

Начальные данные:

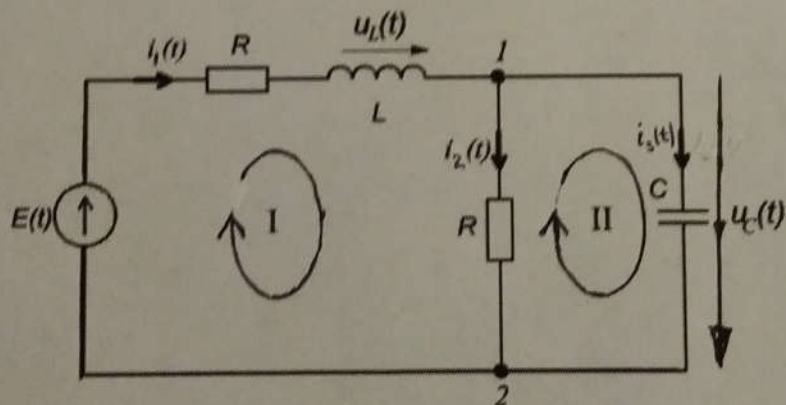
R, Ом	C, Ф	L, Гн	E(t), В	Искомая величина
1	1	1/6	$2 \cdot 4 \cdot \cos(6 \cdot t)$	$U_c(t)$

Решение

- 1) До коммутации в цепи отсутствовал ток, поэтому независимые начальные условия будут:

$$i_1(0) = 0 \text{ A}; u_c(0) = 0 \text{ В}$$

- 2) После замыкания ключа в цепи будет протекать ток. Проведем анализ цепи в переходном режиме.



Составим систему уравнений по первому и второму закону Кирхгофа

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ L \frac{di_1}{dt} + i_1 R + i_2 R = E \\ u_c - i_2 R = 0 \rightarrow i_2 = \frac{u_c}{R} \\ C \frac{du_c}{dt} = i_3 \end{cases}$$

Тогда данную систему можно записать в виде:

$$\begin{cases} i_1 - \frac{u_c}{R} - C \frac{du_c}{dt} = 0 \\ i_1 R + L \frac{di_1}{dt} + u_c = E \end{cases}$$

Запишем получившуюся систему уравнений в нормальном виде:

$$\begin{cases} \frac{du_c}{dt} = \frac{i_1}{C} - \frac{u_c}{RC} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{di_1}{dt} = \frac{E}{L} - i_1 \frac{R}{L} - \frac{u_c}{L} \end{cases} \quad (2)$$

Продифференцируем уравнение (1) по переменной t :

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} = \frac{1}{C} \frac{di_1}{dt} - \frac{1}{RC} \frac{du_c}{dt} \quad (3)$$

Подставим (2) в (3), получим:

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} = \frac{1}{C} \left(\frac{E}{L} - i_1 \frac{R}{L} - \frac{u_c}{L} \right) - \frac{1}{RC} \frac{du_c}{dt} = \frac{E}{LC} - i_1 \frac{R}{LC} - \frac{u_c}{LC} - \frac{1}{RC} \frac{du_c}{dt} \quad (4)$$

Выразим i_1 из (1). Затем подставим получившееся выражение в (4):

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} = \frac{E}{LC} - \frac{R}{L} \frac{du_c}{dt} - \frac{u_c}{LC} - \frac{u_c}{LC} - \frac{1}{RC} \frac{du_c}{dt} = \frac{E}{LC} - \frac{du_c}{dt} \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC} \right) - \frac{2u_c}{LC}$$

Из последнего выражения получили дифференциальное уравнение, которое запишем в привычном, для нас, виде (сразу же подставим числовые значения, указанные в условии):

$$u_c'' + 7u_c' + 12u_c = 12 - 24 \cos 6t$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 7k + 12 = 0$$

Корни данного уравнения равны $k = -3$; $k = -4$.

Общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$\hat{u}_c = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-4t}$$

Найдем частное решение исходного дифференциального уравнения:

$$\hat{u}_c = A + B \cos 6t + C \sin 6t$$

$$(\hat{u}_c)' = 0 - 6B \sin 6t + 6C \cos 6t$$

$$(\hat{u}_c)'' = -36B \cos 6t - 36C \sin 6t$$

$$-36B \cos 6t - 36C \sin 6t - 42B \sin 6t + 42C \cos 6t + 12A + 12B \cos 6t + 12C \sin 6t = 12 - 24 \cos 6t$$

$$\cos 6t \cdot (-36B + 42C + 12B) + \sin 6t \cdot (-36C - 42B + 12C) + 12A = 12 - 24 \cos 6t$$

Из всего этого следует, что

$$\begin{cases} -24B + 42C = -24 \\ -24C - 42B = 0 \\ 12A = 12 \rightarrow A = 1 \end{cases}$$

Решив систему, получим:

$$A = 1$$

$$B = 0.246$$

$$C = -0.431$$

Следовательно:

$$\hat{u}_c = 1 + 0.246 \cos 6t - 0.431 \sin 6t$$

Тогда общее решение исходного дифференциального уравнения запишется в виде:

$$u_c = \hat{u}_c + \check{u}_c = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-4t} + 1 + 0.246 \cos 6t - 0.431 \sin 6t$$

Определим постоянные интегрирования C_1 и C_2 . Для этого, сначала, найдем зависимые начальные условия. Найдем $\frac{du_c}{dt}$ в момент времени $t = 0$:

$$\frac{du_c(0)}{dt} = \frac{i_1(0)}{C} - \frac{u_c(0)}{RC} = 0$$

То есть, зависимые начальные условия: $u_c(0) = 0$; $\frac{du_c(0)}{dt} = 0$.

$$u_c(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 + 1 + 0.246 \cdot \cos 6 \cdot 0 - 0.431 \cdot \sin 6 \cdot 0 = C_1 + C_2 + 1 + 0.246 = C_1 + C_2 + 1.246 = 0$$

Продифференцируем полное решение данного дифференциального уравнения. Сразу же подставим зависимые начальные условия.

$$u'_c = -3 \cdot C_1 e^{-3t} - 4 \cdot C_2 e^{-4t} - 1.476 \cdot \sin 6t - 2.586 \cdot \cos 6t$$

$$u'_c(0) = -3 \cdot C_1 e^0 - 4 \cdot C_2 e^0 - 1.476 \cdot \sin 6 \cdot 0 - 2.586 \cdot \cos 6 \cdot 0 = -3C_1 - 4C_2 - 2.586 = 0$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 1.246 = 0 \\ -3C_1 - 4C_2 - 2.586 = 0 \end{cases}$$

Решив систему, получим постоянные интегрирования:

$$C_1 = -2.398 \text{ В}; C_2 = 1.152 \text{ В}$$

Получаем решение данной задачи:

$$u_c = -2.398 \cdot e^{-3t} + 1.152 \cdot e^{-4t} + 1 + 0.246 \cos 6t - 0.431 \sin 6t$$

3) Решим эту же задачу методом операционного исчисления.

Запишем дифференциальное уравнение, которое получили ранее:

$$u_c'' + 7u_c' + 12u_c = 12 - 24 \cos 6t$$

Начальные условия: $u_c'(0) = 0$; $u_c(0) = 0$

Используя таблицу оригинал – изображение, запишем следующее

$$L[u_c'' + 7u_c' + 12u_c] = L[12 - 24 \cos 6t]$$

Запишем отдельно для каждого оригинала его изображение:

$$L[u_c''] = p^2 U - pu_c(0) - u_c'(0) = p^2 U$$

$$L[u_c'] = pU - u_c(0) = pU$$

$$L[u_c] = U$$

$$L[12 - 24 \cos 6t] = \frac{12}{p} - \frac{24p}{p^2 + 36}$$

В итоге, получим:

$$p^2 U + 7 \cdot pU + 12U = \frac{12}{p} - \frac{24p}{p^2 + 36}$$

$$U \cdot (p^2 + 7p + 12) = \frac{432 - 12p^2}{p(p^2 + 36)}$$

$$U = \frac{432 - 12p^2}{p(p^2 + 36)(p^2 + 7p + 12)} = \frac{A(p)}{B(p)}$$

Найдем оригинал по второй теореме о разложении:

