

# ЛЕКЦИЯ 5

# Линейные ДУ 2 порядка с постоянными коэффициентами с правой частью (неоднородные)

Общий вид:  $y'' + py' + qy = f(x)$  2 где  $p, q$  - постоянные коэффициенты, правая часть  $f(x)$  - некоторая функция.

По теореме (о структуре) общий вид решения:  $y = \bar{y} + y^*$  где  $\bar{y}$  - общее решение соответствующего однородного уравнения, а  $y^*$  - какое-либо частное решение ДУ 2

Поиск  $y^*$  зависит от правой части (функции  $f(x)$ ).

Рассмотрим случаи, когда  $f(x)$  имеет

«специальный вид»

## Вариант 1 (экспонента):

Правая часть имеет вид  $f(x) = ae^{\alpha x}$ .

Тогда будем искать частное решение  $y^*$  в виде:

•  $y^* = Ae^{\alpha x}$

Однако, если один из корней характеристического уравнения равен  $\alpha$ , то полагаем  $y^* = Axe^{\alpha x}$

Если же оба корня характеристического уравнения равны  $\alpha$ :  $k_1 = k_2 = \alpha$ , то полагаем

$$y^* = Ax^2 e^{\alpha x}$$

Коэффициент  $A$  находится методом неопределенных коэффициентов.

## Вариант 2 (многочлен):

Правая часть есть многочлен степени  $m$  от  $x$

$$f(x) = P_m(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$$

Тогда ищем  $y^*$  в виде

$$y^* = R_m(x) = A_0 + A_1x + \dots + A_mx^m$$

Однако, если один из корней характеристического уравнения равен нулю, то полагаем

$$y^* = xR_m(x) = A_0x + A_1x^2 + \dots + A_mx^{m+1}$$

### Вариант 3 («тригонометрия»):

Правая часть есть линейная комбинация тригонометрических функций

$$f(x) = a \cos \beta x + b \sin \beta x$$

Тогда ищем частное решение в виде

$$y^* = A \cos \beta x + B \sin \beta x$$

Однако, если корни характеристического уравнения  $k_{1,2} = \pm i\beta$ , то полагаем

$$y^* = x(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$$

## Вариант 4 (многочлен с экспонентой):

Правая часть имеет вид  $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$

В этом случае  $y^* = R_m(x)e^{\alpha x}$

Если же один из корней характеристического уравнения равен  $\alpha$ , то, как всегда в этом случае, умножаем  $y^*$  на  $x$

$$y^* = xR_m(x)e^{\alpha x}$$

Если оба корня равны  $\alpha$ , то умножаем  $y^*$  на  $x^2$

$$y^* = x^2 R_m(x)e^{\alpha x}$$

**Вариант 5 (наиболее общий).** Правая часть имеет

вид: 
$$f(x) = (P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x) e^{\alpha x}$$

При отсутствии «резонанса» ищем  $y^*$  в виде

$$y^* = (R_l(x) \cos \beta x + S_l(x) \sin \beta x) e^{\alpha x}$$

где  $l = \max(m, n)$

Если же корни характеристического уравнения

$$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \text{ то}$$

$$y^* = x(R_l(x) \cos \beta x + S_l(x) \sin \beta x) e^{\alpha x}$$

# Решение линейных неоднородных ДУ второго порядка методом вариации произвольных постоянных

Общее решение уравнения  $y'' + py' + qy = f(x)$  ②

$$y = \bar{y} + y^*$$

Частное решение  $y^*$  можно найти **методом Лагранжа** (методом вариации произвольных постоянных).

Пусть  $\bar{y} = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$  общее решение соответствующего однородного уравнения ①

Будем считать, что  $c_1 = c_1(x)$ ,  $c_2 = c_2(x)$  такие, что

$y^* = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$  решение уравнения ②



Имеем  $(y^*)' = c_1' y_1 + c_1 y_1' + c_2' y_2 + c_2 y_2'$  ;

Подберём  $c_1(x), c_2(x)$  так, чтобы  $c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$

Тогда  $(y^*)' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$  ;

$$(y^*)'' = c_1' y_1' + c_1 y_1'' + c_2' y_2' + c_2 y_2'' ;$$

Подставим  $y^*, (y^*)', (y^*)''$  в уравнение ② :

$$c_1' y_1' + c_1 y_1'' + c_2' y_2' + c_2 y_2'' + p(c_1 y_1' + c_2 y_2') +$$

$$+ q(c_1 y_1 + c_2 y_2) = f(x) ;$$

или

$$c_1 \underbrace{(y_1'' + p y_1' + q y_1)}_0 + c_2 \underbrace{(y_2'' + p y_2' + q y_2)}_0 + c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x)$$

Следовательно,  $c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x)$

Получаем

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x) \end{cases}$$

Система имеет единственное решение (почему?)

Пример.  $y'' + 4y = \frac{1}{\cos^2 x}.$

характеристическое уравнение:  $k^2 + 4 = 0$ ;  $k_{1,2} = \pm 2i$ .

