МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

Учебно-методическое управление
по высшему образованию

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические указания и контрольные задания
для студентов-заочников
энергетических, горных, металлургических,
электроприборостроения и автоматизации,
технологических специальностей,
а также геологических, электротехнических,
электронной техники и автоматики,
химико-технологических и инженерно-экономических
специальностей вузов

ВЫСШАЯ ШКОЛА 1988

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

Утверждено
Учебно-методическим
управлением
по высшему образованию

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

**Методические указания и контрольные задания
для студентов-заочников
энергетических, горных, металлургических,
электроприборостроения и автоматизации,
технологических специальностей,
а также геологических, электротехнических,
электронной техники и автоматики,
химико-технологических и инженерно-экономических
специальностей вузов**

Издание четвертое

ПОД РЕДАКЦИЕЙ ПРОФ. С.М. ТАРГА

МОСКВА "ВЫСШАЯ ШКОЛА" 1988

ББК 22.21
Т33
УДК 531.8

Л.И. Котова, Р.И. Надеева, С.М. Тарг, В.Л. Цывильский, И.М. Шмарова

Теоретическая механика: Методические указания и
Т33 контрольные задания для студентов-заочников энергетических, горных, металлургических, электроприборостроения и автоматизации, технологических специальностей, а также геологических, электротехнических, электронной техники и автоматики, химико-технологических и инженерно-экономических специальностей вузов/Под ред. С.М. Тарга. – 4-е изд. – М.: Высш. шк., 1988. – 64 с.: ил.

Т $\frac{1703020000(4309000000) - 304}{001(01) - 88}$ 47–88

ББК 22.21
531

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

В курсе теоретической механики студенты изучают три ее раздела: статику, кинематику и динамику.

1. Для изучения курса необходимо иметь соответствующую математическую подготовку. Во всех разделах курса, начиная со статики, широко используется векторная алгебра. Необходимо уметь вычислять проекции векторов на координатные оси, находить геометрически (построением векторного треугольника или многоугольника) и аналитически (по проекциям на координатные оси) сумму векторов, вычислять скалярное и векторное произведения двух векторов и знать свойства этих произведений, а в кинематике и динамике – дифференцировать векторы. Надо также уметь свободно пользоваться системой прямоугольных декартовых координат на плоскости и в пространстве, знать, что такое единичные векторы (орты) этих осей и как выражаются составляющие вектора по координатным осям с помощью ортов.

Для изучения кинематики надо совершенно свободно уметь дифференцировать функции одного переменного, строить графики этих функций, быть знакомым с понятиями о естественном трехграннике, кривизне кривой и радиусе кривизны, знать основы теории кривых 2-го порядка, изучаемой в аналитической геометрии.

Для изучения динамики надо уметь находить интегралы (неопределенные и определенные) от простейших функций, вычислять частные производные и полный дифференциал функций нескольких переменных, а также уметь интегрировать дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными и линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка (однородные и неоднородные) с постоянными коэффициентами.

2. При изучении материала курса по учебнику нужно прежде всего уяснить существо каждого излагаемого там вопроса. Главное – это понять изложенное в учебнике, а не "заучить".

Изучать материал рекомендуется по темам (пунктам приводимой ниже программы) или по главам (параграфам) учебника. Сначала следует прочитать весь материал темы (параграфа), особенно не задерживаясь на том, что показалось не совсем понятным: часто это становится понятным из последующего. Затем надо вернуться к местам, вызвавшим затруднения и внимательно разобраться в том, что было неясно. Особое внимание при повторном чтении обратите на формулировки соответствующих определений, теорем и т.п. (они обычно бывают набраны в учебнике курсивом или разрядкой); в точных формулировках, как правило, существенно каждое слово и очень полезно понять, почему данное положение сформулировано именно так. Однако не следует стараться заучивать формулировки; важно понять их смысл и уметь изложить результат своими словами.

Необходимо также понять ход всех доказательств (в механике они обычно не сложны) и разобраться в их деталях. Доказательства надо уметь воспроизводить самостоятельно, что нетрудно сделать, поняв идею доказательства; пытаться просто их "заучивать" не следует, никакой пользы это не принесет.

Закончив изучение темы, полезно составить краткий конспект, по возможности не заглядывая в учебник.

При изучении курса особое внимание следует уделить приобретению навыков решения задач. Для этого, изучив материал данной темы, надо сначала обязательно разобраться в решениях соответствующих задач, которые приводятся в учебнике, обратив особое внимание на методические указания по их решению. Затем постарайтесь решить самостоятельно несколько аналогичных задач из сборника задач И.В. Мещерского и после этого решите соответствующую задачу из контрольного задания.

3. Закончив изучение темы, нужно проверить, можете ли вы дать ответ на все вопросы программы курса по этой теме (осуществить самопроверку).

Поскольку все вопросы, которые должны быть изучены и усвоены, в программе перечислены достаточно подробно, дополнительные вопросы для самопроверки здесь не приводятся. Однако очень полезно составить перечень таких вопросов самостоятельно (в отдельной тетради) следующим образом.

Начав изучение очередной темы программы, выписать сначала в тетради последовательно все перечисленные в программе вопросы этой темы, оставив справа широкую колонку (поле).

