

ТЕМА 1. РАСЧЕТ ЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

1. Методы расчета цепей постоянного тока

1.1. Метод, основанный на применении законов Кирхгофа

В общем случае токи и напряжения заданной цепи постоянного тока могут быть найдены в результате совместного решения системы уравнений, составленной на основании 1-го и 2-го законов Кирхгофа [1-4].

1.1.2. Постановка задачи

Задана схема электрической цепи, содержащая $N_B = p$ ветвей, $N_V = q$ узлов и $N_K = s$ контуров. Причем $s = p - (q - 1)$. Заданы величины элементов ветвей (сопротивления R_k), ЭДС и токи источников. Требуется найти токи во всех ветвях цепи.

1.1.3. Алгоритм метода

а) Определяется число ветвей p , число узлов q и число контуров s . При этом должно выполняться соотношение: $s = p - (q - 1)$;

б) произвольно задаются направления вычисления токов во всех ветвях цепи;

в) для всех узлов, *кроме любого одного* записываются уравнения по первому закону Кирхгофа (1ЗК). Ток *источника тока* учитывается как ток ветви. Всего этих уравнений $(q - 1)$;

г) выбираются независимые контуры и задаются направления обхода каждого из них. (*Независимым является контур, в который входит хотя бы одна новая ветвь, не входящая в другие контуры*);

д) для всех контуров записываются уравнения по второму закону Кирхгофа (2ЗК). Всего уравнений s ;

е) решается система уравнений, записанных в пунктах в и д. Всего уравнений в этой системе $(q-1) + s = q-1 + p - q + 1 = p$, то есть столько, сколько ветвей в схеме цепи. Решая эту систему, получаем токи ветвей $I_1, I_2, I_3 \dots I_p$;

ж) правильность расчета проверяется балансом мощностей.

1.1.4. Пример расчета

Задана схема цепи (рис. 1.1.), значения ЭДС источников и сопротивления ветвей. Требуется найти значения токов во всех ветвях цепи.

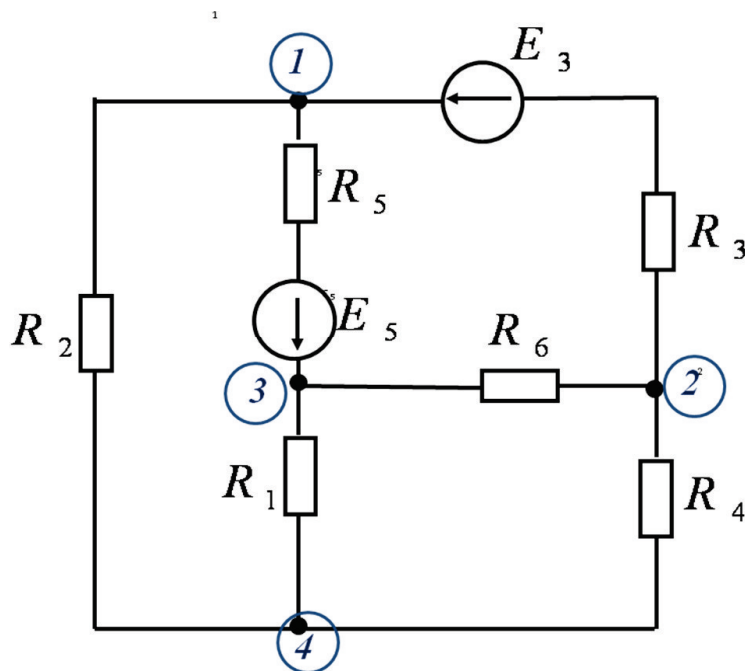


Рис. 1.1.

Проведем расчет.

а) Число ветвей $p = 6$; число узлов $q = 4$, число контуров $s = p - (q - 1) = 6 - (4 - 1) = 3$.

б) произвольно задаются направления вычислений токов ветвей $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$ (рис. 1.2);

б) записываем уравнения по 1ЗК:

$$\text{узел 1: } -I_2 - I_3 + I_5 = 0;$$

$$\text{узел 2: } I_3 - I_4 - I_6 = 0;$$

$$\text{узел 3: } I_1 - I_5 + I_6 = 0;$$

в) выбираем независимые контуры и задаем направление обхода в них (рис. 1.3.):

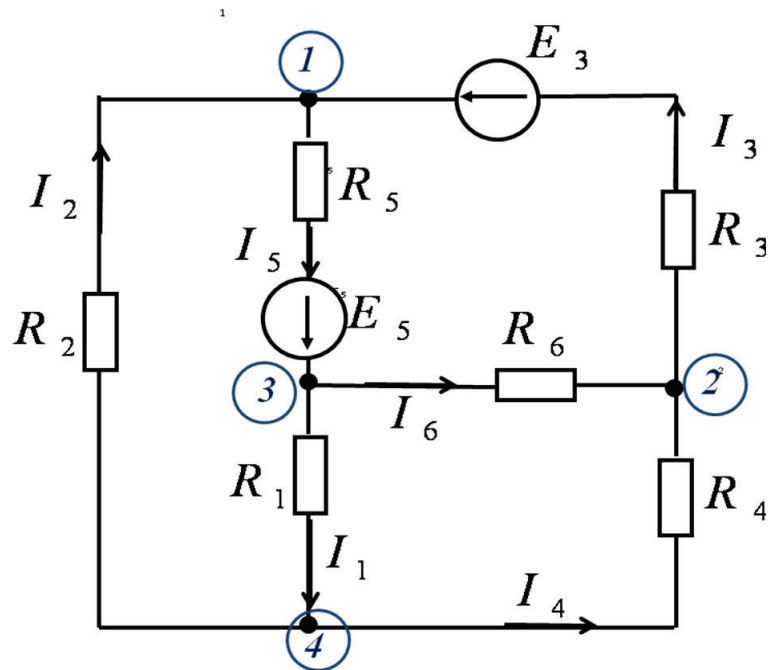


Рис.1.2.

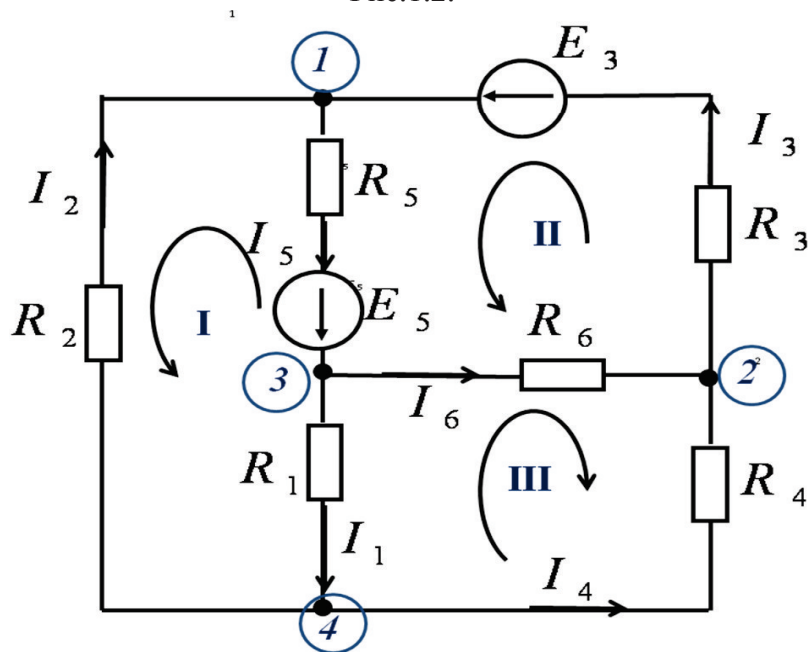


Рис.1.3. К расчету цепи методом контурных токов

г) записываем уравнения по 23К:

$$\text{контур I: } -R_1 I_1 - R_2 I_2 - R_5 I_5 = -E_5;$$

$$\text{контур II: } R_3 I_3 + R_5 I_5 + R_6 I_6 = E_3 + E_5;$$

$$\text{контур III: } -R_1 I_1 - R_4 I_4 + R_6 I_6 = 0.$$

д) объединяем уравнения, записанные по 1 и 2ЗК в систему:

$$\begin{cases} -I_2 - I_3 + I_5 = 0 \\ I_3 - I_4 - I_6 = 0 \\ I_1 - I_5 + I_6 = 0 \\ -R_1 I_1 - R_2 I_2 - R_5 I_5 = -E_5 \\ R_3 I_3 + R_5 I_5 + R_6 I_6 = E_3 + E_5 \\ -R_1 I_1 - R_4 I_4 + R_6 I_6 = 0 \end{cases}$$

е) решаем систему уравнений и получаем значения токов во всех ветвях цепи $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$.

ЗАМЕЧАНИЕ. При решении систем линейных алгебраических уравнений важно правильно записать ее в матричной форме. Пример записи полученной системы уравнений:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -R_1 & -R_2 & 0 & 0 & -R_5 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & R_5 & R_6 \\ -R_1 & 0 & 0 & -R_4 & 0 & R_6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -E_5 \\ E_3 + E_5 \\ 0 \end{bmatrix};$$

ж) составим уравнение баланса мощностей. При правильном решении должен выполняться баланс мощностей:

$$\sum P_{\text{ист}} = \sum P_{\text{прием.}}$$

$$\sum P_{\text{ист}} = \sum_{k=1}^n \pm I_k E_k = P_3 + P_5 = I_3 \cdot E_3 + I_5 \cdot E_5,$$

причем знак «+» используется, если стрелки тока и ЭДС совпадают по направлению, а знак «-» если не совпадают.

$$\sum P_{\text{прием.}} = \sum_{k=1}^n I_k^2 \cdot R_k = I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 + I_3^2 \cdot R_3 + I_4^2 \cdot R_4 + I_5^2 \cdot R_5 + I_6^2 \cdot R_6.$$

1.2. Метод контурных токов

Метод является модификацией метода, основанного на законах Кирхгофа. При расчете этим методом вводится понятие контурного тока независимого контура. Уравнения составляются по 23К для независимых контуров, то есть получается система с меньшим числом уравнений, что и является преимуществом метода контурных токов.

1.2.1. Алгоритм метода

а) Определяется число ветвей p , число узлов q и число независимых контуров s ($s = p - (q - 1)$);

б) произвольно задаются токи во всех ветвях цепи;

в) задаются фиктивные контурные токи, циркулирующие по всем ветвям контуров $J_1^{(k)}, J_2^{(k)}, \dots, J_n^{(k)}$;

г) записывается контурное уравнение для определения контурных токов. В матричной форме оно имеет вид $R^{(k)} \cdot J^{(k)} = E^{(k)}$. В этом уравнении

$$J^{(k)} = \begin{bmatrix} J_1^{(k)} \\ J_2^{(k)} \\ \dots \\ J_s^{(k)} \end{bmatrix}, \quad R^{(k)} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1s} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{s1} & R_{s2} & \dots & R_{ss} \end{bmatrix}, \quad E^{(k)} = \begin{bmatrix} E_1^{(k)} \\ E_2^{(k)} \\ \dots \\ E_s^{(k)} \end{bmatrix},$$

где $J^{(k)}$ – столбец неизвестных контурных токов (их столько, сколько контуров); $R^{(k)}$ – матрица контурных сопротивлений; столбец контурных ЭДС.

Поясним порядок построения матриц контурных сопротивлений и контурных ЭДС. Следует отметить, что $R^{(k)}$ – квадратная матрица, размерностью $s \times s$. Она имеет следующие особенности:

- $R_{ij} = R_{ji}$, то есть симметричная относительно главной диагонали;
- R_{ii} – сумма всех сопротивлений, входящих в контур i ; всегда положительная;

$-R_{ij}$ – сумма сопротивлений, общих для контуров i и j , взятая со знаком «+», если стрелки контурных токов направлены в одну сторону, и со знаком «–» если в этих общих для двух контуров сопротивлениях стрелки контурных токов направлены навстречу друг другу.

Матрица контурных ЭДС строится так же, как и при записи второго закона Кирхгофа. Вместо направления обхода рассматривается направление вычисления контурного тока в контуре.

д) решается полученное контурное уравнение, и определяются контурные токи $J_1^{(к)}, J_2^{(к)}, \dots, J_n^{(к)}$.

е) по контурным токам на основе законов Кирхгофа определяются токи ветвей;

ж) правильность расчета проверяется балансом мощностей.