$$u_c(t) = \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k \cdot t}$$

$$A(p) = 432 - 12p^2$$

$$B(p) = p(p^2 + 36)(p^2 + 7p + 12) = p^5 + 7p^4 + 48p^3 + 252p^2 + 432p$$

Найдем полюса, т.е. приравняем $B(p) = 0$. Тогда:

$$p_1 = 0; p_2 = 6i; p_3 = -6i; p_4 = -3; p_5 = -4$$

Вычислим значения числителя при различных полюсах:

$$A(p_1) = 432 - 12 \cdot 0 = 432$$

$$A(p_2) = 432 - 12 \cdot (i6)^2 = 864$$

$$A(p_3) = 432 - 12 \cdot (-i6)^2 = 864$$

$$A(p_4) = 432 - 12 \cdot (-3)^2 = 324$$

$$A(p_5) = 432 - 12 \cdot (-4)^2 = 240$$

Вычислим производную знаменателя:

$$B'(p) = 5p^4 + 28p^3 + 144p^2 + 504p + 432$$

Вычислим значения знаменателя при различных полюсах:

$$B'(p_1) = 5 \cdot 0 + 28 \cdot 0 + 144 \cdot 0 + 504 \cdot 0 + 432 = 432$$

$$B'(p_2) = 5 \cdot (i6)^4 + 28 \cdot (i6)^3 + 144 \cdot (i6)^2 + 504 \cdot (i6) + 432 = 1728 - i3024 = 3482.9e^{-i60.3}$$

$$B'(p_3) = 5 \cdot (-i6)^4 + 28 \cdot (-i6)^3 + 144 \cdot (-i6)^2 + 504 \cdot (-i6) + 432 = 1728 + i3024 = 3482.9e^{i60.3}$$

$$B'(p_4) = 5 \cdot (-3)^4 + 28 \cdot (-3)^3 + 144 \cdot (-3)^2 + 504 \cdot (-3) + 432 = -135$$

$$B'(p_5) = 5 \cdot (-4)^4 + 28 \cdot (-4)^3 + 144 \cdot (-4)^2 + 504 \cdot (-4) + 432 = 208$$

Найдем оригинал:

$$u_c = \frac{A(p_1)}{B'(p_1)} e^{p_1 \cdot t} + \frac{A(p_2)}{B'(p_2)} e^{p_2 \cdot t} + \frac{A(p_3)}{B'(p_3)} e^{p_3 \cdot t} + \frac{A(p_4)}{B'(p_4)} e^{p_4 \cdot t} + \frac{A(p_5)}{B'(p_5)} e^{p_5 \cdot t}$$

$$u_c = \frac{432}{432} e^{0 \cdot t} + \frac{864}{3482.9e^{-i60.3}} e^{i6 \cdot t} + \frac{864}{3482.9e^{-i60.3}} e^{-i6 \cdot t} + \frac{324}{-135} e^{-3 \cdot t} + \frac{240}{208} e^{-4 \cdot t}$$

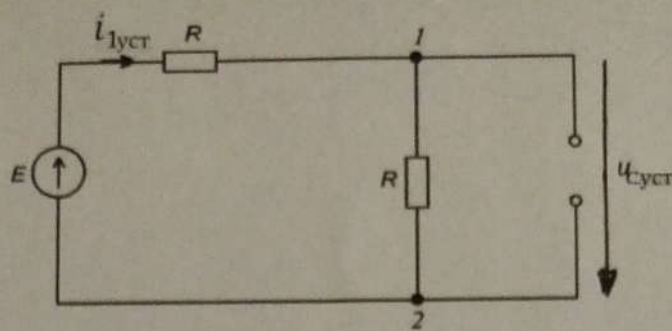
$$u_c = 1 + 2 \cdot \operatorname{Re}(0.248e^{i60.3} \cdot e^{i6 \cdot t}) - 2.398e^{-3 \cdot t} + 1.152e^{-4 \cdot t} = 1 + 0.246 \cdot \cos 6t - 0.431 \cdot \sin 6t - 2.398e^{-3 \cdot t} + 1.152e^{-4 \cdot t}$$

В конечном счете, получим:

$$u_c = 1 + 0.246 \cdot \cos 6t - 0.431 \cdot \sin 6t - 2.398e^{-3 \cdot t} + 1.152e^{-4 \cdot t}$$

4) Расчет установившегося значения искомой величины с использованием методов теоретической электротехники.