Ищем решение в виде

$$y = \bar{y} + y^*, \text{ где}$$

$$\bar{y} = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x;$$

$$y^* = c_1(x) \cos 2x + c_2(x) \sin 2x;$$

Получаем

$$\begin{cases} c_1'(x) \cos 2x + c_2'(x) \sin 2x = 0 \\ c_1'(x)(-2 \sin 2x) + c_2'(x) 2 \cos 2x = \frac{1}{\cos^2 x} \end{cases}$$

Решаем эту систему методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2 \sin 2x & 2 \cos 2x \end{vmatrix} = 2 \cos^2 2x + 2 \sin^2 2x = 2;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \frac{1}{\cos^2 x} & 2 \cos 2x \end{vmatrix} = \frac{-\sin 2x}{\cos^2 x} = \frac{-2 \sin x}{\cos x};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\sin 2x & \frac{1}{\cos^2 x} \end{vmatrix} = \frac{\cos 2x}{\cos^2 x};$$

Следовательно:

$$c_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{\sin x}{\cos x};$$

$$c_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\cos 2x}{2\cos^2 x} = 1 - \frac{1}{2\cos^2 x};$$

Интегрируя, получим

$$c_1(x) = \ln(\cos x); \quad c_2(x) = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{tg} x;$$

Общее решение:  $y = \bar{y} + y^* =$

$$= c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \ln \cos x \cdot \cos 2x + \left( x - \frac{1}{2} \operatorname{tg} x \right) \cdot \sin 2x.$$

# Системы линейных ДУ с

## Общий вид:

[illegible]

$y_1, y_2, \dots, y_n$  - неизвестные (искомые) функции

Ограничимся случаем  $n=2$ :

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases}$$

Рассмотрим два метода решения системы

- 1) сведение к одному уравнению 2 порядка;
- 2) матричный метод.

## 1) Сведение к одному уравнению.

Дифференцируем, например, 1-ое уравнение системы

$$y_1'' = a_{11}y_1' + a_{12}y_2'$$

и подставим из второго уравнения  $y_2'$ . Получим

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_1'' = a_{11}y_1' + a_{12}(a_{21}y_1 + a_{22}y_2) \end{cases}$$

В итоге будем иметь

$$y_1'' - \underbrace{(a_{11} + a_{22})}_p y_1' + \underbrace{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}_q y_1 = 0$$

или

$$y_1'' + p \cdot y_1' + q \cdot y_1 = 0.$$

Решение таких уравнений рассмотрено ранее.



Пример.

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2 \end{cases}$$

приводится к виду

$$y_1'' - 6y_1' + 5y_1 = 0$$

Корни характеристического уравнения  $k_1 = 1, k_2 = 5$

Тогда  $y_1 = c_1 e^x + c_2 e^{5x}$

Найдем  $y_2$  из первого уравнения системы

$$c_1 e^x + 5c_2 e^{5x} = 2c_1 e^x + 10c_2 e^{5x} + y_2$$

$$y_2 = -c_1 e^x - 5c_2 e^{5x}$$

Ответ:

$$\begin{cases} y_1 = c_1 e^x + c_2 e^{5x} \\ y_2 = -c_1 e^x - 5c_2 e^{5x} \end{cases}$$

## 2) Матричный метод

Частное решение системы

будем искать в виде:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases}$$

$$y_1 = \alpha e^{kx}; \quad y_2 = \beta e^{kx}.$$

Подставим  $y_1, y_2$  в систему и сократим на  $e^{kx} \neq 0$  :

$$\begin{cases} \alpha k = a_{11}\alpha + a_{12}\beta \\ \beta k = a_{21}\alpha + a_{22}\beta \end{cases}$$

Или

$$\textcircled{3} \begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta = 0 \end{cases}$$

Система имеет ненулевое решение, если определитель её равен нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая определитель, получим

$$k^2 - (a_{11} + a_{22})k + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$$

- ***характеристическое уравнение*** системы.

Возможны разные случаи.

Рассмотрим пример. Решить систему:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1 - y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = -4y_1 + y_2. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение  $\begin{vmatrix} 1-k & 1 \\ -4 & 1-k \end{vmatrix} = 0$

$$k^2 - 2k - 3 = 0; \quad k_1 = -1, \quad k_2 = 3.$$

Частные решения ищем в виде

$$y_1^{(1)} = \alpha_1 e^{k_1 x}, \quad y_2^{(1)} = \beta_1 e^{k_1 x};$$

$$y_1^{(2)} = \alpha_2 e^{k_2 x}, \quad y_2^{(2)} = \beta_2 e^{k_2 x};$$

При  $k = -1$  система **3** имеет решение  $\alpha_1 = 1, \beta_1 = 2$ .

При  $k = 3$  решение системы  $\alpha_2 = 1, \beta_2 = -2$ .

Тогда

$$y_1^{(1)} = e^{-x}, \quad y_2^{(1)} = 2e^{-x}; \quad y_1^{(2)} = e^{3x}, \quad y_2^{(2)} = -2e^{3x};$$

Ответ:

Общее решение исходной системы

$$\begin{cases} y_1 = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}, \\ y_2 = 2c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{3x}. \end{cases}$$