1.2.2. Пример расчета

а-б) Определяем число ветвей (p), число узлов (q) и число независимых контуров (s). Задаемся направлением вычислений токов ветвей (рис. 1.4);

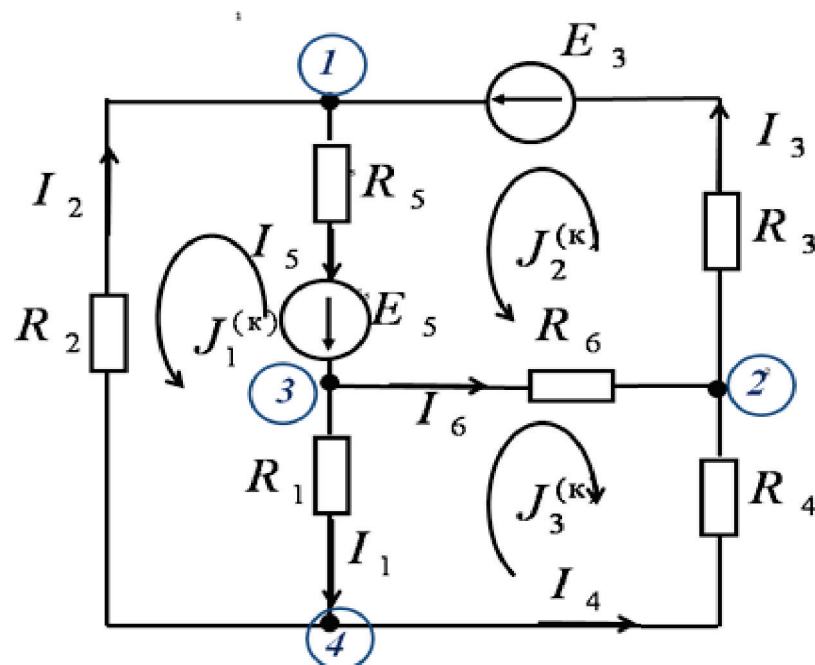


Рис. 1.4. К расчету цепи методом контурных токов в соответствии с примером

в) задаемся контурными токами $J_1^{(к)}, J_2^{(к)}; J_3^{(к)}$. Их направления вычислений выбираются произвольно (рис. 1.4);

г) записываем контурное уравнение:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_1^{(к)} \\ J_2^{(к)} \\ J_3^{(к)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1^{(к)} \\ E_2^{(к)} \\ E_3^{(к)} \end{bmatrix}$$

и рассчитываем элементы матриц контурных сопротивлений и контурных ЭДС. При этом

$$\begin{aligned} R_{11} &= R_1 + R_2 + R_5; \\ R_{22} &= R_3 + R_5 + R_6; \\ R_{33} &= R_1 + R_4 + R_6, \\ R_{12} &= -R_5; \quad R_{13} = R_1; \quad R_{23} = R_6; \\ R_{12} &= R_{21}; \quad R_{13} = R_{31}; \quad R_{23} = R_{32}, \\ E_1^{(к)} &= -E_5; \\ E_2^{(к)} &= E_3 + E_5; \\ E_3^{(к)} &= 0; \end{aligned}$$

е) решаем систему и получаем токи $J_1^{(к)}, J_2^{(к)}; J_3^{(к)}$;

ж) определяем действительные токи ветвей. Сначала найдем токи ветвей, входящих только в один контур: $I_2 = -J_1^{(к)}$; $I_3 = J_2^{(к)}$; $I_4 = -J_3^{(к)}$. Затем токи, ветвей, входящих в два контура:

$$\begin{aligned} I_1 &= -(J_1^{(к)} + J_3^{(к)}); \\ I_5 &= J_2^{(к)} - J_1^{(к)}; \\ I_6 &= J_2^{(к)} + J_3^{(к)}; \end{aligned}$$

з) баланс мощностей проверяется так же, как и в предыдущем методе.

1.3. Метод узловых потенциалов

Метод узловых потенциалов является наиболее общим и часто используется в расчетах электрических цепей, содержащих большое число ветвей и малое количество узлов. Метод позволяет уменьшить число урав-

нений системы до числа узлов без одного, то есть число уравнений системы равно $q-1$.

Этот метод используется, в частности, при проектировании электронных схем. Кроме того, очень удобным является применение метода узловых потенциалов для схем, содержащих два узла. Такой частный случай получил свое название – «метод двух узлов».

1.3.1. Алгоритм метода

- а) Определяется число ветвей p , число узлов q и число контуров s .
($s = p - (q - 1)$);
- б) произвольно задаются направления вычислений токов во всех ветвях цепи;
- в) потенциал одного из узлов (базисного) принимается равным нулю ($\varphi_q = 0$);

г) записывается узловое уравнение: $G^{(y)} \cdot \varphi^{(y)} = I^{(y)}$. В этом уравнении:

$$\varphi^{(y)} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \dots \\ \varphi_{q-1} \end{bmatrix}; G^{(y)} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1,q-1} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2,q-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{q-1,1} & G_{q-1,2} & \dots & G_{q-1,q-1} \end{bmatrix}; I^{(y)} = \begin{bmatrix} I_1^{(y)} \\ I_2^{(y)} \\ \dots \\ I_{q-1}^{(y)} \end{bmatrix},$$

где $\varphi^{(y)}$ – столбец неизвестных потенциалов; $G^{(y)}$ – матрица узловых проводимостей, $I^{(y)}$ – столбец узловых токов.

Поясним порядок построения матрицы узловых проводимостей и столбца узловых токов. К особенностям этой матрицы относятся:

- $G^{(y)}$ – квадратная матрица размерностью $(q-1) \times (q-1)$;
- матрица симметрична относительно главной диагонали $G_{ij} = G_{ji}$;
- элементы главной диагонали G_{ii} представляют собой всегда положительную сумму проводимостей ветвей, сходящихся в i -м узле;
- остальные элементы матрицы G_{ij} представляют собой сумму проводимостей всех ветвей, связывающих узлы i и j , взятую всегда со знаком «–».

Обозначим $I_i^{(y)}$ – сумму токов всех источников, расположенных в ветвях, сходящихся в узле с номером i . Если стрелка источника напряжения с ЭДС E направлена к узлу, то его ток берется со знаком «+» и равен $I_i^{(y)} = E_i \cdot G_i = \frac{E_i}{R_i}$. Если стрелка источника направлена от узла, то его ток рассчитывается так же, но учитывается со знаком «-». В выражении $I_i^{(y)} = E_i \cdot G_i = \frac{E_i}{R_i}$ параметр G_i проводимость ветви, то есть, величина, обратная эквивалентному сопротивлению ветви R_i . R_i – эквивалентное сопротивление последовательно соединенных резистивных элементов ветви; E_i – алгебраическая сумма ЭДС всех источников, входящих в ветвь.

д) решается узловое уравнение, и определяются потенциалы всех оставшихся $q-1$ узлов;

е) по потенциалам узлов на основе закона Ома и законов Кирхгофа определяются токи ветвей;

ж) правильность расчета проверяется балансом мощностей.

1.3.2. Пример расчета

Для цепи на рис. 1.5 определить токи во всех ветвях методом узловых потенциалов.

а-б. Определяем число ветвей (p), число узлов (q) и число независимых контуров (s). Задаемся направлением вычислений токов ветвей;

в) примем потенциал 4-го узла равным нулю ($\varphi_4 = 0$).

г) записываем узловое уравнение для оставшихся трех узлов:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1^{(y)} \\ I_2^{(y)} \\ I_3^{(y)} \end{bmatrix},$$

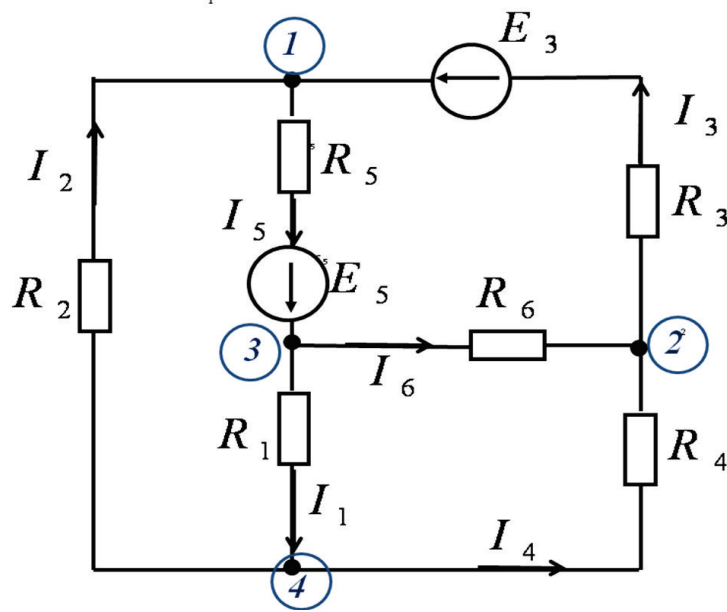


Рис. 1.5. К расчету цепи методом узловых потенциалов

$$\begin{aligned}
 G_{11} &= G_2 + G_3 + G_5 = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}; & G_{12} &= G_3 = -\frac{1}{R_3}; \\
 \text{где } G_{22} &= G_3 + G_4 + G_6 = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6}; & G_{13} &= G_5 = -\frac{1}{R_5}; \\
 G_{33} &= G_1 + G_5 + G_6 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}; & G_{23} &= G_6 = -\frac{1}{R_6}; \\
 & & G_{21} &= G_{12}; \quad G_{31} = G_{13}; \quad G_{32} = G_{23};
 \end{aligned}$$

$$I^{(y)} = \begin{bmatrix} I_1^{(y)} \\ I_2^{(y)} \\ I_3^{(y)} \end{bmatrix}; \quad I_1^{(y)} = \frac{E_3}{R_3} - \frac{E_5}{R_5}; \quad I_2^{(y)} = -\frac{E_3}{R_3}; \quad I_3^{(y)} = \frac{E_5}{R_5}.$$

д) подставив численные значения в узловое уравнение, и решив его, получаем значения потенциалов узлов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$;

е) по потенциалам узлов на основе закона Ома и законов Кирхгофа определяются токи ветвей:

$$I_1 = \frac{\varphi_3}{R_1}; \quad I_2 = -\frac{\varphi_2}{R_2}; \quad I_3 = \frac{E_3 - \varphi_1 + \varphi_2}{R_3}; \quad I_4 = -\frac{\varphi_2}{R_4}; \quad I_5 = \frac{-E_5 - \varphi_1 + \varphi_3}{R_5};$$

ж) баланс мощностей проверяется так же, как и в предыдущем методе

1.4. ЗАДАНИЕ НА СЕМЕСТРОВУЮ РАБОТУ

Рассчитать цепь методом непосредственного применения законов Кирхгофа и методом контурных токов. Составить и решить уравнение баланса мощностей.

Указания по выбору условий. Расчетные схемы приведены на рис. 1.6 – 1.20. В таблице 1.1. приведено соответствие номера варианта студента и расчетной схемы. Параметры резистивных элементов содержатся в Таблицах 1.2 – 1.5, ЭДС источников – в Таблице 1.6.

