

План курса

1. Дифференциальные уравнения
2. Операционное исчисление
3. Основные математические структуры

Саксонский философ, логик, математик, механик, физик, юрист, историк, дипломат, изобретатель и языковед. Основатель и первый президент Берлинской Академии наук.

Важнейшие научные достижения:

- Лейбниц, независимо от Ньютона, создал математический анализ — дифференциальное и интегральное исчисления.
- Создал комбинаторику как науку.
- Заложил основы математической логики.
- Описал двоичную систему счисления.
- В механике ввёл понятие кинетической энергии и сформулировал закон сохранения энергии.
- Сформулировал один из важнейших вариационных принципов физики — «принцип наименьшего действия».



Готфрид Вильгельм
Лейбниц
(1646 — 1716)

1. Дифференциальные уравнения

- *Дифференциальное уравнение* (ДУ) – это уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и её производные.
- *Решение* ДУ – искомая функция, которая при подстановке в уравнение превращает его в тождество.

Общий вид ДУ: $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$

- **Обыкновенные** ДУ : искомая функция зависит только от одной переменной.
- **Уравнения в частных производных:** искомая функция зависит от нескольких переменных.
- **Общий интеграл** уравнения – решение ДУ в неявной форме.
- **Порядок** ДУ – наивысший порядок производной, входящей в ДУ.

- Процесс поиска решения – **интегрирование** ДУ.
- График решения – **интегральная кривая**.

Примеры:

1. $y' = y$; - ДУ 1-го порядка. Решение $y = C \cdot e^x$;
2. $y'' + y = 0$; - ДУ 2-го порядка. Решение $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$;

Задачи, приводящие к ДУ

- Падение тела

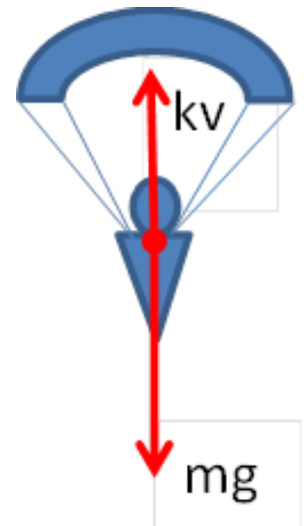
Тело массой m падает с некоторой высоты, причём сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости тела. Найти зависимость скорости от времени.

Используя закон Ньютона, получим

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv;$$

Решение

$$v = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$$



- Радиоактивный распад

Масса радиоактивного вещества уменьшается в результате распада пропорционально имеющейся массе. Найти зависимость массы от времени.

Согласно условию получим уравнение

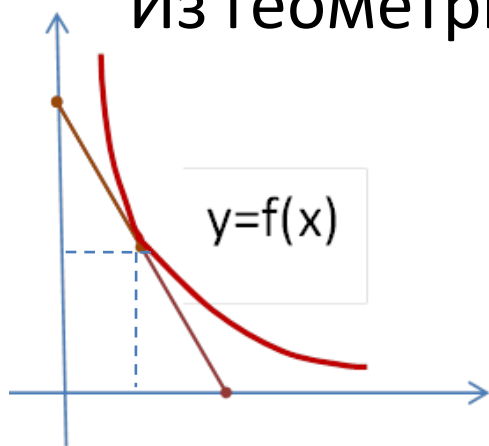
$$\frac{dm}{dt} = -k m;$$

Решение

$$m(t) = C e^{-kt}; \quad (k > 0)$$

- Найти кривую такую, что отрезок касательной, заключенный между осями координат, делится пополам в точке касания.

Из геометрического смысла производной



$$y' = \operatorname{tg} \alpha = -\frac{y}{x};$$

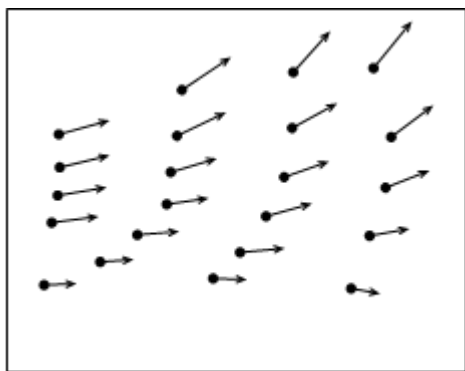
Решение

$$y = \frac{C}{x};$$

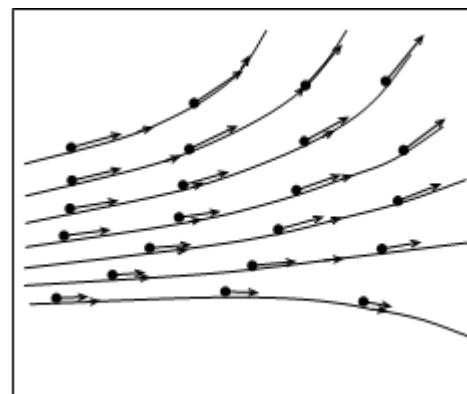
Дифференциальные уравнения первого порядка

