

Лекция 7

Преобразование Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

$f(t)$ - функция-оригинал;

$F(p) = L f(t)$ - изображение или
трансформанта

Обозначение: $f(t) \doteq F(p)$

Свойства преобразования Лапласа

1. Линейность: $\alpha \cdot f_1(t) + \beta \cdot f_2(t) \stackrel{\cdot}{=} \alpha \cdot F_1(p) + \beta \cdot F_2(p)$

2. Теорема подобия: $f(at) \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$

3. Дифференцирование оригинала

$$f'(t) \stackrel{\cdot}{=} pF(p) - f(0)$$

4. Дифференцирование изображения

$$F'(p) \stackrel{\cdot}{=} (-t) \cdot f(t)$$

Оригиналы и изображения

$f(t)$	$F(p)$
$\chi(t) = 1$	$\frac{1}{p}$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$

Применение операционного метода для решения дифференциальных уравнений

1. Решить ДУ $x'(t) - 4x(t) = 1 - 4t; \quad x(0) = 1$

Решение: пусть $x(t) \doteq X(p);$

тогда $x'(t) \doteq pX(p) - x(0) = pX(p) - 1;$

$$1 \doteq \frac{1}{p}; \quad 4t \doteq \frac{4}{p^2};$$

Получим *изображающее уравнение*

$$pX(p) - 1 - 4X(p) = \frac{1}{p} - \frac{4}{p^2};$$

Выразим $X(p)$

$$X(p) \cdot p - 4 = \frac{1}{p} - \frac{4}{p^2} + 1;$$

$$X(p) = \frac{p - 4 + p^2}{p^2 \cdot p - 4} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p - 4};$$

Восстановим оригинал $x(t)$

$$x(t) = t + e^{4t}$$

2. Найти общее решение ДУ $x' - x = 1$;

Допустим $x(0) = c$. Пусть $x(t) \doteq X(p)$.

Тогда изображающее уравнение имеет вид

$$(pX - c) - X = \frac{1}{p};$$

Находим X

$$X = \frac{1}{p(p-1)} + \frac{c}{p-1} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} + \frac{c}{p-1};$$

Восстановим оригинал:

$$x(t) = (c+1)e^t - 1.$$

5. Интегрирование оригинала

Пусть $f(t) \doteq F(p)$.

Тогда функция $\int_0^t f(\tau) d\tau$ также является оригиналом,

при этом $\int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{F(p)}{p}$.

Доказательство. Пусть $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$. Тогда

$$\varphi'(t) = \left(\int_0^t f(\tau) d\tau \right)' = f(t).$$

С другой стороны о свойству дифференцирования оригинала

$$\varphi'(t) \doteq p\Phi(p) - \varphi(0) = p\Phi(p).$$

Таким образом, $F(p) = p\Phi(p)$ или $\Phi(p) = \frac{F(p)}{p}$.

Пример 9. Найти изображение $f(t) = \int_0^t e^\tau d\tau$

Решение. Известно, что $e^t \doteq \frac{1}{p-1}$. Тогда

$$\int_0^t e^\tau d\tau \doteq \frac{1}{p(p-1)}.$$

6. Интегрирование изображения

Пусть $f(t) \doteq F(p)$, и пусть интеграл $\int_p^\infty F(z)dz$ СХОДИТСЯ.

$$\text{Тогда } \frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^\infty F(z)dz.$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \int_p^\infty F(z)dz &= \int_p^\infty \left(\int_0^\infty f(t) e^{-zt} dt \right) dz = \int_0^\infty \left(\int_p^\infty e^{-zt} dz \right) f(t) dt = \\ &= \int_0^\infty \left(-\frac{1}{t} e^{-zt} \Big|_p^\infty \right) f(t) dt = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-pt} dt \doteq \frac{f(t)}{t}. \end{aligned}$$

Пример 10.