1. Вычисление постоянной составляющей искомой величины:

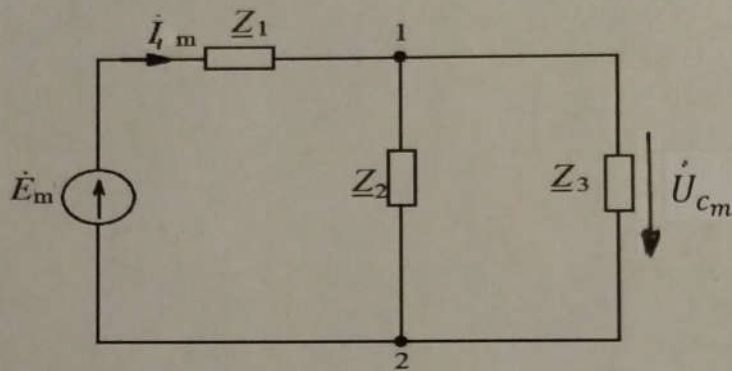


$$i_{уст} = \frac{E}{2R} = \frac{2}{2} = 1 \text{ (A)}$$

Тогда напряжение будет следующим:

$$u_{уст} = R \cdot i_1 = 1 \cdot 1 = 1 \text{ (В)}$$

2. Расчет переменной составляющей:



Для расчетов перейдем к комплексным величинам:

$$\dot{E}_m(t) = -4 \cdot \cos 6t = -4j \text{ (В)}$$

$$\underline{Z}_1 = R + j\omega L = 1 + j6 \cdot \frac{1}{6} = 1 + j \text{ (Ом)}$$

$$\underline{Z}_2 = R = 1 \text{ (Ом)}$$

$$\underline{Z}_3 = -j \frac{1}{\omega C} = -j \cdot \frac{1}{6 \cdot 1} = -j0.17 \text{ (Ом)}$$

Эквивалентное сопротивление цепи равно:

$$\underline{Z}_3 = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = (1 + j) + \frac{-j0.17}{1 - j0.17} = 1.03 + j0.84 \text{ (Ом)}$$

Комплексная амплитуда тока:

$$\dot{i}_{1m} = \frac{\dot{E}_m}{\underline{Z}_3} = \frac{-4j}{1.03 + j0.84} = -1.91 - j2.33 \text{ (А)}$$

Комплексная амплитуда напряжения на \underline{Z}_{23} :

$$\dot{U}_{3m} = \dot{I}_{1m} \cdot \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = (-1.91 - j2.33) \cdot (0.03 - j0.16) = -0.43 + j0.25 \text{ (В)}$$

Комплексная амплитуда тока через конденсатор:

$$\dot{I}_{3m} = \frac{U_{3m}}{\underline{Z}_3} = \frac{-0.43 + j0.25}{-j0.17} = -1.47 - j2.57 \text{ (А)}$$

Тогда комплексная амплитуда напряжения на конденсаторе будет равна:

$$\dot{U}_{cm} = \dot{I}_{3m} \cdot \underline{Z}_3 = (-1.47 - j2.57) \cdot (-j0.17) = -0.431 + j0.246 \text{ (В)}$$

Перейдем во временную область, получим:

$$\dot{u}_c = 0.246 \cdot \cos 6t - 0.431 \cdot \sin 6t$$

По принципу наложения получим:

$$u_c = u_{c_{уст}} + \dot{u}_c = 1 + 0.246 \cdot \cos 6t - 0.431 \cdot \sin 6t$$

График изменения во времени искомой величины после коммутации.