Затем по мере изучения материала темы (чтения учебника) следует в правой колонке указать страницу учебника, на которой излагается соответствующий вопрос, а также номер формулы или уравнения (уравнений), которые выражают ответ на вопрос математически. В результате в данной тетради будет полный перечень вопросов для самопроверки, который можно использовать и при подготовке к экзамену. Кроме того, ответив на вопрос или написав соответствующую формулу (уравнение), вы можете по учебнику быстро проверить, правильно ли это сделано, если в правильности своего ответа сомневаетесь. Наконец, по тетради с такими вопросами вы можете установить, весь ли материал, предусмотренный программой, вами изучен (если изучен весь материал, то против каждого вопроса в правой колонке будет указана соответствующая страница учебника).

Следует иметь в виду, что в различных учебниках материал может излагаться в разной последовательности. Поэтому ответ на какой-нибудь вопрос программы может оказаться в другой главе учебника, но на изучении курса в целом это, конечно, никак не скажется.

Указания по выполнению контрольных заданий приводятся ниже (после рабочей программы). Их надо прочитать обязательно и ими руководствоваться. Кроме того, к каждой задаче даются конкретные методические указания по ее решению и приводится пример решения.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА *

В программе дается перечень вопросов, которые как основная часть курса должны изучаться студентами всех специальностей, и вопросов, которые в зависимости от степени их актуальности для данной специальности и числа часов, отведенных на курс учебным планом, могут по решению кафедры включаться в программу не полностью или не включаться совсем; эти вопросы поставлены в скобках и о включении их в программу кафедра должна сообщить студентам. По решению кафедры для отдельных специальностей в программу могут включаться и другие дополнительные вопросы, перечень которых тоже должен быть сообщен студентам.

Введение

Механическое движение как одна из форм движения материи. Предмет механики. Теоретическая механика и ее место среди естественных и технических наук. Механика как теоретическая база ряда областей современной техники. Объективный характер законов механики. Основные исторические этапы развития механики. Связь механики с общественным производством и ее роль в решении народнохозяйственных задач, поставленных партией и правительством.

СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Основные понятия и аксиомы статики. Предмет статики. Основные понятия статики: абсолютно твердое тело, сила, эквивалентные и уравновешенные системы сил, равнодействующая, силы внешние и внутренние.

---

* Составлена на основе программы по теоретической механике, утвержденной Учебно-методическим управлением по высшему образованию 1 октября 1984 г. (индекс УМУ/0-5/2).

Аксиомы статики. Связи и реакции связей. Основные виды связей: гладкая плоскость или поверхность, гладкая опора, гибкая нить, цилиндрический и сферический шарниры, невесомый стержень; реакции этих связей.

Система сходящихся сил. Геометрический и аналитический способы сложения сил. Сходящиеся силы. Равнодействующая сходящихся сил. Геометрическое и аналитические условия равновесия системы сходящихся сил.

Равновесие произвольной системы сил. Момент силы относительно точки (центра) как вектор. Пара сил; момент пары. Свойства пары сил. Понятие о приведении системы сил к заданному центру. Главный вектор и главный момент системы сил. Условия равновесия произвольной системы сил, приложенных к твердому телу.

Система сил, расположенных на плоскости (плоская система сил). Алгебраическая величина момента силы. (Вычисление главного вектора и главного момента плоской системы сил.) Аналитические условия равновесия плоской системы сил. Условия равновесия плоской системы параллельных сил. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей. (Равновесие системы тел.)

Система сил, расположенных в пространстве (пространственная система сил). Момент силы относительно оси. Зависимость между моментами силы относительно центра и относительно оси, проходящей через этот центр. (Аналитические формулы для вычисления моментов силы относительно трех координатных осей. Вычисление главного вектора и главного момента пространственной системы сил.) Аналитические условия равновесия произвольной пространственной системы сил. Условия равновесия пространственной системы параллельных сил.

Центр тяжести. Центр тяжести твердого тела и его координаты. Центр тяжести объема, площади и линии. Способы определения положения центров тяжести.

КИНЕМАТИКА

Введение в кинематику. Предмет кинематики. Пространство и время в классической механике. Относительность механического движения. Система отсчета. Задачи кинематики.

Кинематика точки. Векторный способ задания движения точки. Траектория точки. Скорость точки как производная от ее радиуса-вектора по времени. Ускорение точки как производная от вектора скорости по времени. Координатный способ задания движения точки в прямоугольных декартовых координатах. Определение траектории точки. Определение скорости и ускорения точки по их проекциям на координатные оси.

Естественный способ задания движения точки. Оси естественного трехгранника. Алгебраическая величина скорости точки. Определение ускорения точки по его проекциям на оси естественного трехгранника: касательное и нормальное ускорения точки.

КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Поступательное и вращательное движения твердого тела. Поступательное движение твердого тела. Теорема о траекториях, скоростях и ускорениях точек твердого тела при поступательном движении. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Уравнение (закон) вращательного движения твердого тела. Угловая скорость и угловое ускорение тела. Скорость и ускорение точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Вектор угловой скорости тела. (Выражение скорости точки вращающегося тела в виде векторного произведения.)

Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела. Плоское движение твердого тела и движение плоской фигуры в ее плоскости. Уравнения движения плоской фигуры. Разложение движения плоской фигуры на поступательное вместе с полюсом и вращательное вокруг полюса: независимость угловой скорости фигуры от выбора полюса. Определение скорости любой точки фигуры как геометрической суммы скорости полюса и скорости этой точки при вращении фигуры вокруг полюса. Теорема о проекциях скоростей двух точек фигуры (тела). Мгновенный центр скоростей. Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей.