Найдем изображение функции $\frac{\sin t}{t}$.

$$\frac{\sin t}{t} \stackrel{.}{=} \int_p^\infty \frac{dz}{z^2 + 1} = \operatorname{arctg} z \Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arcctg} p.$$

Найдем изображение интегрального синуса

$$\operatorname{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \stackrel{.}{=} \frac{\operatorname{arcctg} p}{p} = \frac{\pi}{2p} - \frac{\operatorname{arctg} p}{p}.$$

7. Теорема сдвига (затухания)

Пусть $f(t) \doteq F(p)$. Тогда для любого комплексного числа a справедливо соотношение

$$e^{at} f(t) \doteq F(p - a), \quad \text{где } \operatorname{Re}(p - a) > s_0$$

Доказательство.

$$e^{at} f(t) \doteq \int_0^{\infty} e^{at} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(p-a)t} dt = F(p - a)$$

Пример 11.

Найдём изображение для оригинала $e^{at} \sin \omega t$

Так как $\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$, то $e^{at} \sin \omega t \doteq \frac{\omega}{(p - a)^2 + \omega^2}$

Аналогично, $e^{at} \cos \omega t \doteq \frac{p - a}{(p - a)^2 + \omega^2}$

Обратная задача.

Найти оригинал для изображения

$$F(p) = \frac{2p - 5}{p^2 - 6p + 13}$$

Решение:

$$\frac{2p - 5}{p^2 - 6p + 13} = \frac{2(p - 3) + 1}{(p - 3)^2 + 4} = 2 \frac{p - 3}{(p - 3)^2 + 4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(p - 3)^2 + 4} \stackrel{.}{=}$$

$$\stackrel{.}{=} 2e^{3t} \cos 2t + \frac{1}{2}e^{3t} \sin 2t$$

8. Теорема сдвига (запаздывания)

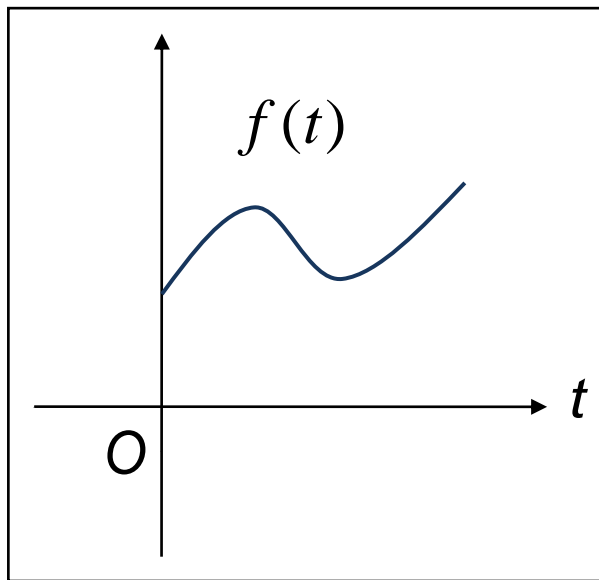
Пусть $f(t) \doteq F(p)$ и число $\tau > 0$. Тогда

$$f(t - \tau) \doteq e^{-p\tau} F(p)$$

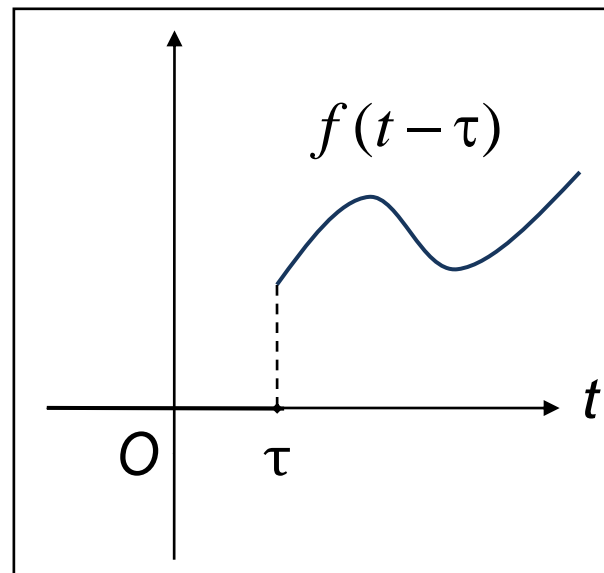
Доказательство.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(t - \tau) e^{-pt} dt &= \left| \begin{array}{l} t - \tau = x \\ t = x + \tau \end{array} \right| = \int_{-\tau}^{\infty} f(x) e^{-p(x+\tau)} dx = \\ &= \int_0^{\infty} f(x) e^{-px} e^{-p\tau} dx = e^{-p\tau} \int_0^{\infty} f(x) e^{-px} dx = e^{-p\tau} F(p) \end{aligned}$$