В общем виде $F(x; y, y') = 0$ или в виде,
разрешенном относительно производной $y' = f(x; y)$

Геометрически – это поле направлений на плоскости.



$$y' = f(x; y)$$



поле направлений

интегральные кривые

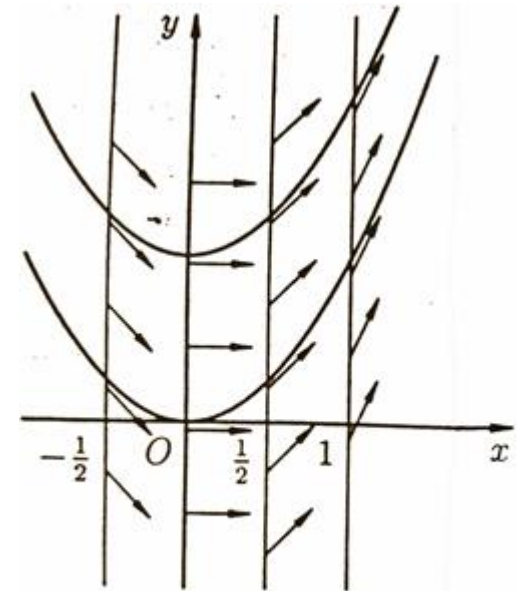
Изоклина - кривая, во всех точках которой направление поля одинаково.

Пример: ДУ $y' = 2x$ $y = x^2 + C$

Интегральные кривые – параболы.

Изоклины – вертикальные прямые.

$$y' = \text{const}$$



ДУ 1 порядка **в дифференциальной форме**: $P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0$.

где $P(x; y)$ и $Q(x; y)$ известные функции.

Начальное условие: если $x = x_0$, то $y = y_0$; или

$$y(x_0) = y_0$$

- **Задача 1 (для самостоятельного решения)**

Построить поле направлений и изоклины
для уравнений

а) $xdx + ydy = 0$

б) $ydx + xdy = 0$

Общее решение ДУ 1 порядка – функция $y = \varphi(x; c)$ такая, что

- при каждом фиксированном значении постоянной C она является решением ДУ;
- для любого начального условия можно найти подходящее значение $c = c_0$, что $y = \varphi(x; c_0)$ будет решением ДУ.

Частное решение ДУ – любая функция $y = \varphi(x; c_0)$, полученная из общего решения при фиксированном значении $c = c_0$.

Задача Коши - задача отыскания решения ДУ 1 порядка, удовлетворяющего заданному начальному условию.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши (Теорема Ковалевской)

Если в уравнении $y' = f(x; y)$ функция $f(x; y)$ и её частная производная $f'_y(x; y)$ непрерывны в некоторой области D , содержащей точку $(x_0; y_0)$, то существует единственное решение $y = \varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Идею доказательства используют численные методы решения ДУ 1 порядка – метод Рунге-Кутты, метод Эйлера.



**Софья Васильевна
Ковалевская
1850 - 1891**

русский математик и механик, с 1889 года иностранный член-корреспондент Петербургской Академии наук.

Первая в России и в Северной Европе женщина-профессор и первая в мире женщина - профессор математики.

Участница Парижской Коммуны.

Значительный вклад в теорию вращения твердого тела, дифференциальных уравнений математическую физику, небесную механику. Её имя носит астероид, кратер на Луне, Премия Российской Академии наук.

Методы решения ДУ 1 порядка

❖ Уравнения с разделяющимися переменными

Это уравнения вида $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$.

Для решения следует заменить y' на $\frac{dy}{dx}$, разделить переменные $\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$

и интегрировать обе части $\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx$.

Получим общий интеграл уравнения:

$$F(y) = G(x) + C$$

Уравнение с разделяющимися переменными (УРП) в дифференциальной форме

$$P_1(x) \cdot Q_1(y) dx + P_2(x) \cdot Q_2(y) dy = 0.$$

Для решения следует разделить переменные

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} dy = 0$$

и интегрировать

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)} dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} dy = C.$$

Получим общий интеграл уравнения.

Пример. Решить уравнение

$$(x - xy^2)dx + (y - yx^2)dy = 0$$

Решение. Разделяем переменные:

$$x(1 - y^2)dx + y(1 - x^2)dy = 0 ; \quad \frac{xdx}{1 - x^2} + \frac{ydy}{1 - y^2} = 0 .$$

$$\text{Интегрируем: } -\frac{1}{2}\ln|1 - x^2| - \frac{1}{2}\ln|1 - y^2| = \frac{1}{2}\ln|C|$$

$$\text{Окончательно: } (1 - x^2)(1 - y^2) = C .$$

Имеет ли это уравнение особые решения?