Сложное (составное) движение точки. Абсолютное и относительное движения точки; переносное движение. Теорема о сложении скоростей. Теорема о сложении ускорений при переносном поступательном и переносном вращательном движениях; кориолисово ускорение и его вычисление.

ДИНАМИКА

Введение в динамику. Предмет динамики. Основные понятия и определения: масса, материальная точка, сила. Законы механики Галилея–Ньютона. Инерциальная система отсчета. Задачи динамики.

Динамика точки. Дифференциальные уравнения движения свободной и несвободной материальной точки в декартовых координатах. (Уравнения движения материальной точки в проекциях на оси естественного трехгранника.) Две основные задачи динамики для материальной точки. Решение первой задачи динамики.

Решение второй задачи динамики. Начальные условия. Постоянные интегрирования и их определение по начальным условиям. Примеры интегрирования дифференциальных уравнений движения точки в случаях силы, зависящей от времени, от положения точки и от ее скорости.

Относительное движение материальной точки. Дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки; переносная и кориолисова силы инерции. Принцип относительности классической механики. Случай относительного покоя.

Прямолинейные колебания точки. Свободные колебания материальной точки под действием восстанавливающей силы, пропорциональной расстоянию от центра колебаний. Амплитуда, начальная фаза, частота и период колебаний. Затухающие колебания материальной точки при сопротивлении, пропорциональном скорости; период этих колебаний, декремент колебаний. Вынужденные колебания точки при гармонической возмущающей силе и сопротивлении, пропорциональном скорости. Резонанс.

Введение в динамику механической системы. Механическая система. Классификация сил, действующих на систему: силы активные (задаваемые) и реакции связей; силы внешние и внутренние. Свойства внутренних сил. Масса системы. Центр масс; радиус-вектор и координаты центра масс.

Момент инерции. Момент инерции твердого тела относительно оси; радиус инерции. Теорема о моментах инерции тела относительно параллельных осей. Примеры вычисления моментов инерции: моменты инерции однородного тонкого стержня, тонкого круглого кольца или полого цилиндра, круглого диска или сплошного круглого цилиндра.

Общие теоремы динамики

Теорема о движении центра масс. Дифференциальные уравнения движения механической системы. Теорема о движении центра масс механической системы. Закон сохранения движения центра масс.

Теорема об изменении количества движения. Количество движения материальной точки. Элементарный импульс силы. Импульс силы за конечный промежуток времени. Теорема об изменении количества движения точки в дифференциальной и в конечной формах.

Количество движения механической системы; его выражение через массу системы и скорость ее центра масс. Теорема об изменении количества движения механической системы в дифференциальной и в конечной формах. Закон сохранения количества движения механической системы.

Теорема об изменении момента количества движения. Момент количества движения материальной точки относительно центра и относительно оси. Теорема об изменении момента количества движения точки. (Сохранение момента количества движения точки в случае центральной силы; закон площадей.)

Главный момент количеств движения или кинетический момент механической системы относительно центра и относительно оси. Кинетический момент вращающегося твердого тела относительно оси вращения. Теорема об изменении кинетического момента механической системы. Закон сохранения кинетического момента механической системы. (Дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.)

Теорема об изменении кинетической энергии. Кинетическая энергия материальной точки. Элементарная работа силы; аналитическое выражение элементарной работы. Работа силы на конечном перемещении точки ее приложения. Работа силы тяжести, силы упругости и силы тяготения. Мощность. Теорема об изменении кинетической энергии точки.

Кинетическая энергия механической системы. Кинетическая энергия твердого тела при поступательном движении, при вращении вокруг неподвижной оси и при плоскопараллельном движении тела. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы. Равенство нулю суммы работ внутренних сил в твердом теле. Работа и мощность сил, приложенных к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси.

Принцип Даламбера. Принцип возможных перемещений. Сила инерции материальной точки. Принцип Даламбера для материальной точки и механической системы. (Возможные или виртуальные перемещения точки и механической системы. Число степеней свободы системы. Идеальные связи. Принцип возможных перемещений. Общее уравнение динамики.)

Уравнения Лагранжа. Обобщенные координаты системы; обобщенные скорости. Выражение элементарной работы в обобщенных координатах. Обобщенные силы и их вычисление. Дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах или уравнения Лагранжа 2-го рода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Воронков И.М. Курс теоретической механики. М., 1954 и последующие издания.

Гернет М.М. Курс теоретической механики. М., 1970 и последующие издания.

Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. М., 1963 и последующие издания.

Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. М., 1970 и последующие издания.

Сборник задач по теоретической механике/Под ред. К.С. Колесникова. М., 1983.

Сборник задач для курсовых работ по теоретической механике/Под ред. А.А. Яблонского. М., 1972 и последующие издания. (Содержит примеры решения задач.)

Дополнительная литература устанавливается кафедрой в зависимости от включаемых в курс дополнительных вопросов.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЙ, ВЫБОР ВАРИАНТОВ, ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ, ОБЩИЕ ПОЯСНЕНИЯ К ТЕКСТУ ЗАДАЧ

Студенты выполняют два контрольных задания (две работы).

Задание 1 (статика и кинематика) – задачи С1, С2, К1, К2, К3.

Задание 2 (динамика) – задачи Д1, Д2, Д3, Д4, Д5. (Д6, см. с. 56).

К каждой задаче дается 10 рисунков и таблица (с тем же номером, что и задача), содержащая дополнительные к тексту задачи условия. Нумерация рисунков двойная, при этом номером рисунка является цифра, стоящая после точки. Например, рис. С1.4 – это рис. 4 к задаче С1 и т.д. (в тексте задачи при повторных ссылках на рисунок пишется просто рис. 4 и т.д.). Номера условий от 0 до 9 проставлены в 1-м столбце (или в 1-й строке) таблицы.

Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по предпоследней цифре шифра, а номер условия в таблице – по последней; например, если шифр оканчивается числом 46, то берет рис. 4 и условия № 6 из таблицы.

Каждое задание выполняется в отдельной тетради (ученической), страницы которой нумеруются. На обложке указываются: название дисциплины, номер работы, фамилия и инициалы студента, учебный шифр, факультет, специальность и адрес. На первой странице тетради записываются: номер работы, номера решаемых задач и год издания контрольных заданий.

Решение каждой задачи обязательно начинать на развороте тетради (на четной странице, начиная со второй, иначе работу трудно проверять). Сверху указывается номер задачи, далее делается чертеж (можно карандашом) и записывается, что в задаче дано и что требуется определить (текст задачи не переписывать). **Чертеж выполняется с учетом условий решаемого варианта задачи;** на нем все углы, действующие силы, число тел и их расположение на чертеже должны соответствовать этим условиям. В результате в целом ряде задач чертеж получится более простой, чем общий.

Чертеж должен быть аккуратным и наглядным, а его размеры должны позволять ясно показать все силы или векторы скорости и ускорения и др.; показывать все эти векторы и координатные оси на чертеже, а также указывать единицы получаемых величин **нужно обязательно.** Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т.п.) и подробно излагать весь ход расчетов. На каждой странице следует оставлять поля для замечаний рецензента.

Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, проверяться не будут и будут возвращаться для переделки.

К работе, высылаемой на повторную проверку (если она выполнена в другой тетради), должна обязательно прилагаться незачтенная работа. На экзамене необходимо представить зачтенные по данному разделу курса работы, в которых все отмеченные рецензентом погрешности-должны быть исправлены.

При чтении текста каждой задачи учесть следующее. Большинство рисунков дано без соблюдения масштаба. На рисунках к задачам С1 – С3 и Д1 – Д6 все линии, параллельные строкам, считаются горизонтальными, а перпендикулярные строкам – вертикальными и это в тексте задач специально не оговаривается. Также без оговорок считается, что все нити (веревки, тросы) являются нерастяжимыми и невесомыми, нити, перекинутые через блок, по блоку не скользят, катки и колеса (в кинематике и динамике) катятся по плоскостям без скольжения. Все связи, если не сделано других оговорок, считаются идеальными.

Когда тела на рисунке пронумерованы, то в тексте задачи и в таблице P_1, l_1, r_1 и т.п. означают вес или размеры тела *1*, P_2, l_2, r_2 – тела *2* и т.д. Аналогично в кинематике и динамике v_B, a_B обозначают скорость и ускорение точки *B*, v_C, a_C – точки *C*; ω_1, ϵ_1 – угловую скорость и угловое ускорение тела *1*, ω_2, ϵ_2 – тела *2* и т.д. В каждой задаче подобные обозначения могут тоже специально не оговариваться.

Следует также иметь в виду, что некоторые из заданных в условиях задачи величин (размеров) при решении каких-нибудь вариантов могут не понадобиться, они нужны для решения других вариантов задачи. Из всех пояснений в тексте задачи обращайте внимание только на относящиеся к вашему варианту, т.е. к номеру вашего рисунка или вашего условия в таблице.

Методические указания по решению задач, входящих в контрольные задания, даются для каждой задачи после изложения ее текста под рубрикой "Указания"; затем дается пример решения аналогичной задачи. Цель примера – разъяснить ход решения, но не воспроизвести его полностью. Поэтому в ряде случаев промежуточные расчеты опускаются. Но **при выполнении задания все преобразования и числовые расчеты должны быть обязательно последовательно проделаны с необходимыми пояснениями;** в конце должны быть даны ответы.

ЗАДАЧИ К КОНТРОЛЬНЫМ ЗАДАНИЯМ

СТАТИКА

Задача С1

Жесткая рама (рис. С1.0–С1.9, табл. С1) закреплена в точке A шарнирно, а в точке B прикреплена или к невесомому стержню BB_1, или к шарнирной опоре на катках; стержень прикреплен к раме и к неподвижной опоре шарнирами.