Что значит «запаздывание»?

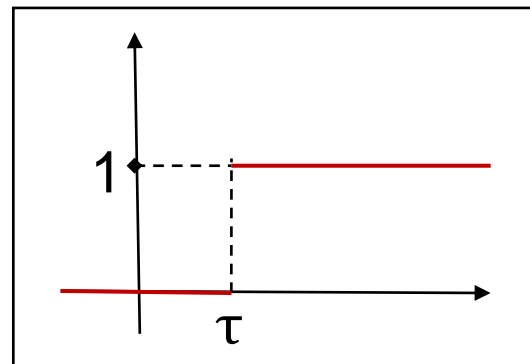


$$f(t) = f(t)\chi(t)$$



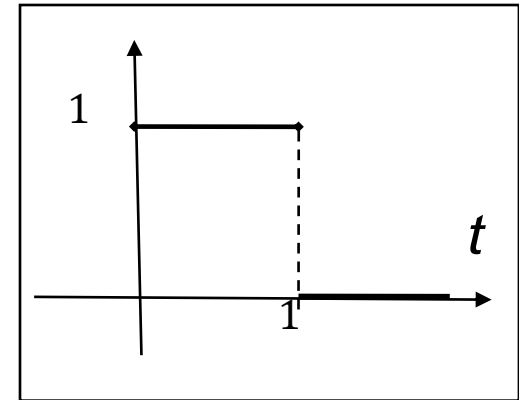
$$f(t - \tau) = f(t - \tau)\chi(t - \tau)$$

Единичная функция Хевисайда
со сдвигом (запозданием) на τ



Задача 1. Найти изображение единичного импульса

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$



Решение:

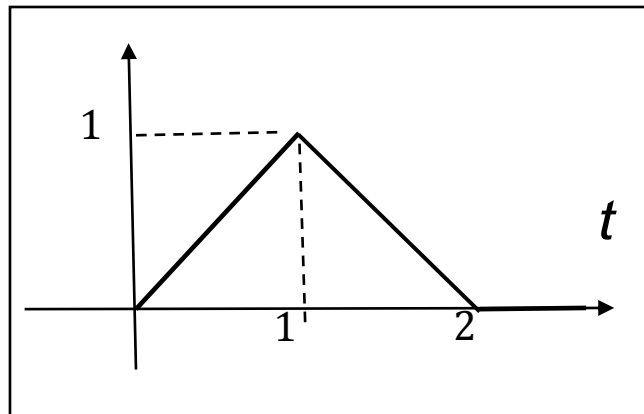
Представим данную функцию с помощью функций Хевисайда

$$f(t) = \chi(t) - \chi(t-1)$$

Тогда

$$f(t) = \chi(t) - \chi(t-1) \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-p} = \frac{1 - e^{-p}}{p}$$

Задача 2. Найти изображение функции, заданной графически



Решение:

$$f(t) = t\chi(t) - t\chi(t-1) + (2-t)\chi(t-1) - (2-t)\chi(t-2)$$

или (после приведения подобных)

$$f(t) = t\chi(t) - 2(t-1)\chi(t-1) + (t-2)\chi(t-2)$$

Тогда

$$F(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{2}{p^2}e^{-p} + \frac{1}{p^2}e^{-2p}$$