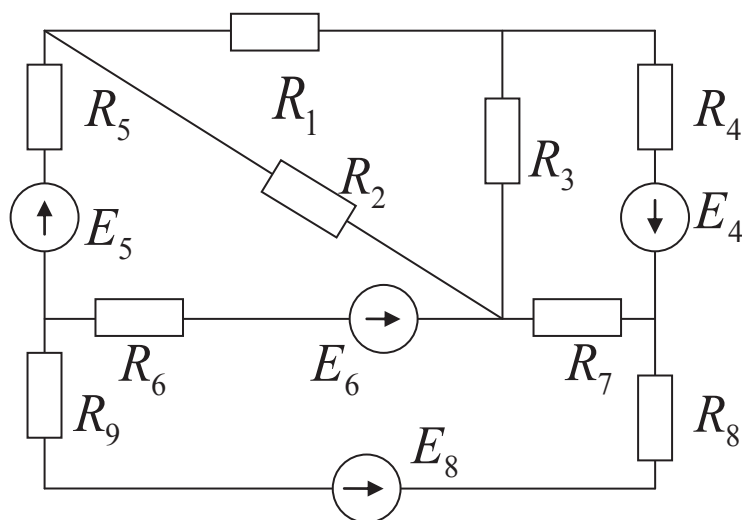


Рис. 1.6

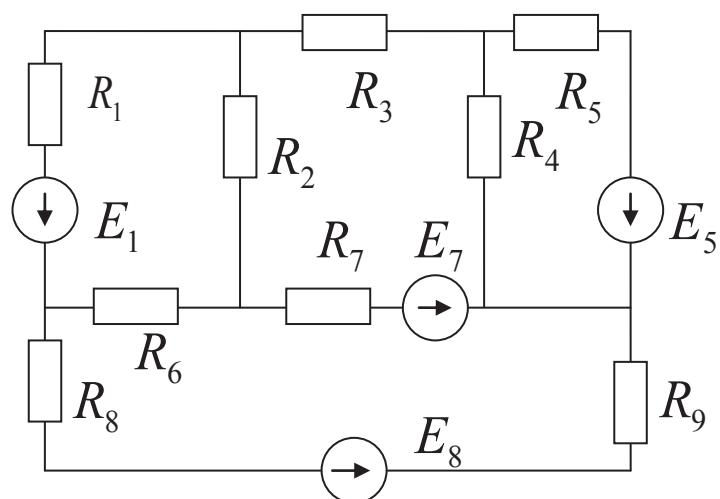


Рис. 1.7

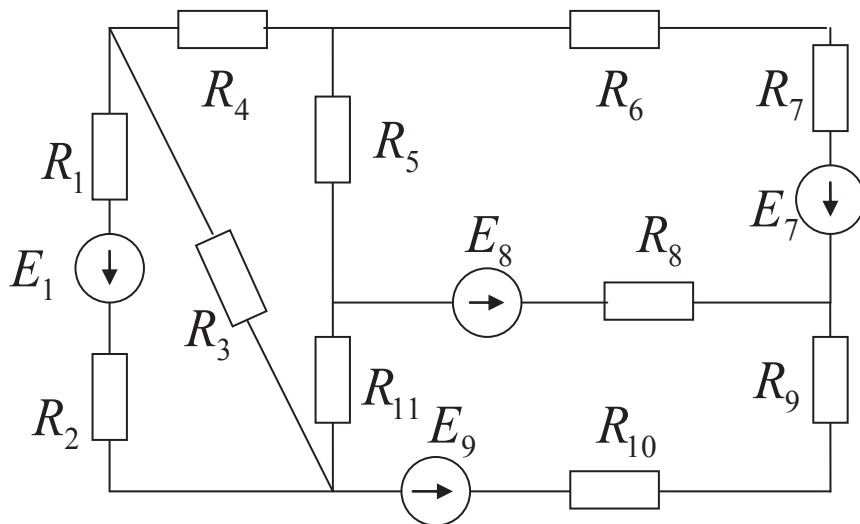


Рис. 1.8

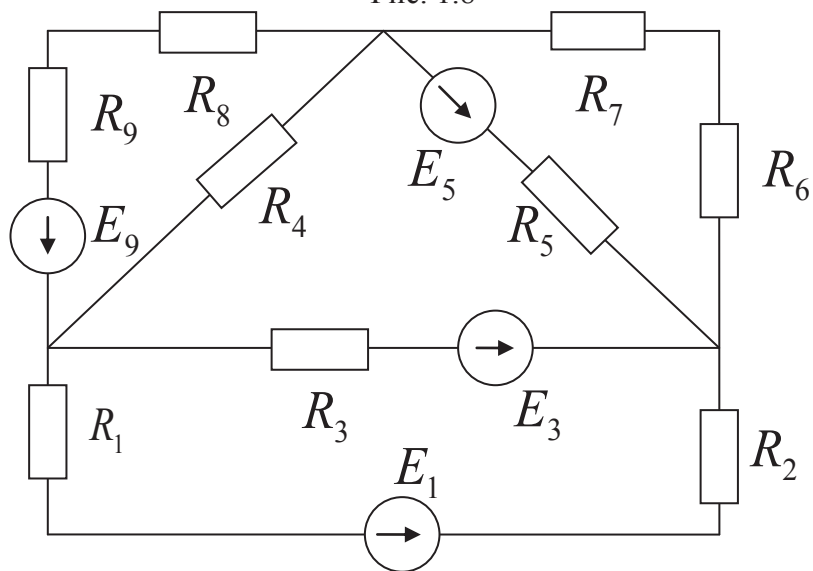


Рис. 1.9

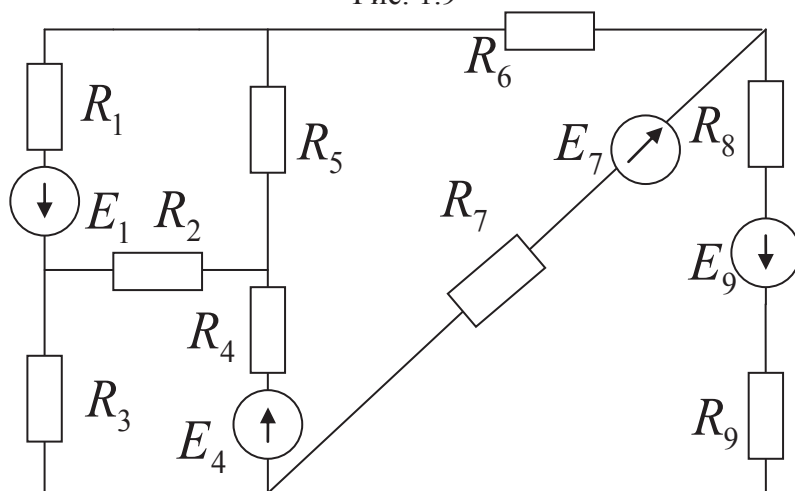


Рис. 1.10

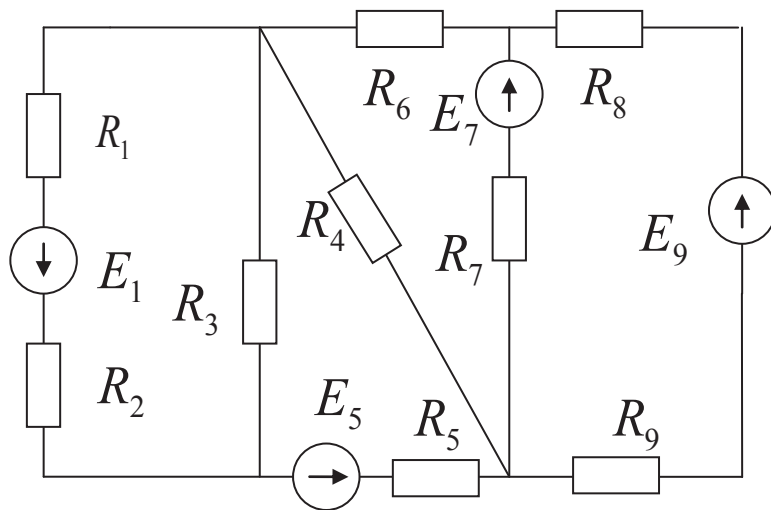


Рис. 1.11

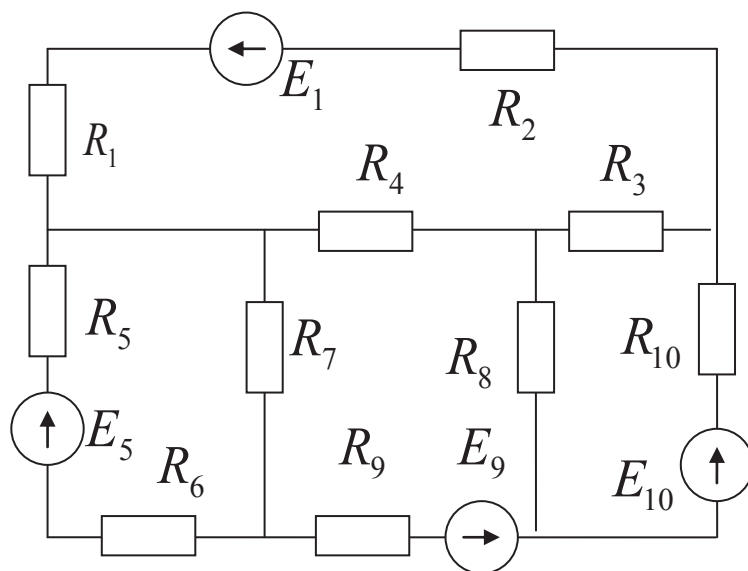


Рис. 1.12

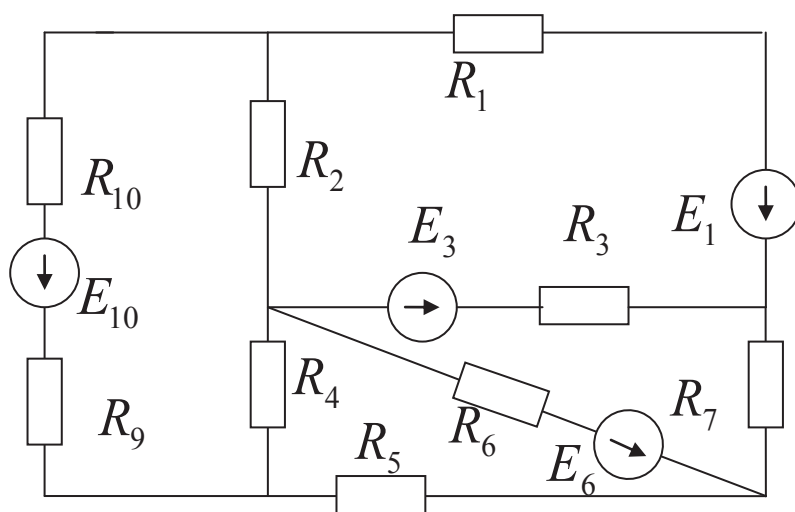


Рис. 1.13

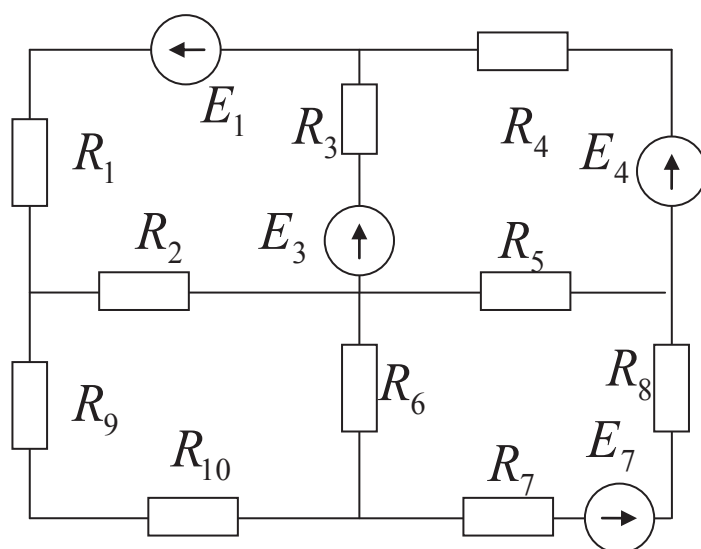


Рис. 1.14

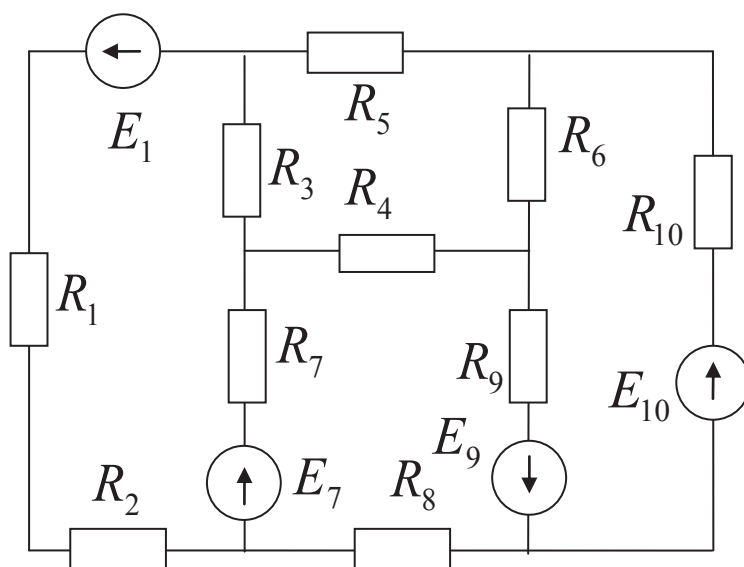


Рис 1.15

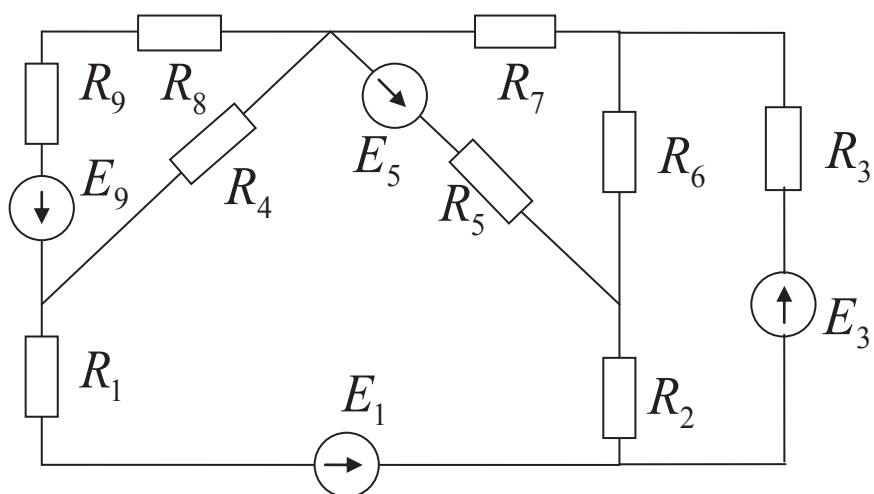


Рис. 1.16

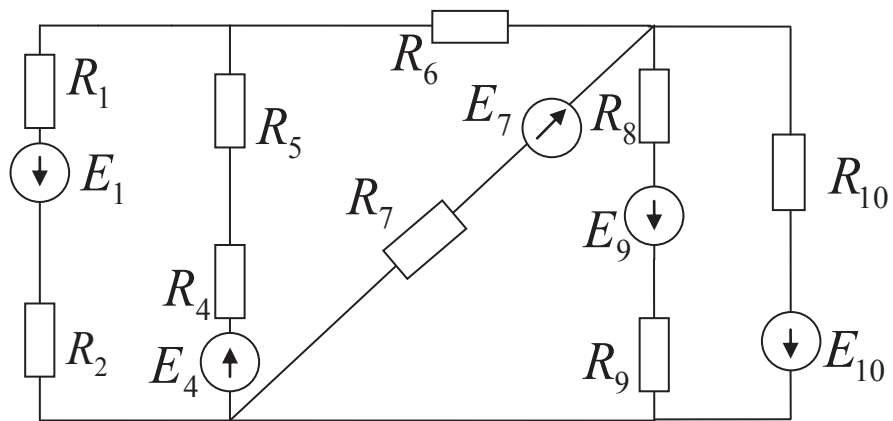


Рис. 1.17

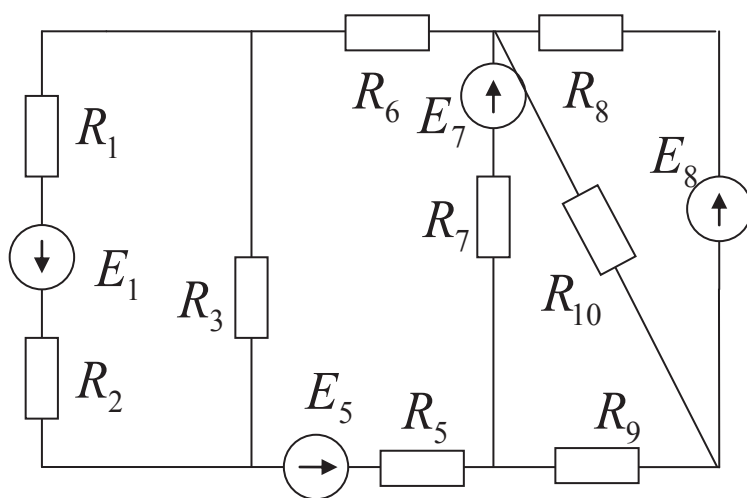


Рис. 1.18

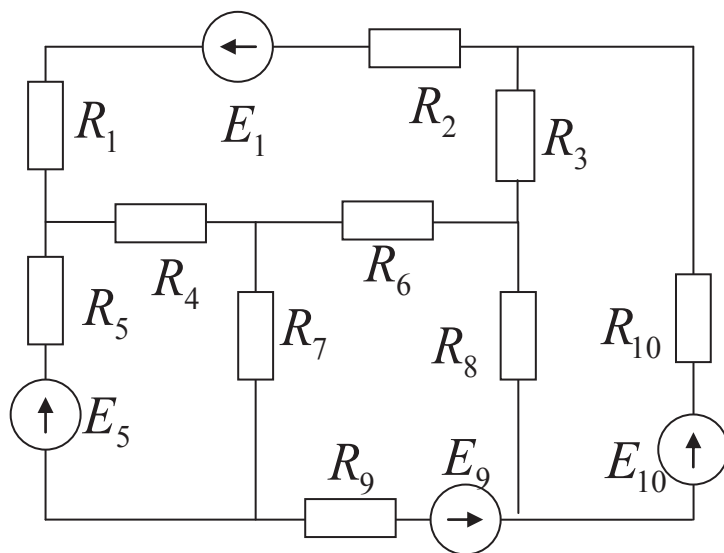


Рис. 1.19

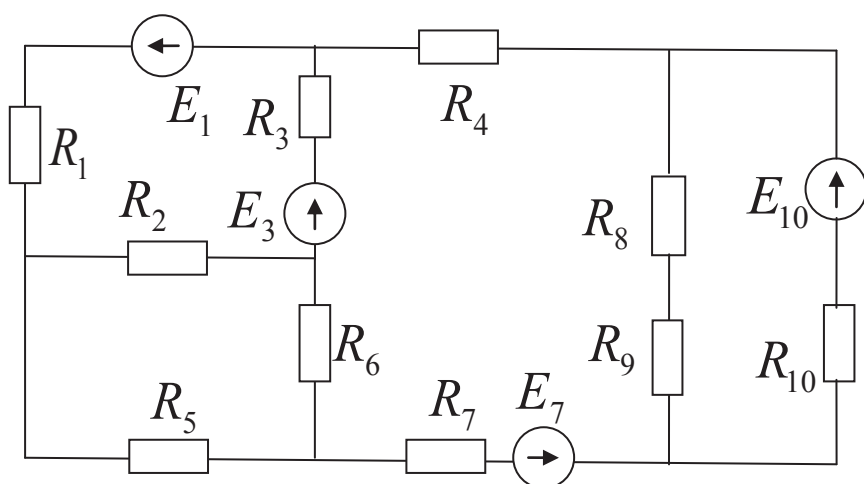


Рис. 1.20

Таблица 1.1

номер варианта	номер рисунка	номер варианта	номер рисунка	номер варианта	номер рисунка
1	1.6	11	1.16	21	1.11
2	1.7	12	1.17	22	1.12
3	1.8	13	1.18	23	1.13
4	1.9	14	1.19	24	1.14
5	1.10	15	1.20	25	1.15
6	1.11	16	1.6	26	1.16
7	1.12	17	1.7	27	1.17
8	1.13	18	1.8	28	1.18
9	1.14	19	1.9	29	1.19
10	1.15	20	1.10	30	1.20

Таблица 1.2

№ вар	R_1 Ом	R_2 Ом	R_3 Ом	R_4 Ом	R_5 Ом	R_6 Ом	R_7 Ом	R_8 Ом	R_9 Ом	R_{10} Ом	R_{11} Ом
1	14	18	22	14	10	17	13	10	32	11	40
2	39	25	12	10	13	25	27	12	20	9	19
3	17	42	8	12	17	21	15	19	9	38	15
4	18	14	21	9	19	16	19	22	26	20	42
5	20	8	41	13	8	24	25	32	7	13	11

6	15	21	8	27	10	11	43	41	26	29	39
7	9	6	21	11	12	40	32	23	13	32	18
8	32	21	48	17	14	22	6	26	19	20	24
9	7	19	9	15	18	18	14	17	32	26	10
10	21	16	6	30	16	14	25	19	21	9	19
11	15	36	8	12	21	21	33	40	6	18	16
12	13	10	33	19	29	19	21	10	15	7	14
13	18	43	12	30	24	19	24	14	21	32	17
14	9	20	16	25	23	33	16	19	16	11	27
15	30	23	11	34	20	26	28	16	32	24	15
16	21	27	10	16	15	40	34	13	8	34	21
17	15	24	31	18	22	17	36	6	33	6	40
18	24	11	22	8	14	16	23	19	21	17	41
19	19	29	15	22	33	38	8	14	31	15	14
20	27	39	41	11	17	40	9	16	29	9	22
21	16	31	24	13	19	43	22	7	30	21	13
22	22	36	18	9	17	21	29	11	33	19	17
23	31	48	17	10	13	40	36	9	12	32	34
24	12	21	33	25	13	31	30	18	19	8	27
25	23	10	11	19	15	11	24	31	13	19	33
26	31	30	13	45	11	30	18	10	8	22	25
27	11	16	21	30	17	19	12	18	40	48	33
28	19	22	9	14	15	27	33	7	16	39	22
29	32	40	20	9	30	21	19	7	15	7	17
30	9	15	11	18	21	40	7	15	37	23	24

Таблица 1.3

№ вар	R_1 Ом	R_2 Ом	R_3 Ом	R_4 Ом	R_5 Ом	R_6 Ом	R_7 Ом	R_8 Ом	R_9 Ом	R_{10} Ом	R_{11} Ом
1	10	20	32	11	25	6	40	17	14	18	10
2	13	36	20	9	29	15	19	25	10	25	12
3	15	27	9	38	22	31	15	21	12	42	19
4	10	7	26	20	30	15	42	16	9	14	22
5	27	10	7	13	44	35	11	24	13	8	32
6	4	15	26	29	13	31	39	11	27	21	41
7	5	29	13	32	29	16	18	40	11	6	23
8	8	30	19	20	14	40	24	22	17	21	26
9	10	14	32	26	7	29	10	18	15	19	17
10	12	18	21	9	40	33	19	14	30	16	19
11	15	20	6	18	11	31	16	21	12	36	40
12	42	40	15	7	24	34	14	19	19	10	10

13	9	34	21	32	24	40	17	19	30	43	14
14	38	18	16	11	6	41	27	33	25	20	19
15	6	17	32	24	11	40	15	26	34	23	16
16	22	14	8	34	25	33	21	40	16	27	13
17	15	18	33	6	29	25	40	17	18	24	6
18	9	30	21	17	25	16	41	16	8	11	19
19	6	10	31	15	32	19	14	38	22	29	14
20	16	18	29	9	13	31	22	40	11	39	16
21	4	22	30	21	19	34	13	43	13	31	7
22	18	15	33	19	34	40	17	21	9	36	11
23	20	25	12	32	6	11	34	40	10	48	9
24	12	40	19	8	15	21	27	31	25	21	18
25	20	37	13	19	35	7	33	11	19	10	31
26	15	29	8	22	39	19	25	30	45	30	10
27	16	11	40	48	6	25	33	19	30	16	18
28	7	31	16	39	25	18	22	27	14	22	7
29	40	24	15	7	33	29	17	21	9	40	7
30	32	17	37	23	6	18	24	40	18	15	15

Таблица 1.4

№ вар	R_1 ОМ	R_2 ОМ	R_3 ОМ	R_4 ОМ	R_5 ОМ	R_6 ОМ	R_7 ОМ	R_8 ОМ	R_9 ОМ	R_{10} ОМ	R_{11} ОМ
1	10	20	32	10	25	6	40	17	14	18	10
2	13	36	20	13	29	15	19	25	10	25	12
3	15	27	9	15	22	31	15	21	12	42	19
4	10	7	26	10	30	15	42	16	9	14	22
5	27	10	7	27	44	35	11	24	13	8	32
6	4	15	26	4	13	31	39	11	27	21	41
7	5	29	13	5	29	16	18	40	11	6	23
8	8	30	19	8	14	40	24	22	17	21	26