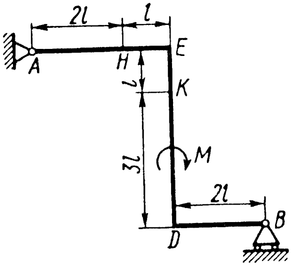


Рис. С1.0

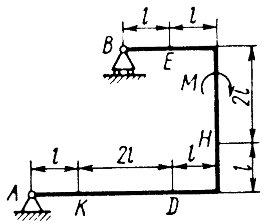


Рис. С1.1

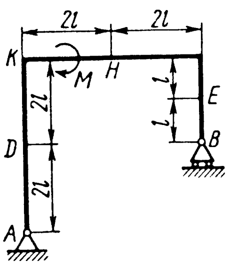


Рис. С1.2

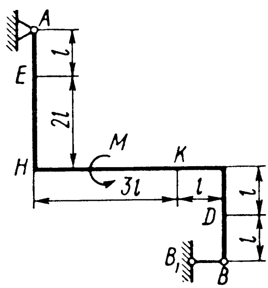


Рис. С1.3

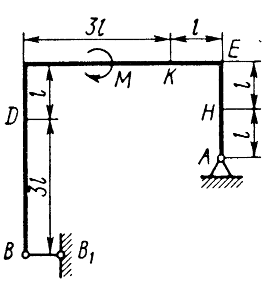


Рис. С1.4

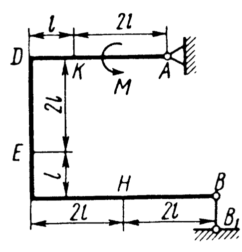


Рис. С1.5

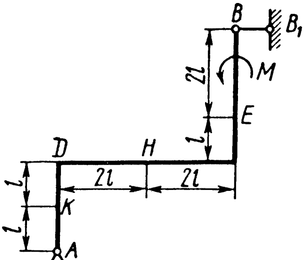


Рис. С1.6

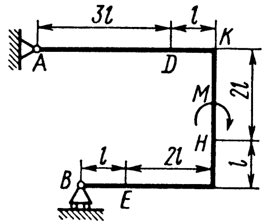


Рис. С1.7

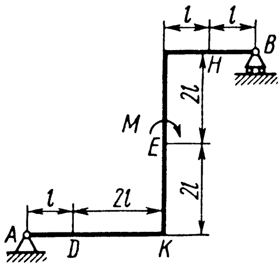


Рис. С1.8

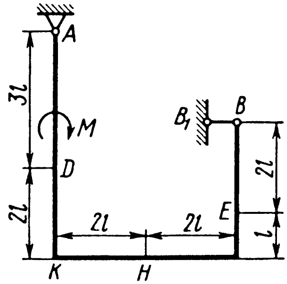
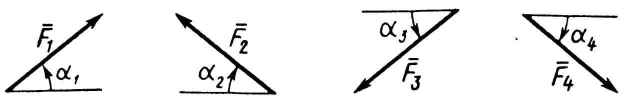


Рис. С1.9

Таблица С1

Сила								
	$F_1 = 10$ Н		$F_2 = 20$ Н		$F_3 = 30$ Н		$F_4 = 40$ Н	
Номер условия	Точка прилож.	α_1°	Точка прилож.	α_2°	Точка прилож.	α_3°	Точка прилож.	α_4°
0	–	–	*D*	60	*E*	45	–	–
1	*K*	30	–	–	–	–	*H*	60
2	–	–	*H*	45	*K*	30	–	–
3	*D*	60	–	–	–	–	*E*	30
4	–	–	*K*	30	*E*	60	–	–
5	*H*	60	–	–	*D*	30	–	–
6	–	–	*E*	30	–	–	*K*	45
7	*D*	45	–	–	*H*	60	–	–
8	–	–	*H*	60	–	–	*D*	30
9	*E*	30	–	–	–		*K*	60

На раму действуют пара сил с моментом $M = 100$ Н · м и две силы, значения которых, направления и точки приложения указаны в таблице (например, в условиях № 1 на раму действуют сила $F_1 = 10$ Н под углом 30° к горизонтальной оси, приложенная в точке K, и сила $F_4 = 40$ Н под углом 60° к горизонтальной оси, приложенная в точке H).

Определить реакции связей в точках A и B, вызываемые заданными нагрузками. При окончательных подсчетах принять $l = 0{,}5$ м.

Указания. Задача С1 – на равновесие тела под действием плоской системы сил. Составляя уравнения равновесия, учесть, что уравнение моментов будет более простым (содержать меньше неизвестных), если брать моменты относительно точки, где пересекаются линии действия двух реакций связей (в данном случае относительно точки A). При вычислении момента силы $\bar{F}$ часто удобно разложить ее на составляющие $\bar{F}'$ и $\bar{F}''$, для которых плечи легко вычисляются, в частности на составляющие, параллельные координатным осям, и воспользоваться теоремой Вариньона; тогда $m_O(\bar{F}) = m_O(\bar{F}') + m_O(\bar{F}'')$.

Пример С1. Жесткая пластина $ABCD$ (рис. С1) имеет в точке A неподвижную шарнирную опору, а в точке B – подвижную шарнирную опору на катках. Все действующие нагрузки и размеры показаны на рисунке.

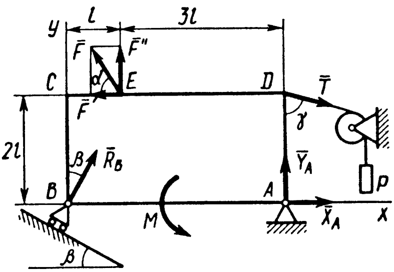


Рис. С1

Д а н о: $F = 25$ кН, $\alpha = 60°$, $P = 18$ кН, $\gamma = 75°$, $M = 50$ кН · м, $\beta = 30°$, $l = 0{,}5$ м.

О п р е д е л и т ь: реакции в точках A и B, вызываемые действующими нагрузками.

Решение. 1. Рассмотрим равновесие пластины. Проведем координатные оси xy и изобразим действующие на пластину силы: силу $\bar{F}$, пару сил с моментом M, натяжение троса $\bar{T}$ (по модулю $T = P$) и реакции связей $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{R}_B$ (реакцию неподвижной шарнирной опоры A изображаем двумя ее составляющими, реакция шарнирной опоры на катках направлена перпендикулярно опорной плоскости).

2. Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия. При вычислении момента силы $\bar{F}$ относительно точки A

воспользуемся теоремой Вариньона, т.е. разложим силу $\overline{F}$ на составляющие $\overline{F}'$, $\overline{F}''$ ($F' = F\cos\alpha$, $F'' = F\sin\alpha$) и учтем, что $m_A(\overline{F}) = m_A(\overline{F}') + m_A(\overline{F}'')$. Получим

$$\Sigma F_{kx} = 0, \quad X_A + R_B \sin\beta - F\cos\alpha + T\sin\gamma = 0, \tag{1}$$

$$\Sigma F_{ky} = 0, \quad Y_A + R_B \cos\beta + F\sin\alpha - T\cos\gamma = 0, \tag{2}$$

$$\Sigma m_A(\overline{F}_k) = 0, \quad M - R_B\cos\beta\cdot 4l + F\cos\alpha\cdot 2l - F\sin\alpha\cdot 3l - T\sin\gamma\cdot 2l = 0. \tag{3}$$

Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и решив эти уравнения, определим искомые реакции.

О т в е т: $X_A = -8{,}5$ кН, $Y_A = -23{,}3$ кН, $R_B = 7{,}3$ кН. Знаки указывают, что силы $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$ направлены противоположно показанным на рис. С1.

Задача С2

Однородная прямоугольная плита весом $P = 5$ кН со сторонами $AB = 3l$, $BC = 2l$ закреплена в точке A сферическим шарниром, а в точке B цилиндрическим шарниром (подшипником) и удерживается в равновесии невесомым стержнем CC' (рис. С2.0–С2.9).

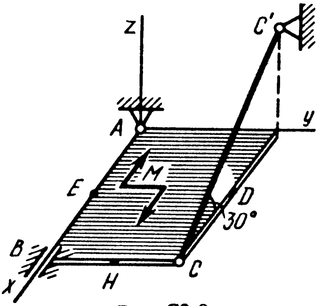


Рис. С2.0

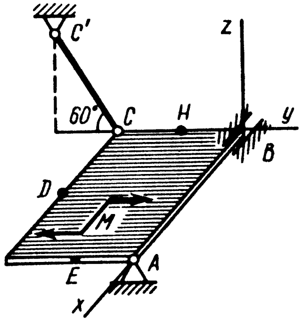


Рис. С2.1

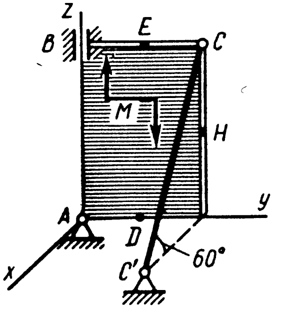


Рис. С2.2

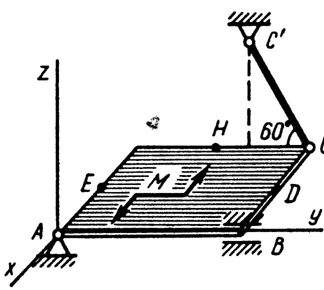


Рис. С2.3

На плиту действуют пара сил с моментом $M = 6$ кН · м, лежащая в плоскости плиты, и две силы. Значения этих сил, их направления и точки приложения указаны в табл. С2; при этом силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_4$ лежат в плоскостях, параллельных плоскости xy, сила $\overline{F}_2$ – в плоскости, параллельной xz, сила $\overline{F}_3$ – в плоскости, параллельной yz. Точки приложения сил (D, E, H) находятся в серединах сторон плиты.

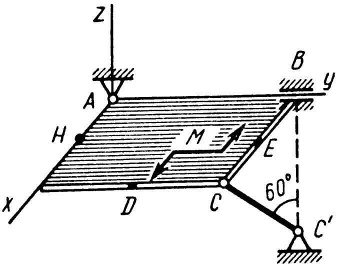


Рис. С2.4

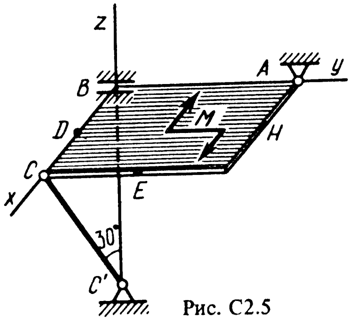


Рис. С2.5

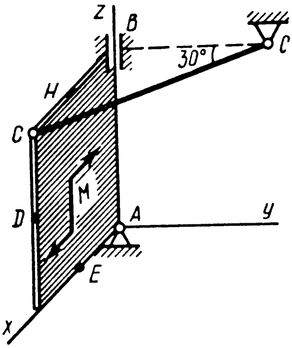


Рис. С2.6

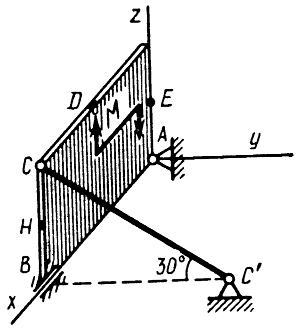


Рис. С2.7

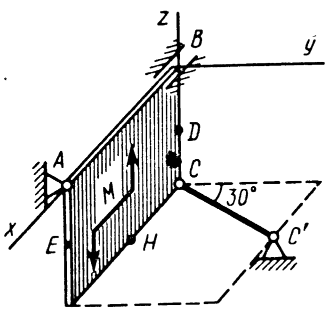


Рис. С2.8

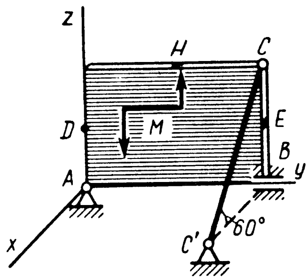
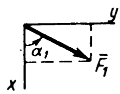
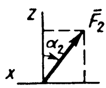
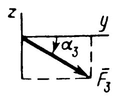
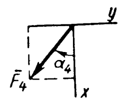