❖ Однородные ДУ 1 порядка

Это уравнения вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Такое уравнение приводится к УРП заменой $y = tx$.

При этом $y' = t'x + t$ и уравнение приводится к виду

$$t'x + t = f(t) \quad \text{или} \quad \frac{dt}{dx}x = f(t) - t$$

Разделяя переменные, получим $\frac{dt}{f(t) - t} = \frac{dx}{x}$

Осталось проинтегрировать обе части уравнения и вернуться к искомой функции заменой

$$t = \frac{y}{x}$$

Однородное уравнение может быть в виде $y' = f(x; y)$ если функция $f(x; y)$ - однородная порядка 0, т.е.

$$f(kx; ky) = f(x; y) \quad \forall k \neq 0$$

например,

$$y' = \frac{x - y}{x + y}$$

или

$$y' = \frac{x^2 - 4xy + y^2}{x^2 + xy + y^2}$$

Метод решения тот же, что и в предыдущем случае, т.е. замена $y = tx$; $y' = t'x + t$.

Пример. Решить уравнение

$$(3x^2 - 2xy) \cdot y' = x^2 + 3xy - y^2$$

Преобразуем:

$$y' = \frac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy};$$

делаем замену

$$t'x + t = \frac{x^2 + 3tx^2 - t^2x^2}{3x^2 - 2x^2t}; \quad t'x + t = \frac{1 + 3t - t^2}{3 - 2t};$$

разделяем переменные

$$\frac{dt}{dx}x = \frac{1 + 3t - t^2}{3 - 2t} - t = \frac{1 + t^2}{3 - 2t}; \quad \frac{3 - 2t}{1 + t^2}dt = \frac{dx}{x};$$

интегрируем

$$\int \frac{3 - 2t}{1 + t^2}dt = \int \frac{dx}{x}; \quad 3 \operatorname{arctg} t - \ln(1 + t^2) = \ln x + \ln C;$$

упрощаем ответ

$$3 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \ln \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2} \right) = \ln Cx;$$

окончательно:

$$3 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \ln(x^2 + y^2) = \ln \frac{C}{x};$$

❖ Линейные ДУ 1 порядка

это уравнения вида

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) ,$$

где $p(x)$ и $q(x)$ известные функции (или константы).

Особенность: искомая функция y и её производная y' входят в уравнение в первой степени, не перемножаясь между собой.

Рассмотрим два метода решения линейных ДУ:

метод Бернулли и метод Лагранжа.

- Метод Бернулли

делаем подстановку $y = u \cdot v$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - неизвестные функции, одна из которых выбирается из соображений удобства решения. Тогда $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Получаем $u' \cdot v + u \cdot v' + p(x) \cdot u \cdot v = q(x)$

или $u' \cdot v + u \cdot (v' + p(x) \cdot v) = q(x)$ *

Выберем функцию $v(x)$ так, чтобы $v' + p(x) \cdot v = 0$

Тогда $\frac{dv}{dx} + p(x) \cdot v = 0 \Rightarrow dv = -p(x) \cdot dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ln v = -\int p(x) dx \Rightarrow v = e^{-\int p(x) dx}$$

Подставим найденную функцию v в уравнение *

Получим уравнение (УРП) $u' \cdot e^{-\int p(x) dx} = q(x) \Rightarrow$

$$\frac{du}{dx} \cdot e^{-\int p(x) dx} = q(x) \Rightarrow du = q(x) \cdot e^{+\int p(x) dx} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = \int q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx + c$$

Итак $y = u \cdot v = \left(\int q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx + c \right) \cdot e^{-\int p(x) dx}.$

Пример. Решить задачу Коши: $y' + \frac{y}{x} = 3x$; $y(1) = 2.$

Решение. Замена $y = u \cdot v \Rightarrow u' \cdot v + u \cdot v' + \frac{uv}{x} = 3x$

т.е. $u' \cdot v + u \cdot \left(v' + \frac{v}{x} \right) = 3x.$ Найдём функцию $v(x)$

из условия $v' + \frac{v}{x} = 0$. Это УРП:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}; \Rightarrow \ln v = -\ln x; \Rightarrow v = \frac{1}{x}$$

Теперь, подставляя v в исходное уравнение, найдём функцию $u(x)$:

$$u' \cdot \frac{1}{x} + u \cdot 0 = 3x; \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2; \Rightarrow u = x^3 + c$$

Итак, общее решение $y = (x^3 + c) \cdot \frac{1}{x} = x^2 + \frac{c}{x}$;

По начальному условию найдём частное решение

$$2 = 1 + c; \Rightarrow c = 1; \quad \text{Ответ: } y = x^2 + \frac{1}{x}.$$