9	10	14	32	10	7	29	10	18	15	19	17
10	12	18	21	12	40	33	19	14	30	16	19
11	15	20	6	15	11	31	16	21	12	36	40
12	42	40	15	42	24	34	14	19	19	10	10
13	9	34	21	9	24	40	17	19	30	43	14
14	38	18	16	38	6	41	27	33	25	20	19
15	6	17	32	6	11	40	15	26	34	23	16
16	22	14	8	22	25	33	21	40	16	27	13
17	15	18	33	15	29	25	40	17	18	24	6

18	9	30	21	9	25	16	41	16	8	11	19
19	6	10	31	6	32	19	14	38	22	29	14
20	16	18	29	16	13	31	22	40	11	39	16
21	4	22	30	4	19	34	13	43	13	31	7
22	18	15	33	18	34	40	17	21	9	36	11
23	20	25	12	20	6	11	34	40	10	48	9
24	12	40	19	12	15	21	27	31	25	21	18
25	20	37	13	20	35	7	33	11	19	10	31
26	15	29	8	15	39	19	25	30	45	30	10
27	16	11	40	16	6	25	33	19	30	16	18
28	7	31	16	7	25	18	22	27	14	22	7
29	40	24	15	40	33	29	17	21	9	40	7
30	32	17	37	32	6	18	24	40	18	15	15

Таблица 1.5

№ вар	R_1 Ом	R_2 Ом	R_3 Ом	R_4 Ом	R_5 Ом	R_6 Ом	R_7 Ом	R_8 Ом	R_9 Ом	R_{10} Ом	R_{11} Ом
1	14	18	22	14	17	27	13	10	32	11	40
2	39	25	12	10	5	38	27	12	20	9	19
3	17	42	8	12	7	26	15	19	9	38	15
4	18	14	21	9	16	30	19	22	26	20	42
5	20	8	41	13	9	18	25	32	7	13	11
6	15	21	8	27	11	24	43	41	26	29	39
7	9	6	21	11	30	29	32	23	13	32	18
8	32	21	48	17	20	41	6	26	19	20	24
9	7	19	9	15	42	28	14	17	32	26	10
10	21	16	6	30	23	13	25	19	21	9	19
11	15	36	8	12	17	19	33	40	6	18	16
12	13	10	33	19	30	24	21	10	15	7	14
13	18	43	12	30	14	36	24	14	21	32	17
14	9	20	16	25	10	22	16	19	16	11	27
15	30	23	11	34	6	14	28	16	32	24	15
16	21	27	10	16	30	19	34	13	8	34	21
17	15	24	31	18	10	22	36	6	33	6	40
18	24	11	22	8	11	31	23	19	21	17	41
19	19	29	15	22	14	21	8	14	31	15	14
20	27	39	41	11	24	28	9	16	29	9	22
21	16	31	24	13	33	40	22	7	30	21	13
22	22	36	18	9	14	31	29	11	33	19	17
23	31	48	17	10	24	11	36	9	12	32	34
24	12	21	33	25	7	22	30	18	19	8	27

25	23	10	11	19	8	19	24	31	13	19	33
26	31	30	13	45	15	21	18	10	8	22	25
27	11	16	21	30	19	31	12	18	40	48	33
28	19	22	9	14	30	16	33	7	16	39	22
29	32	40	20	9	18	25	19	7	15	7	17
30	9	15	11	18	25	30	7	15	37	23	24

Таблица 1.6

группа	E_1 , В	E_2 , В	E_3 , В	E_4 , В	E_5 , В	E_6 , В	E_7 , В	E_8 , В	E_9 , В	E_{10} , В	E_{11} , В
1.	30	24	17	21	40	28	16	11	18	34	26
2.	10	18	36	14	27	13	34	26	17	40	11
3.	18	36	10	28	11	36	21	14	40	27	30
4.	21	40	28	16	11	18	34	26	10	18	36

1.5. Контрольные вопросы

1. Дайте определение электрической цепи и ее схемы замещения.
2. Какими моделями пользуются при описании свойств идеальных и реальных источников электродвижущей силы (ЭДС)?
3. Какими моделями пользуются при описании свойств идеальных и реальных источников тока?
4. Чем отличаются линейные и нелинейные элементы электрических цепей?
5. Какие электрические цепи называются линейными электрическими цепями постоянного тока?
6. Дайте определения ветви, узла и контура электрической цепи.
7. Сформулируйте первое правило (закон) Кирхгофа. Какой принцип электромагнетизма утверждается в первом правиле Кирхгофа?
8. Сформулируйте второе правило (закон) Кирхгофа. Какой принцип электромагнетизма утверждается во втором правиле Кирхгофа?

9. Докажите, что при последовательном соединении элементов в электрической цепи эквивалентное сопротивление равно сумме их сопротивлений.

10. Докажите, что при параллельном соединении элементов в электрической цепи эквивалентная проводимость равна сумме их проводимостей.

11. Приведите пример расчета электрической цепи методом непосредственного применения правил Кирхгофа.

12. Приведите пример расчета электрической цепи методом контурных токов.

13. Приведите пример расчета электрической цепи методом узловых потенциалов.

14. Приведите пример расчета электрической цепи методом эквивалентного генератора.

15. Приведите пример расчета электрической цепи методом эквивалентных преобразований.

16. Как и для чего составляется уравнение баланса мощностей при расчете электрической цепи? Приведите пример его составления.