Рис. С2.9

Сила								
	$F_1 = 4$ кН		$F_2 = 6$ кН		$F_3 = 8$ кН		$F_4 = 10$ кН	
Номер условия	Точка прилож.	α_1°	Точка прилож.	α_2°	Точка прилож.	α_3°	Точка прилож.	α_4°
0	*D*	60	–	–	*E*	0	–	–
1	*H*	90	*D*	30	–	–	–	–
2	–	–	*E*	60	–	–	*D*	90
3	–	–	–	–	*E*	30	*H*	0
4	*E*	0	–	–	*H*	60	–	–
5	–	–	*D*	60	*H*	0	–	–
6	–	–	*H*	30	–	–	*D*	90
7	*E*	30	*H*	90	–	–	–	–
8	–	–	–	–	*D*	0	*E*	60
9	–	–	*E*	90	*D*	30	–	–

Определить реакции связей в точках *A*, *B* и *C*. При подсчетах принять $l = 0{,}8$ м.

Указания. Задача С2 – на равновесие тела под действием пространственной системы сил. При ее решении учесть, что реакция сферического шарнира (или подпятника) имеет три составляющие, а реакция цилиндрического шарнира (подшипника) – две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. При вычислении моментов силы $\bar{F}$ тоже часто удобно разложить ее на составляющие $\bar{F}'$ и $\bar{F}''$, параллельные координатным осям; тогда, по теореме Вариньона, $m_x(\bar{F}) = m_x(\bar{F}') + m_x(\bar{F}'')$ и т.д.

Пример С2. Вертикальная прямоугольная плита весом *P* (рис. С2) закреплена сферическим шарниром в точке *A*, цилиндрическим (подшипником) в точке *B* и невесомым стержнем *DD'*, лежащим в плоскости, параллельной плоскости *yz*. На плиту действуют сила $\bar{F}_1$ (в плоскости *xz*), сила $\bar{F}_2$ (параллельная оси *y*) и пара сил с моментом *M* (в плоскости плиты).

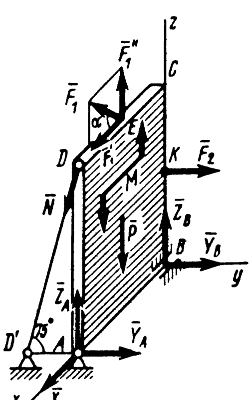


Рис. С2

Дано: $P = 5$ кН, $M = 3$ кН · м, $F_1 = 6$ кН, $F_2 = 7{,}5$ кН, $\alpha = 30°$, $AB = 1$ м, $BC = 2$ м, $CE = 0{,}5\,AB$, $BK = 0{,}5\,BC$.

Определить: реакции опор A, B и стержня DD'.

Решение. 1. Рассмотрим равновесие плиты. На нее действуют заданные силы $\bar{P}$, $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ и пара сил с моментом M, а также реакции связей. Реакцию сферического шарнира разложим на три составляющие $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{Z}_A$, цилиндрического (подшипника) – на две составляющие $\bar{Y}_B$, $\bar{Z}_B$ (в плоскости, перпендикулярной оси подшипника), реакцию $\bar{N}$ стержня направим вдоль стержня, предполагая, что он растянут.

2. Для определения шести неизвестных реакций составляем шесть уравнений равновесия действующей на плиту пространственной системы сил:

$$\Sigma F_{kx} = 0,\ X_A + F_1 \cos\alpha = 0, \tag{1}$$

$$\Sigma F_{ky} = 0,\ Y_A + Y_B + F_2 - N\cos 75° = 0, \tag{2}$$

$$\Sigma F_{kz} = 0,\ Z_A + Z_B - P - N\sin 75° + F_1 \sin\alpha = 0, \tag{3}$$

$$\Sigma m_x(\bar{F}_k) = 0,\ -F_2 BK + N\cos 75° \cdot BC = 0, \tag{4}$$

$$\Sigma m_y(\bar{F}_k) = 0,\ P\frac{AB}{2} + F_1 \cos\alpha \cdot BC - F_1 \sin\alpha \frac{AB}{2} -$$

$$- Z_A \cdot AB + N\sin 75° \cdot AB + M = 0, \tag{5}$$

$$\Sigma m_z(\bar{F}_k) = 0,\ Y_A \cdot AB - N\cos 75° \cdot AB = 0. \tag{6}$$

Для определения момента силы $\bar{F}_1$ относительно оси y разлагаем $\bar{F}_1$ на составляющие $\bar{F}_1'$ и $\bar{F}_1''$, параллельные осям x и z ($F_1' = F_1\cos\alpha$, $F_1'' = F_1 \sin\alpha$), и применяем теорему Вариньона (см. указания). Аналогично можно поступить при определении моментов реакции $\bar{N}$.

Подставив в составленные уравнения числовые значения всех заданных величин и решив затем эти уравнения, найдем, чему равны искомые реакции.

Ответ: $X_A = -5{,}2$ кН, $Y_A = 3{,}8$ кН, $Z_A = 28{,}4$ кН, $Y_B = -7{,}5$ кН, $Z_B = -12{,}4$ кН, $N = 14{,}5$ кН. Знаки указывают, что силы $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_B$ и $\bar{Z}_B$ направлены противоположно показанным на рис. С2.

