательство.

$$\begin{aligned} L\{f'(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt = \left| \begin{array}{ll} u = e^{-pt} & dv = f'(t) dt \\ du = -pe^{-pt} & v = f(t) \end{array} \right| = \\ &= e^{-pt} f(t) \Big|_0^{\infty} + p \cdot \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = 0 - f(0) + pF(p). \end{aligned}$$

Следствие.

$$f''(t) \div p^2 F(p) - p \cdot f(0) - f'(0);$$

$$f'''(t) \div p^3 F(p) - p^2 \cdot f(0) - p \cdot f'(0) - f''(0);$$

Пример 6. Найти изображение $f(t) = \cos^2 t$;

$$f'(t) = -2 \sin t \cdot \cos t = -\sin 2t \div -\frac{2}{p^2 + 4};$$

$$f'(t) \div pF(p) - 1 = -\frac{2}{p^2 + 4};$$

$$F(p) = \frac{p^2 + 2}{p(p^2 + 4)}.$$

4. Дифференцирование изображения

Пусть $f(t) \doteq F(p)$. Тогда $F'(p) \doteq (-t) \cdot f(t)$

Доказательство.

$$F'(p) = \left(\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \right)'_p = \int_0^{\infty} f(t) \left(e^{-pt} \right)'_p dt = \int_0^{\infty} ((-t) f(t)) e^{-pt} dt \doteq (-t) f(t).$$

Следствие. $F''(p) \doteq t^2 \cdot f(t)$

$$F^{(n)}(p) \doteq (-t)^n \cdot f(t)$$

Пример 7. Найти изображение $f(t) = t^n$.

Имеем:

$$-t = (-t) \chi(t) \doteq \left(\frac{1}{p} \right)' = -\frac{1}{p^2}$$

Тогда

$$t \doteq \frac{1}{p^2}; \quad t^2 \doteq \frac{2}{p^3}; \quad \dots \quad t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Пример 8. Найти изображение $f(t) = te^{at}$

Известно: $e^{at} \doteq \frac{1}{p-a};$

Тогда $te^{at} \doteq -\left(\frac{1}{p-a} \right)' = \frac{1}{(p-a)^2};$