ТЕМА 2. РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

2. Цепи синусоидального тока и методы их расчета

2.1. Основные определения и способы расчета цепей синусоидального тока

Переменным называется электрический ток, величина и направление которого изменяются во времени. Область применения переменного тока намного шире, чем постоянного. Это объясняется тем, что напряжение переменного тока можно легко понижать или повышать с помощью трансформатора, практически в любых пределах. Переменный ток легче транс-

портировать на большие расстояния. Но физические процессы, происходящие в цепях переменного тока, сложнее, чем в цепях постоянного тока из-за наличия переменных магнитных и электрических полей.

2.1.1. Характеристики синусоидальных сигналов

Значение переменного тока в рассматриваемый момент времени называют мгновенным значением и обозначают строчной буквой i .

Мгновенный ток называется периодическим, если значения его повторяются через одинаковые промежутки времени $-i = i(t + T)$. Наименьший промежуток времени, через который значения переменного тока повторяются, называется периодом. Период T измеряется в секундах. Периодические токи, изменяющиеся по синусоидальному закону, называются *синусоидальными*.

Мгновенное значение синусоидального тока определяется соотношением

$$i(t) = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_i\right) = I_m \sin(2\pi ft + \varphi_i) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

где I_m – максимальное, или *амплитудное*, значение тока.

Аргумент синусоидальной функции $\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_i\right)$ называют фазой; величину φ , равную фазе в момент времени $t = 0$, называют начальной фазой. Фаза измеряется в радианах или градусах. Величину, обратную периоду, называют частотой. Частота f измеряется в герцах (Гц).

$$f = \frac{1}{T}.$$

В Западном полушарии и в Японии используется переменный ток частотой 60 Гц, в Восточном полушарии – частотой 50 Гц.

Величину $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ называют круговой, или угловой частотой.

Единицей измерения угловой частоты являются рад/с.

Если у синусоидальных токов начальные фазы при одинаковых частотах одинаковы, говорят, что эти токи совпадают по фазе. Если неодинаковы по фазе, говорят, что токи сдвинуты по фазе. Сдвиг фаз двух синусоидальных токов измеряется разностью начальных фаз $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. С помощью осциллографа можно измерить амплитудное значение синусоидального тока или напряжения. Амперметры и вольтметры электромагнитной системы измеряют действующие значения переменного тока и напряжения.

Действующим значением переменного тока, напряжения или ЭДС называется среднеквадратичное значение за период. В частности для тока напряжения они определяются соотношениями:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}; \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}.$$

Действующие значения переменного тока, напряжения, ЭДС меньше максимальных в $\sqrt{2}$ раз.

2.1.2. Представление синусоидальных функций в виде векторов и комплексных чисел

Законы Ома и Кирхгофа справедливы для мгновенных значений токов и напряжений.

Закон Ома для мгновенных значений:

$$i = \frac{u}{R}.$$

Законы Кирхгофа справедливы лишь для мгновенных значений тока, напряжения и ЭДС.

Первый закон: $\sum_{k=1}^n \pm i = 0$.

Второй закон: $\sum_{k=1}^n \pm u_k = \sum_{k=1}^n \pm e_k$.

При расчете электрических цепей часто приходится складывать или вычитать величины токов или напряжений, являющиеся синусоидальными функциями времени. Графические построения или тригонометрические преобразования в этом случае могут оказаться слишком громоздкими.

Задача упрощается, если представить синусоидальные функции в векторной форме. Имеем синусоидальную функцию $i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$. Тогда в соответствии с методом комплексных амплитуд этому мгновенному значению можно поставить в соответствие вектор на комплексной плоскости, длина которого соответствует амплитуде, а угловое положение определяется начальной фазой. При этом положительные углы откладывают от вещественной оси против часовой стрелки, а отрицательные от вещественной оси по часовой стрелки (рис. 2.1).

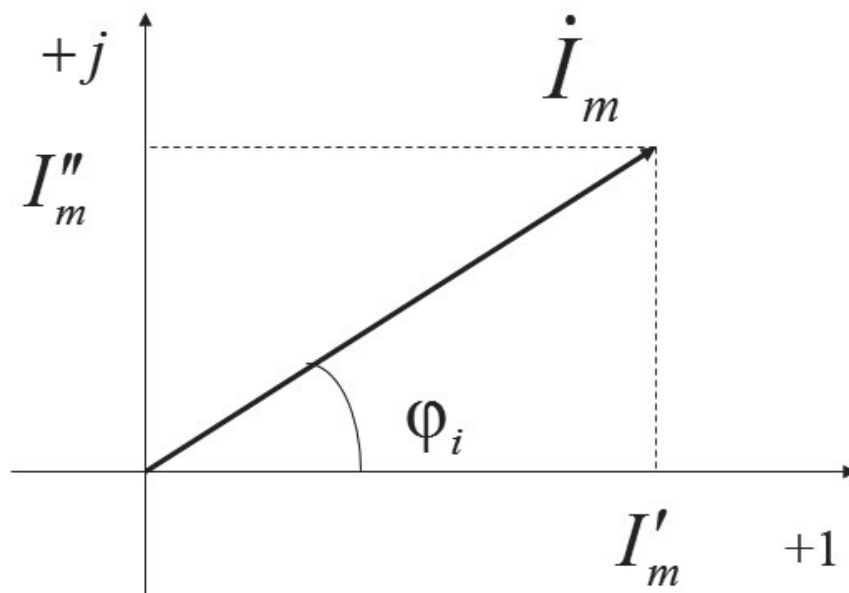


Рис. 2.1. Представление синусоидальной функции тока вектором

Комплексное число, соответствующее мгновенному значению тока будет определяться соотношением $\dot{I}_m = I_m e^{j\varphi_i}$. Такое представление назы-

вается показательной формой записи. Алгебраическая форма определяется следующим образом: $\dot{I}_m = I'_m + jI''_m$.

Переход из показательной формы в алгебраическую можно произвести с помощью геометрических построений. В частности $I'_m = I_m \cos \varphi_i$, $I''_m = I_m \sin \varphi_i$. При этом можно видеть, что

$$I_m = \sqrt{(I'_m)^2 + (I''_m)^2},$$

$$\varphi_i = \arctg \left(\frac{I''_m}{I'_m} \right).$$

Векторная диаграмма – это совокупность векторов, изображающих синусоидальные напряжения, токи и ЭДС одинаковой частоты (рис. 2.2).

Необходимо отметить, что напряжение, ток и ЭДС – это скалярные, а не векторные величины. Мы представляем их на векторной диаграмме в виде не пространственных, а временных радиус-векторов, вращающихся с одинаковой угловой скоростью. Изобразить на векторной диаграмме два вектора, вращающихся с различной угловой скоростью, бессмысленно.

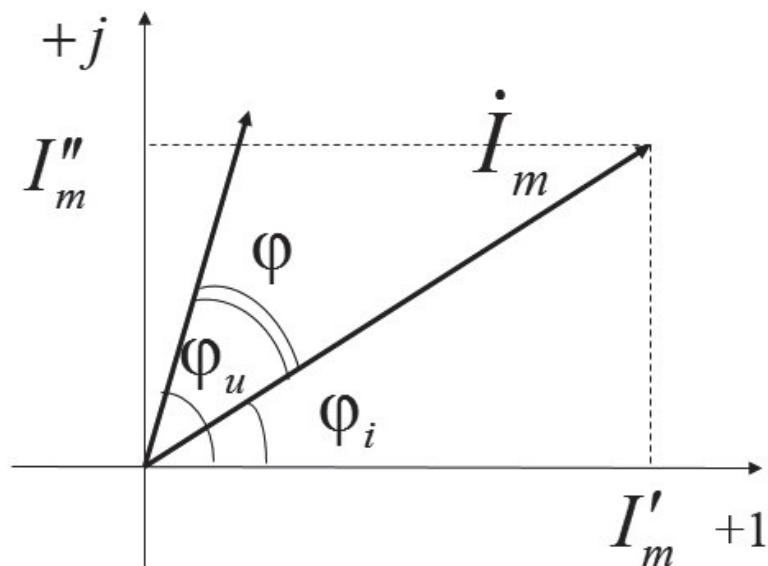


Рис. 2.2. Пример векторной диаграммы

Векторные диаграммы используются для качественного анализа электрических цепей, а также при решении некоторых электротехнических задач.

2.1.3. Сопротивление и мощность в цепи синусоидального тока

Пусть ток и напряжение на участке цепи переменного синусоидального тока характеризуются своими комплексами действующих значений: $\dot{U} = Ue^{j\varphi_u}$, $\dot{I} = Ie^{j\varphi_i}$. Они связаны с комплексными амплитудами соотношениями: $\dot{U} = \frac{\dot{U}_m}{\sqrt{2}}$; $\dot{I} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}}$. Найдем отношение комплексных амплитуд напряжения и тока.

$$\frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Ue^{j\varphi_u}}{Ie^{j\varphi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Ze^{j\varphi} = \underline{Z},$$

где Z – полное сопротивление; $\underline{Z} = Ze^{j\varphi}$ – полное комплексное сопротивление; $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ – угол сдвига фаз между напряжением и током.

Найдем произведение комплексов действующего значения напряжения и тока.

$$\dot{S} = \dot{U}\dot{I}^* = Ue^{j\varphi_u} Ie^{-j\varphi_i} = UIe^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Se^{j\varphi},$$

где $\dot{S}$ – полная комплексная мощность; $\dot{I}^* = Ie^{-j\varphi_i}$ – число, комплексно сопряженное току; S – полная мощность.

Обозначим: $P = UI\cos\varphi$ – активная мощность; $Q = UI\sin\varphi$ – реактивная мощность. Тогда соотношение между активной реактивной и полной мощностью будет иметь вид:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Приняты единицы измерения мощностей: P = [Вт], Q = [ВАр], S = [ВА].

2.1.4. Идеальные элементы цепей переменного синусоидального тока

При расчетах цепей переменного синусоидального тока электромагнитные свойства потребителей принято учитывать с помощью так называемых идеальных элементов.

Резистивный элемент (R) учитывает необратимое преобразование электрической и магнитной энергии в другие виды (тепло, свет). Индуктивный элемент (L) учитывает энергию магнитного поля $W_M = \frac{Li^2}{2}$. Емкостной элемент (C) учитывает энергию электрического поля $W_{ЭЛ} = \frac{Ci^2}{2}$. В таблице 2.1. приведены уравнения условно-графические обозначения, уравнения элементов, полные комплексные сопротивления и векторные диаграммы.

2.2. ЗАДАНИЕ НА СЕМЕСТРОВУЮ РАБОТУ

2.2.1. Расчет неразветвленной цепи синусоидального тока

Задана схема электрической цепи синусоидального тока, которая выбирается по рис. 2.3 в соответствии с вариантом. Напряжение на зажимах цепи изменяется по закону: $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$. Амплитудное значение U_m и начальная фаза φ_u напряжения, а также значения активных, индуктивных и емкостных сопротивлений приведены в таблицах 2.2 и 2.3 и выбираются по вариантам. Частота $\omega = 314$ рад/с. Требуется:

- а) определить показания указанных на схеме приборов;
- б) определить закон изменения тока в цепи;
- в) определить закон изменения напряжения между точками, к которым подключен вольтметр;
- г) определить активную, реактивную и полную мощности, потребляемые цепью;
- д) построить векторную диаграмму напряжений на всех элементах цепи и показать на ней вектор тока.

Таблица 2.1

Свойства идеальных элементов цепей переменного синусоидального тока

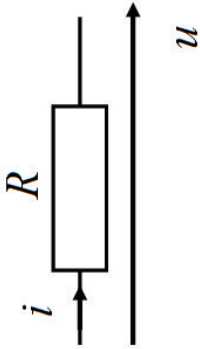
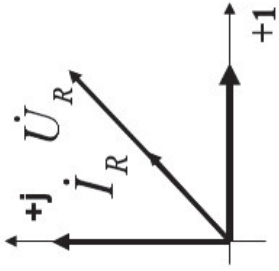
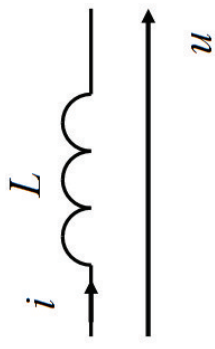
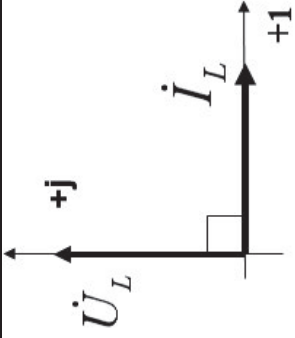
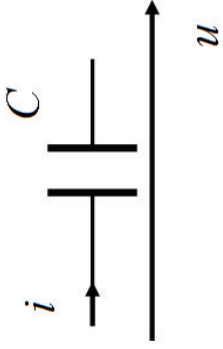
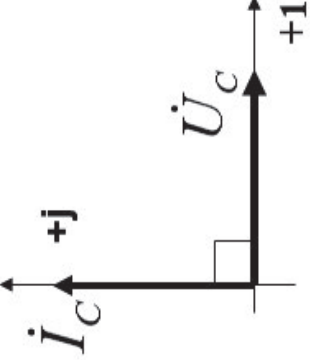
Название элемента	УГО	Уравнение	Сопротивление	Векторная диаграмма
Резистивный		$i = \frac{u}{R}$	$\underline{Z}_R = R$	
Индуктивный		$u = L \frac{di}{dt}$	$\underline{Z}_L = j\omega L = jX_L$	
Емкостной		$i = C \frac{du}{dt}$	$\underline{Z}_C = -j \frac{1}{\omega C} = -jX_C$	

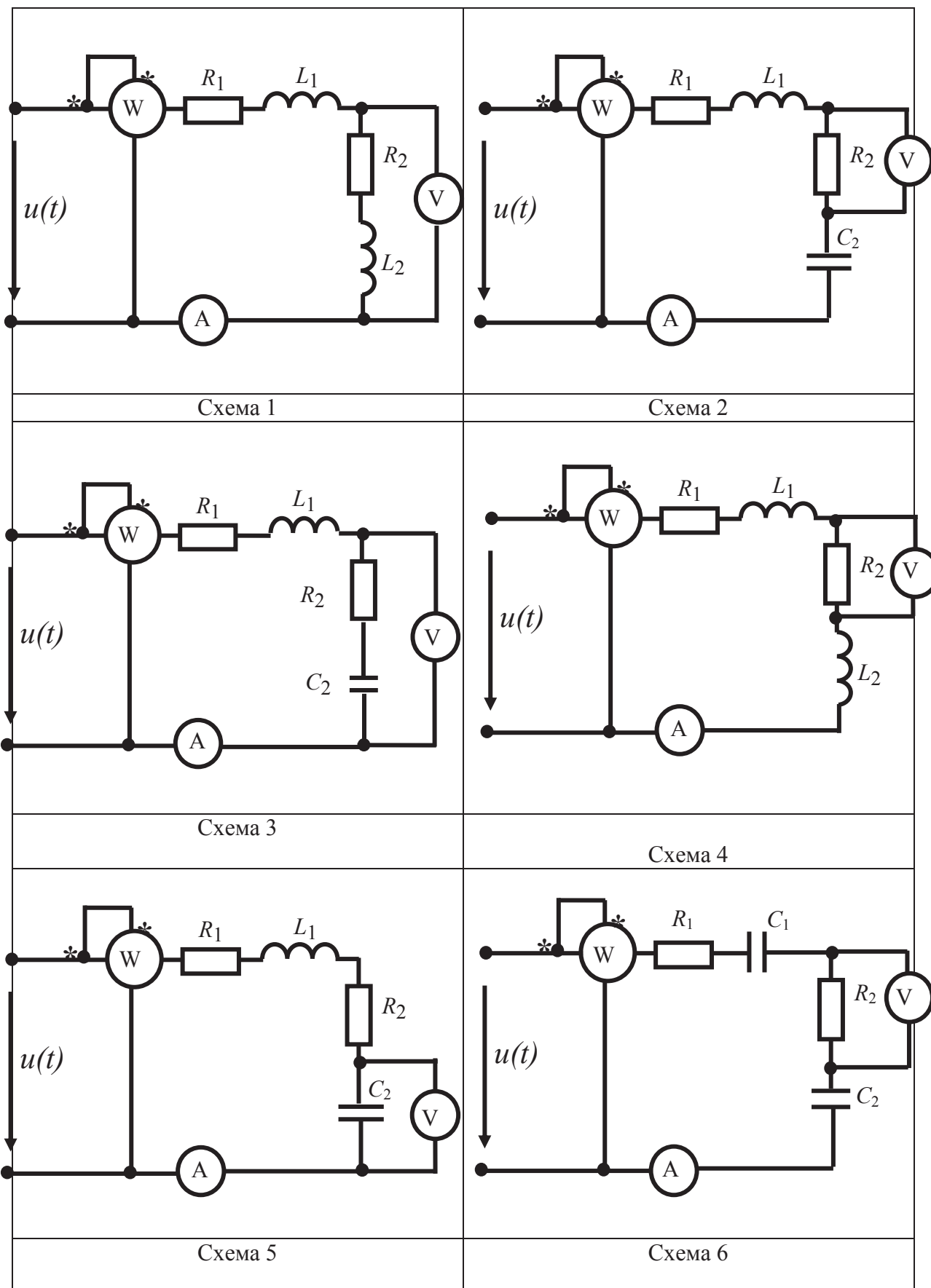
Таблица 2.2

Вариант	Схема цепи	U_m ,	φ_u ,	R_1 ,	X_{L1} ,	X_{C1} ,	R_2 ,	X_{L2} ,	X_{C2} ,
		В	Град	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом
1	1	210	15	4	11	13	8	11	9
2	2	180	30	6	7	15	4	7	11
3	11	535	-45	8	7	6	9	7	7
4	4	240	60	4	13	11	11	13	7
5	5	400	-15	9	15	7	8	15	13
6	10	350	-30	11	6	7	5	6	5
7	9	180	75	8	8	13	16	8	
8	8	535	30	5	4	15	10	4	11
9	7	240	45	16	9	6	9	9	7
10	12	200	-45	10	11	8	11	11	7
11	5	180	-60	9	7	4	7	16	13
12	4	250	30	11	7	9	7	10	15
13	11	310	-75	7	13	11	13	9	6
14	2	195	15	7	15	16	15	11	8
15	1	270	-30	13	6	10	6	7	4
16	6	210	15	15	8	9	8	7	9
17	7	180	30	6	4	11	4	13	11
18	8	535	-45	8	9	7	9	15	16
19	9	240	60	4	16	7	11	6	10
20	10	400	-15	9	10	13	8	7	9
21	12	350	-30	11	9	15	5	13	11
22	3	180	75	8	11	6	11	15	7
23	5	535	30	5	7	7	7	6	7
24	7	240	45	16	7	7	7	8	13
25	12	200	-45	10	13	13	13	4	15
26	2	180	-60	9	15	15	15	9	6
27	4	250	30	11	6	6	6	6	15
28	6	310	-75	7	15	8	8	8	6
29	8	195	15	7	6	4	4	4	8
30	10	270	-30	13	8	9	9	9	4
31	11	300	45	15	4	13	11	11	9

Таблица 2.3

Вариант	Схема цепи	U_m ,	φ_u ,	R_1 ,	X_{L1} ,	X_{C1} ,	R_2 ,	X_{L2} ,	X_{C2} ,
		В	Град	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом
1	11	310	-75	6	4	11	4	13	11
2	2	195	15	8	9	7	9	15	16

3	6	210	15	8	7	6	9	7	7
4	7	180	30	4	13	11	11	13	7
5	8	535	-45	9	15	7	8	15	13
6	9	240	60	11	6	7	5	6	5
7	10	400	-15	8	8	13	16	8	10
8		240	45	5	4	15	10	4	11
9	7	200	-45	16	9	6	9	9	7
10	12	180	-60	10	11	8	11	11	7
11	7	240	45	9	7	4	7	16	13
12	12	200	-45	11	7	9	7	10	15
13	11	535	-45	7	13	11	13	9	6
14	4	240	60	7	15	16	15	11	8
15	1	270	-30	13	6	10	6	7	4
16	12	200	-45	15	8	9	8	7	9
17	5	180	-60	4	16	7	11	6	10
18	4	250	30	9	10	13	8	7	9
19	11	310	-75	11	9	15	5	13	11
20	2	195	15	8	11	6	11	15	7
21	12	350	-30	5	7	7	7	6	7
22	3	180	75	16	7	7	7	8	13
23	5	535	30	4	11	13	8	11	9
24	7	240	45	6	7	15	4	7	11
25	12	200	-45	8	7	6	9	7	7
26	11	535	-45	4	13	11	11	13	7
27	4	240	60	9	15	7	8	15	13
28	5	400	-15	11	6	7	5	6	5
29	10	350	-30	11	9	15	5	13	11
30	9	180	75	8	11	6	11	15	7
31	8	535	30	5	7	7	7	6	7



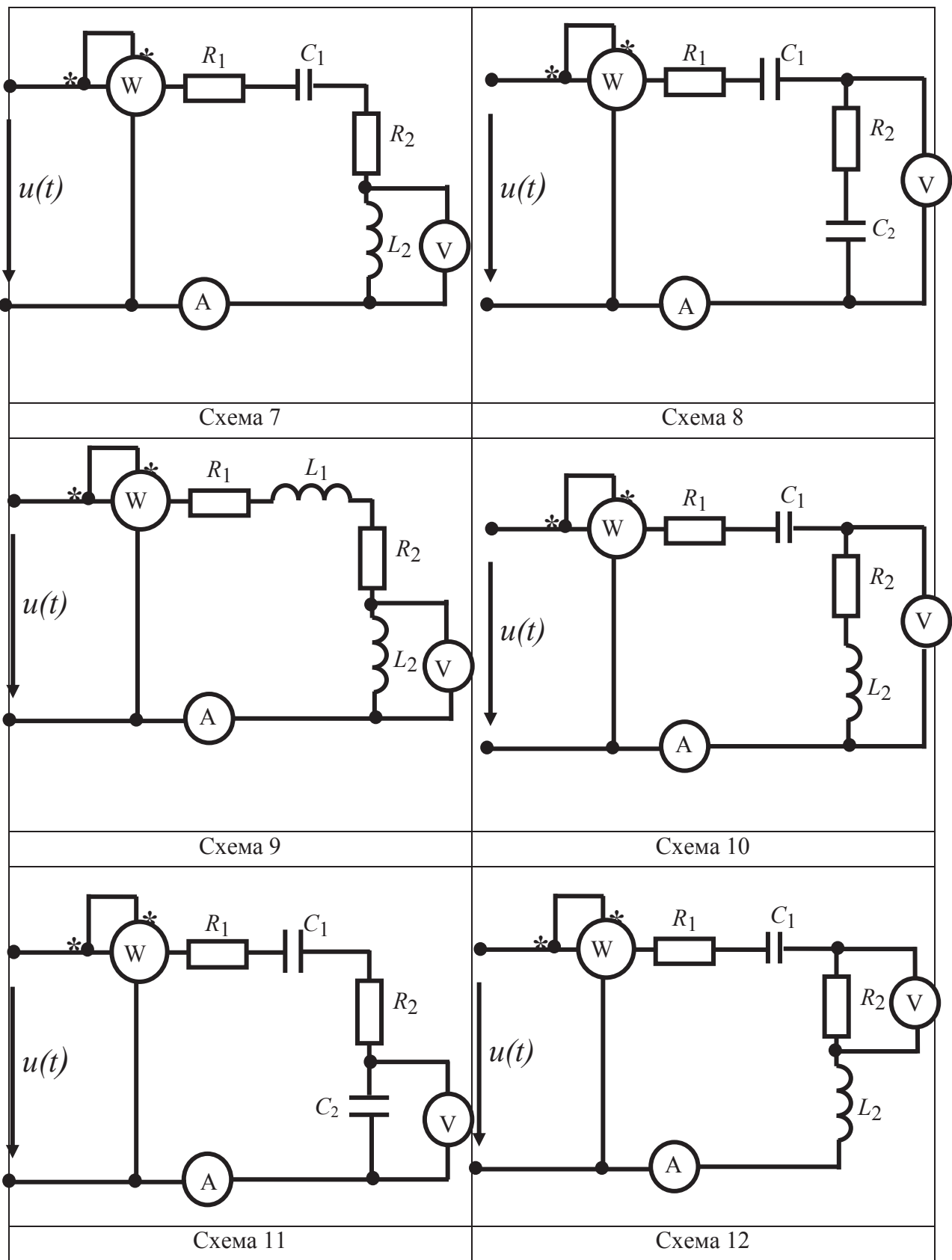


Рис. 2.3. Схемы для расчета цепи синусоидального тока

2.2.2. Расчет разветвленной цепи синусоидального тока

Для цепи синусоидального переменного тока, изображенного на рис. 2.4, U_1 – действующее значение напряжения на входе цепи (B); φ_1 – его начальная фаза (град); частота питающего напряжения $f = 50$ Гц; $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$ – полные комплексные сопротивления ветвей (Ом). Известны параметры элементов ветвей и действующее значение напряжения на ее зажимах (таблицы 2.4, 2.5).

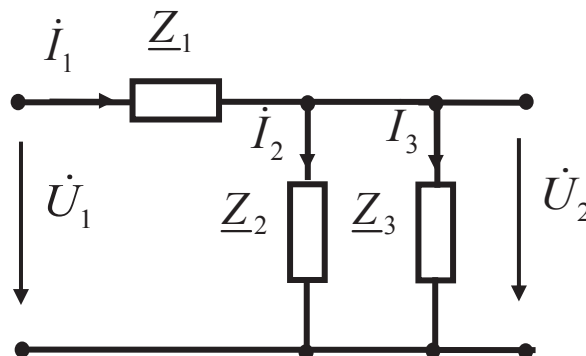


Рис. 2.4 Схема цепи

Требуется:

- определить действующие значения токов ветвей и в неразветвленной части цепи;
- определить активную, реактивную и полную мощности, потребляемые цепью;
- записать выражения для мгновенных значений токов в ветвях;
- составить схему замещения электрической цепи в соответствии с полными комплексными сопротивлениями $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$, изобразив идеальные элементы (резистивный, индуктивный, емкостной), составляющие полное сопротивление ветви. Определить параметры всех элементов R, L, C ;
- построить векторную диаграмму токов ветвей, а также напряжений на неразветвленном участке цепи, на участке с параллельным соединением элементов и напряжения на зажимах цепи.

Таблица 2.4

Вариант	U_1 ,	φ_1	$\underline{Z}_1$	$\underline{Z}_2$	$\underline{Z}_3$
	В	град	Ом	Ом	Ом
1	36	-30	$10-j 4$	$-j 3$	$5+j j 8$
2	24	60	$6+j 8$	5	$4+j 10$
3	48	20	20	$-j 10$	$8-j 7$
4	24	50	$-j 20$	$12+j 6$	15
5	36	-45	$18+j 20$	25	$10-j 5$
6	24	45	7	$6-j 13$	$5+j 15$
7	48	60	$j 5$	$15-j 12$	$14+j 9$
8	24	-75	$6-j 8$	$12+j 16$	$-j 10$
9	36	30	$j 25$	20	$12-j 6$
10	48	25	32	$24-j 10$	$j 16$
11	24	-65	$8+j 4$	$16-j 12$	14
12	36	35	$7-j 3$	3	$14+j 11$
13	48	-45	$15+j 20$	$7-j 3$	24
14	24	20	$3+j 12$	6	$11-j 2$
15	36	-40	$4-j 4$	$8+j 3$	9
16	48	-75	16	$9-j 3$	$5+j 9$
17	24	25	$2-j 5$	7	$5+j 10$
18	36	-60	$10+j 10$	$-j 9$	$8+j 3$
19	48	50	$12-j 6$	8	$6+j 5$
20	24	30	$3+j 4$	$8-j 2$	6
21	36	70	$9-j 6$	13	$8+j 10$
22	48	-60	$13+j 15$	$10-j 2$	18
23	24	0	$4-j$	$2+j 4$	$3-j 9$
24	36	90	18	$9-j 2$	$3+j 6$
25	48	45	$13+j 4$	$6-j 2$	10
26	24	-90	7	$5-j 3$	$4+j 6$
27	36	-45	$12-j 3$	$j 15$	$10+j 10$
28	48	30	$14-j 11$	$25+j 12$	$-j 15$
29	36	0	$8+j 7$	$j 16$	$9-j 15$
30	48	50	$21-j 23$	25	$17+j 22$
31	48	-75	16	$9-j 3$	$5+j 9$
32	24	25	$2-j 7$	10	$5+j 10$
33	36	-60	10	$10-j 9$	$8+j 3$
34	48	50	$12-j 6$	$8-j 5$	6
35	24	30	$3+j 4$	$8-j 2$	6

Таблица 2.5

Вариант	$U_1,$	$\varphi_1,$	$\underline{Z}_1,$	$\underline{Z}_2,$	$\underline{Z}_3,$
	В	Град	Ом	Ом	Ом
1	24	-65	$8+j 4$	$16-j 12$	14
2	36	35	$7-j 3$	3	$14+j 11$
3	48	-45	$15+j 20$	$7-j 3$	24
4	24	20	$3+j 12$	6	$11-j 2$
5	36	-40	$4-j 4$	$8+j 3$	9
6	48	-75	16	$9-j 3$	$5+j 9$
7	24	25	$2-j 5$	7	$5+j 10$
8	48	30	$14-j 11$	$25+j 12$	$-j 15$
9	36	0	$8+j 7$	$j 16$	$9-j 15$
10	48	50	$21-j 23$	25	$17+j 22$
11	48	-75	16	$9-j 3$	$5+j 9$
12	24	25	$2-j 7$	10	$5+j 10$
13	36	-60	10	$10-j 9$	$8+j 3$
14	48	50	$12-j 6$	$8+j 5$	6
15	24	30	$3+j 4$	$8-j 2$	6
16	36	-30	$10-j 4$	$-j 3$	$5+j j 8$
17	24	60	$6+j 8$	5	$4+j 10$
18	48	20	20	$-j 10$	$8-j 7$
19	24	50	$-j 20$	$12+j 6$	15
20	36	-45	$18+j 20$	25	$10-j 5$
21	24	45	7	$6-j 13$	$5+j 15$
22	24	45	$10-j 4$	$-j 3$	$5+j j 8$
23	48	60	$6+j 8$	5	$4+j 10$
24	24	-75	20	$-j 10$	$8-j 7$
25	36	30	$-j 20$	$12+j 6$	15
26	48	25	$18+j 20$	25	$10-j 5$
27	24	-65	$13+j 4$	$6-j 2$	10
28	36	35	7	$5-j 3$	$4+j 6$
29	36	-30	$12-j 3$	$j 15$	$10+j 10$
30	24	60	$14-j 11$	$25+j 12$	$-j 15$
31	48	20	$8+j 7$	$j 16$	$9-j 15$
32	48	60	$j 5$	$15-j 12$	$14+j 9$
33	24	-75	$6-j 8$	$12+j 16$	$-j 10$
34	36	30	$j 25$	20	$12-j 6$
35	48	25	32	$24-j 10$	$j 16$

2.3. Примеры решения заданий

2.3.1. Пример расчета неразветвленной цепи синусоидального тока

Задана схема и ее параметры:

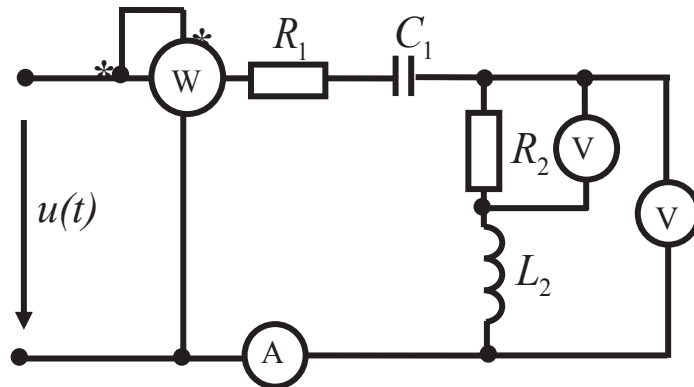


Рис. 2.5. Расчетная схема п. 2.3.1.

$$U_m = 240 \text{ В}, \quad \varphi_u = -60^\circ, \quad R_1 = 17 \text{ Ом}, \quad X_{L2} = 20 \text{ Ом}, \quad R_2 = 8 \text{ Ом}, \quad X_{C1} = 5 \text{ Ом}.$$

В соответствии с постановкой задачи (п. 2.2.1.). Определим *показания приборов*.

Амперметр A покажет действующее значение тока цепи I . Вольтметр V_1 покажет действующее значение напряжения на резисторе R_2 (U_1). Вольтметр V_2 покажет действующее значение напряжения U_2 на участке цепи с последовательным соединением R_2 , L_2 . Ваттметр W покажет значение активной мощности P , потребляемой цепью. Для расчета изобразим схему цепи, исключив из нее приборы (рис. 2.6).

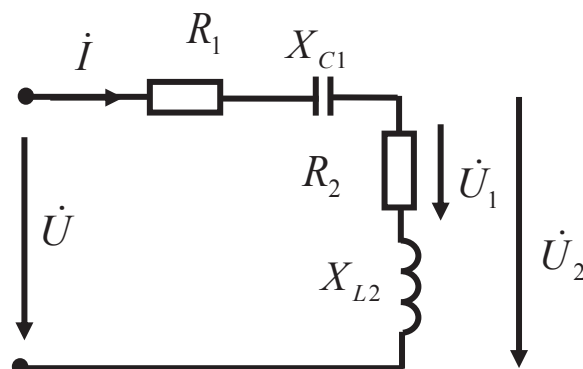


Рис. 2.6 Схема замещения цепи

Действующее значение напряжения на входе цепи:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{240}{\sqrt{2}} = 169,7 \text{ В.}$$

Полное сопротивление цепи:

$$Z = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_{L2} - X_{C1})^2} = \sqrt{(17 + 8)^2 + (20 - 5)^2} = 29,15 \text{ Ом.}$$

Действующее значение тока:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{169,7}{29,15} = 5,82 \text{ А.}$$

Действующее значение напряжения U_1 :

$$U_1 = R_2 I = 8 \cdot 5,82 = 46,56 \text{ В.}$$

Полное сопротивление участка R_2, L_2 :

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_{L2}^2} = \sqrt{8^2 + 20^2} = 21,54 \text{ Ом.}$$

Действующее значение напряжения на участке R_2, L_2 :

$$U_2 = I \cdot Z_2 = 5,82 \cdot 21,54 = 125,37 \text{ В.}$$

Сдвиг фаз между напряжением и током на входе цепи:

$$\varphi = \arctg\left(\frac{X_{L2} - X_{C1}}{R_1 + R_2}\right) = \arctg\left(\frac{20 - 5}{17 + 8}\right) = 31^\circ.$$

Мощность, потребляемая цепью:

$$P = UI \cos \varphi = 169,7 \cdot 5,82 \cdot \cos 31^\circ = 846,9 \text{ Вт.}$$

Определим закон изменения тока в цепи.

Ток в цепи изменяется по синусоидальному закону:

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$$

Амплитуда тока:

$$I_m = \sqrt{2} I = \sqrt{2} \cdot 5,82 = 8,23 \text{ А.}$$

Начальную фазу тока φ_i определим из соотношения:

$$\varphi_i = \varphi_u - \varphi$$

Знак « $-$ » при угле φ взят потому, что $X_{L2} > X_{C1}$, т.е. цепь носит индуктивный характер и ток отстаёт от напряжения.

$$\psi_i = -60^\circ - 31^\circ = -91^\circ$$

Закон изменения тока:

$$i(t) = 8,23 \sin(\omega t - 91^\circ) \text{ А.}$$

Определим закон *изменения напряжения между точками, к которым подключён вольтметр V_1* . Для этого посчитаем действующее значения напряжения U_1 . Именно это значение покажет вольтметр V_1 .

Мгновенное значение напряжения u_1 имеет вид:

$$u_1(t) = U_{m1} \sin(\omega t + \varphi_{u1}).$$

$\varphi_{u1} = \varphi_i$, так как ток и напряжение на резистивном элементе совпадают по фазе.

Амплитуда напряжения на резисторе R_2

$$U_{m1} = \sqrt{2} \cdot U_1 = \sqrt{2} \cdot 46,56 = 65,84 \text{ В.}$$

Окончательно закон *изменения напряжения на резисторе R_2*

$$u_1(t) = 65,84 \sin(\omega t - 91^\circ) \text{ В.}$$

Для вольтметра V_2 :

$$u_2(t) = U_{m2} \cdot \sin(\omega t + \varphi_{u2}) \text{ В.}$$

$$U_{m2} = \sqrt{2} \cdot U_2 = \sqrt{2} \cdot 125,37 = 177,3 \text{ В.}$$

$$\varphi_{u2} = \varphi_i + \varphi_2.$$

Знак « $+$ » перед φ_2 определяется тем, что напряжение на участке с индуктивным элементом опережает ток на угол φ_2 .

$$\varphi_2 = \arctg\left(\frac{X_{L2}}{R_2}\right) = \arctg\left(\frac{20}{8}\right) = 68,2^\circ.$$

$$\varphi_{u2} = -91^\circ + 68,2^\circ = -22,8^\circ$$

$$u_2(t) = 177,3 \cdot \sin(\omega t - 22,8) \text{ В.}$$

Определим *активную, реактивную и полную мощности, потребляемые цепью.*

Полная комплексная мощность:

$$\dot{S} = \dot{U} \cdot \dot{I}^*,$$

где $\dot{U} = U \cdot e^{j\varphi_u}$ – комплексное действующее значение напряжения на входе цепи, $\dot{I}^*$ – сопряженное действующее значение тока ($\dot{I}^* = I \cdot e^{-j\varphi_i}$).

$$\dot{U} = 169,7 \cdot e^{-j60^\circ} \text{ В}$$

$$\dot{I}^* = I \cdot e^{-j\varphi_i} = 5,82 \cdot e^{j91^\circ}$$

$$\begin{aligned}\dot{S} &= (169,7 e^{-j60^\circ}) \cdot (5,82 e^{j91^\circ}) = 987,65 e^{j31^\circ} = 987,65 (\cos 31^\circ + j \sin 31^\circ) = \\ &= 846,6 + j508,68 \text{ ВА.}\end{aligned}$$

Отсюда:

- активная мощность $P = 846,6 \text{ Вт}$
- реактивная мощность $Q = 508,68 \text{ ВАр}$;
- полная мощность $S = 987,65 \text{ ВА}$.

Построим векторную диаграмму напряжений на элементах и покажем на ней векторы токов.

Для построения векторной диаграммы выразим напряжения на всех элементах цепи:

$$U_{R1} = IR_1 = 5,82 \cdot 17 = 98,94 \text{ В};$$

$$U_{C1} = I \cdot X_{C1} = 5,82 \cdot 5 = 29,1 \text{ В};$$

$$U_{R2} = I \cdot R_2 = 5,82 \cdot 8 = 46,56 \text{ В};$$

$$U_{L2} = I \cdot X_{L2} = 5,82 \cdot 20 = 116,4 \text{ В}.$$

При построении диаграммы учитывается:

- а) напряжение, приложенное к цепи, имеет начальную фазу -60° ;
- б) напряжение и ток в резистивном элементе совпадают по фазе;
- в) напряжение на индуктивном элементе опережает ток; напряжение на емкостном элементе отстает от тока на 90° ;

г) масштабы для векторов напряжений и токов должны быть различными, так как единицами измерения напряжения является Вольт (В), а тока Ампер (А).

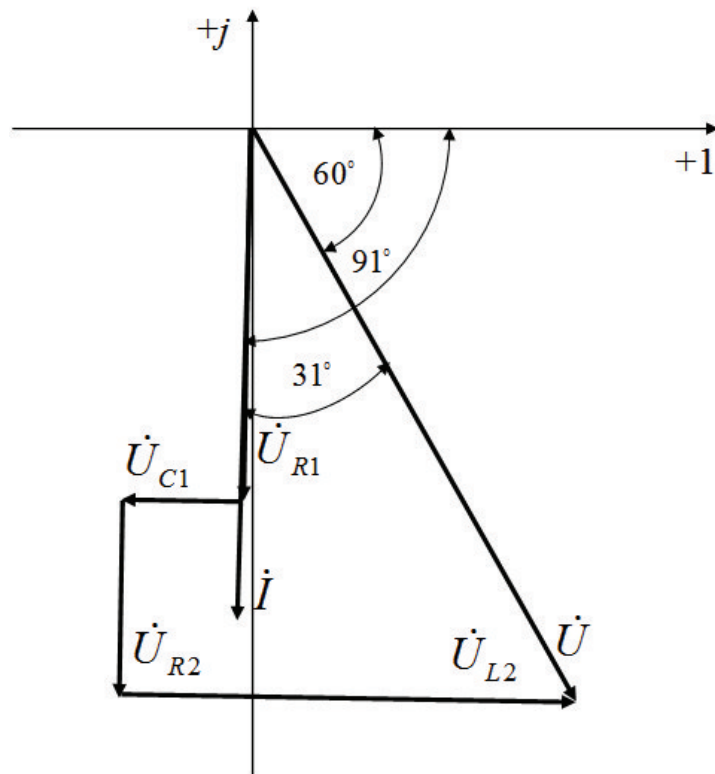


Рис. 2.6. Векторная диаграмма для неразветвленной цепи

2.3.2. Пример расчета разветвленной цепи синусоидального тока

Для схемы, изображенной на рис. 2.7, известно:

$$U_1 = 25 \text{ В}, \varphi = 20^\circ, \underline{Z}_1 = 5 - j3 \text{ Ом}, \underline{Z}_2 = -j8 \text{ Ом}, \underline{Z}_3 = 8 + j5 \text{ Ом}.$$

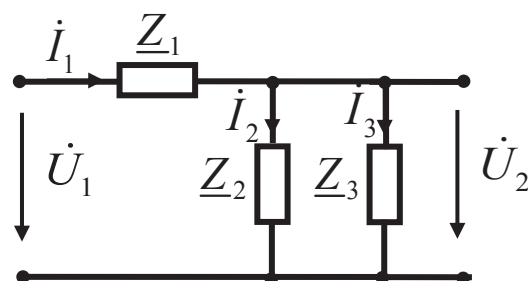


Рис. 2.7. Схема к задаче 2.3.2

Определим действующие значения токов ветвей и в неразветвленной части цепи.

Начальная фаза напряжения составляет 20° . Тогда комплексное действующее значение напряжения на входе цепи равно: $\dot{U}_1 = 25e^{j20^\circ}$ В.

Выразим комплексные сопротивления ветвей в показательной форме:

$$\underline{Z}_1 = 5 - j3 = 5,83e^{-j31^\circ} \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_2 = -j8 = 8e^{-j90^\circ} \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_3 = 8 + j5 = 9,43e^{j32^\circ} \text{ Ом}.$$

Сопротивление на участке цепи с параллельным соединением сопротивлений $\underline{Z}_2$ и $\underline{Z}_3$:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{23} &= \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{8e^{-j90^\circ} \cdot 9,43e^{j32^\circ}}{(-j8) + (8 + j5)} = \frac{75,44e^{-j58^\circ}}{8 - j3} = \frac{75,44e^{-j58^\circ}}{8,54e^{-j20,56^\circ}} = \\ &= 8,33e^{-j37,44^\circ} = 6,61 - j5,06 \text{ Ом}.\end{aligned}$$

Эквивалентное сопротивление цепи:

$$\underline{Z}_\Sigma = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23} = 5 - j3 + 6,61 - j5,06 = 11,61 - j8,06 = 14,13e^{-j34,78^\circ} \text{ Ом}.$$

Определим токи ветвей, используя правила преобразования цепи.

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_\Sigma} = \frac{25e^{j20^\circ}}{14,13e^{-j34,78^\circ}} = 1,77e^{j54,78^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{U}_2 = \dot{I}_1 \cdot \underline{Z}_{23} = 1,77e^{j54,78^\circ} \cdot 8,33e^{-j37,44^\circ} = 14,74e^{j17,34^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{14,74e^{j17,34^\circ}}{8e^{-j90^\circ}} = 1,84e^{j107,34^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_3} = \frac{14,74e^{j17,34^\circ}}{9,43e^{j32^\circ}} = 1,56e^{-j14,56^\circ} \text{ А}.$$

Действующие значения токов ветвей:

$$I_1 = 1,77 \text{ А}, I_2 = 1,84 \text{ А}, I_3 = 1,56 \text{ А}.$$

Определим активную, реактивную и полную мощности, потребляемые цепью.

Активная (P), реактивная (Q) и полная (S) мощности, потребляемые цепью, определяются из выражений:

$$P = U_1 I_1 \cos \varphi;$$

$$Q = U_1 I_1 \sin \varphi;$$

$$S = U_1 I_1.$$

U_1, I_1 – действующие значения напряжения и тока на входе цепи, соответственно; $\varphi = \varphi_{u_1} - \varphi_{i_1}$ – сдвиг фаз между напряжением и током на входе цепи.

$$U_1 = 25 \text{ В}, I_1 = 1,77 \text{ А},$$

$$\varphi = 20^\circ - 54,78^\circ = -34,78^\circ.$$

Рассчитываем мощности:

$$P = 25 \cdot 1,77 \cos(-34,78^\circ) = 36,34 \text{ Вт},$$

$$Q = 25 \cdot 1,77 \sin(-34,78^\circ) = -25,24 \text{ ВАр},$$

$$S = 25 \cdot 1,77 = 44,25 \text{ ВА}.$$

Запишем выражения для мгновенных значений токов в ветвях.

Мгновенные значения токов представляют собой синусоидальные функции вида $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$, где $I_m = \sqrt{2} \cdot I$ – амплитуда соответствующего тока, $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 314$ рад/с – частота цепи, φ_i – начальная фаз соответствующего тока.

Тогда мгновенные значения токов имеют вид:

$$i_1(t) = I_{m1} \sin(\omega t + \varphi_{i_1}) = \sqrt{2} \cdot 1,77 \sin(314t + 54,78^\circ) = 2,50 \sin(314t + 54,78^\circ);$$

$$i_2(t) = I_{m2} \sin(\omega t + \varphi_{i_2}) = \sqrt{2} \cdot 1,84 \sin((314t + 107,34^\circ) = 2,60 \sin(314t + 107,34^\circ);$$

$$i_3(t) = I_{m3} \sin(\omega t + \varphi_{i_3}) = \sqrt{2} \cdot 1,56 \sin((314t - 14,56^\circ) = 2,21 \sin(314t - 14,56^\circ).$$

Составим схему замещения электрической цепи в соответствии с полными комплексными сопротивлениями $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$, изобразив идеальные элементы (резистивный, индуктивный, емкостной), составляющие полное сопротивление ветви. Определим параметры всех элементов R, L, C .

По выражению полных комплексных сопротивлений ветвей $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$ определяем, что первая ветвь (неразветвленная часть цепи) с сопротивлением $\underline{Z}_1 = 5 - j3$ Ом включает в себя резистивный и емкостной элементы, вторая ветвь цепи (в разветвленной части) с сопротивлением $\underline{Z}_2 = -j8$ Ом включает в себя только емкостной элемент, и третья ветвь (также в разветвленной части цепи) с сопротивлением $\underline{Z}_3 = 8 + j5$ Ом включает в себя резистивный и индуктивный элементы. Тогда схема замещения имеет вид (рис. 2.8):

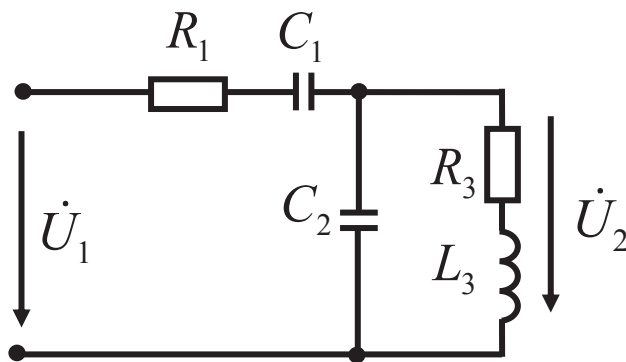


Рис. 2.8. Схема замещения цепи

Расчет параметров элементов проведем из известных выражений:

$$R_1 = 5 \text{ Ом};$$

$$X_{C1} = \frac{1}{\omega C_1} = 3 \text{ Ом} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{\omega X_{C1}} = \frac{1}{314 \cdot 3} = 1060 \text{ мкФ};$$

$$X_{C2} = \frac{1}{\omega C_2} = 8 \text{ Ом} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{\omega X_{C2}} = \frac{1}{314 \cdot 8} = 398 \text{ мкФ};$$

$$R_3 = 8 \text{ Ом};$$

$$X_{L3} = \omega \cdot L_3 = 5 \text{ Ом} \Rightarrow L_3 = \frac{X_{L3}}{\omega} = \frac{5}{314} = 15,9 \text{ мГн}.$$

Построим векторную диаграмму токов ветвей, а также напряжений на неразветвленном участке цепи, на участке с параллельным соединением элементов и напряжения на зажимах цепи.

На векторной диаграмме должны быть изображены следующие векторы:

- вектор напряжения на входе цепи $\dot{U}_1 = 25e^{j20^\circ}$;
- векторы токов $\dot{I}_1 = 1,77e^{j54,78^\circ}$, $\dot{I}_2 = 1,84e^{j107,34^\circ}$, $\dot{I}_3 = 1,56e^{-j14,56^\circ}$;
- вектор напряжения на разветвленном участке цепи $\dot{U}_2 = \dot{I}_1 \cdot \underline{Z}_{23} = 1,77e^{j54,78^\circ} \cdot 8,33e^{-j37,44^\circ} = 14,74e^{j17,34^\circ}$;
- вектор напряжения на неразветвленном участке цепи $\dot{U}_3$, который необходимо рассчитать как:

$$\dot{U}_3 = \dot{I}_1 \cdot \underline{Z}_1 = 1,77e^{j54,78^\circ} \cdot 5,83e^{-j31^\circ} = 10,32e^{j23,78^\circ} \text{ В.}$$

Теперь на комплексной плоскости изображает эти векторы (рис. 2.8).

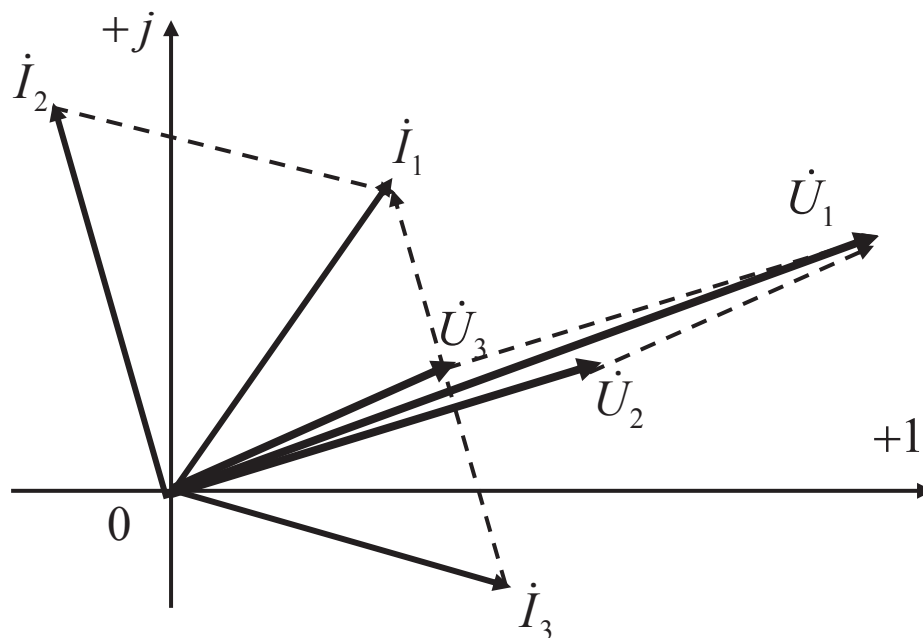


Рис. 2.9. Векторная диаграмма к рис. 2.8

Из диаграммы видно, что расчеты проведены верно, поскольку выполняются первое и второе правила Кирхгофа: $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3$ и $\dot{U}_1 = \dot{U}_2 + \dot{U}_3$.

2.4. Контрольные вопросы

1. Какие электрические цепи называются цепями переменного синусоидального тока?
2. Опишите процесс получения синусоидальных сигналов.

3. Какие характеристики синусоидальных сигналов Вы знаете?
4. В чем заключается расчет электрической цепи переменного синусоидального тока методом комплексных амплитуд?
5. Как выполняется переход от комплексной амплитуды тока к его мгновенному значению?
6. Какие идеальные элементы схем замещения электрических цепей используются для описания процессов, происходящих в реальных электрических цепях?
7. Запишите уравнение резистивного элемента. Какой сдвиг фаз вносит резистивный элемент между напряжением и током ?
8. Запишите уравнение индуктивного элемента. Какой сдвиг фаз вносит индуктивный элемент между напряжением и током?
9. Запишите уравнение емкостного элемента. Какой сдвиг фаз вносит емкостной элемент между напряжением и током?
10. Как определяется полное комплексное сопротивление электрической цепи?
11. Как определяется полная комплексная проводимость электрической цепи?
12. Сформулируйте правила Кирхгофа для электрической цепи переменного синусоидального тока.
13. При каких условиях в электрической цепи осуществляется резонанс напряжений?
14. При каких условиях в электрической цепи осуществляется режим резонанса токов?
15. Дайте определение полной комплексной мощности электрической цепи переменного синусоидального тока.
16. Дайте определение полной, активной и реактивной мощности цепи переменного синусоидального тока. Укажите их единицы измерения.
17. Как определяется коэффициент мощности электрической цепи?