КИНЕМАТИКА

Задача К1

Точка B движется в плоскости xy (рис. К1.0–К1.9, табл. К1; траектория точки на рисунках показана условно). Закон движения точки задан уравнениями: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, где x и y выражены в сантиметрах, t – в секундах.

Найти уравнение траектории точки; для момента времени $t_1 = 1$ с определить скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

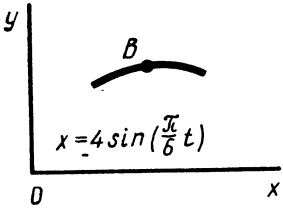


Рис. К1.0

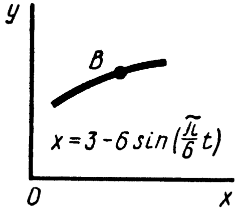


Рис. К1.1

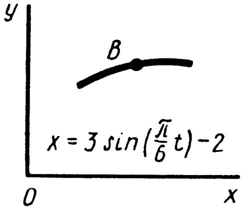


Рис. К1.2

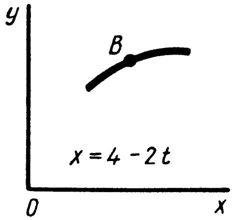


Рис. К1.3

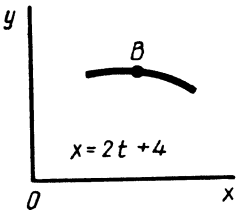


Рис. К1.4

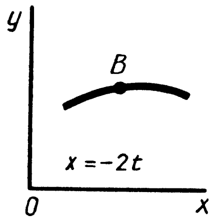


Рис. К1.5

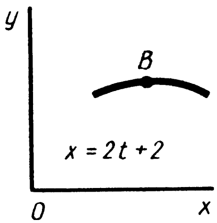


Рис. К1.6

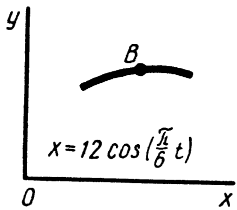


Рис. К1.7

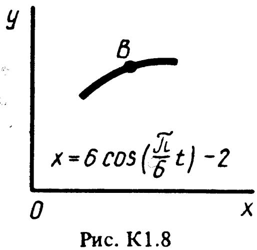


Рис. К1.8

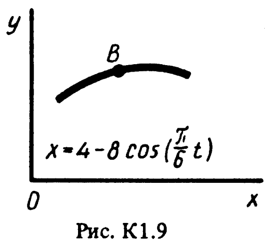


Рис. К1.9

Зависимость $x = f_1(t)$ указана непосредственно на рисунках, а зависимость $y = f_2(t)$ дана в табл. К1 (для рис. 0–2 в столбце 2, для рис. 3–6 в столбце 3, для рис. 7–9 в столбце 4). Как и в задачах С1, С2, номер рисунка выбирается по предпоследней цифре шифра, а номер условия в табл. К1 – по последней.

Таблица К1

Номер условия	$y = f_2(t)$		
	Рис. 0–2	Рис. 3–6	Рис. 7–9
1	2	3	4
0	$4 - 9\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$t^2 - 2$	$-4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
1	$2 - 3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$8\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$10\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
2	$4 - 6\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4 + 2t^2$	$12\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
3	$12\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2(t+1)^2$	$2 - 4\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
4	$9\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + 5$	$2 + 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$12\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + 13$
5	$-10\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$3t^2 - 2$	$3\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
6	$8\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 3$	$(t+1)^3$	$16\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 14$
7	$-9\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$3 - 4\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
8	$6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) - 4$	$2t^3$	$4 - 9\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
9	$2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$8\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + 6$

Указания. Задача К1 относится к кинематике точки и решается с помощью формул, по которым определяются скорость и ускорение точки в декартовых координатах (координатный способ задания движения точки), а также формул, по которым определяются касательное и нормальное ускорения точки.

В данной задаче все искомые величины нужно определить только для момента времени $t_1 = 1$ с. В некоторых вариантах задачи при определении траектории или при последующих расчетах (для их упрощения) следует учесть известные из тригонометрии формулы: $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$; $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

Пример К1. Даны уравнения движения точки в плоскости xy:

$$x = -2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 3, \quad y = 2\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) - 1$$

(x, y – в сантиметрах, t – в секундах).

Определить уравнение траектории точки; для момента времени $t_1 = 1$ с найти скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Решение. 1. Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения время t. Поскольку t входит в аргументы тригонометрических функций, где один аргумент вдвое больше другого, используем формулу

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \quad \text{или} \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}t\right). \tag{1}$$

Из уравнений движения находим выражения соответствующих функций и подставляем в равенство (1). Получим

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = \frac{3-x}{2}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) = \frac{y+1}{2};$$

следовательно,

$$\frac{3-x}{2} = 1 - 2\frac{(y+1)^2}{4}.$$

Отсюда окончательно находим следующее уравнение траектории точки (парабола, рис. К1):

$$x = (y+1)^2 + 1. \tag{2}$$

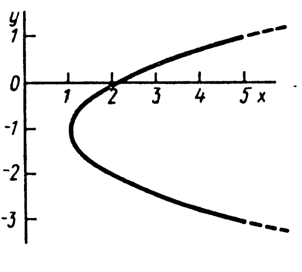


Рис. К1

2. Скорость точки найдем по ее проекциям на координатные оси:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right);$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{8}t\right);$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

и при $t = 1$ с

$$v_{1x} = 1{,}11 \text{ см/с}, \quad v_{1y} = 0{,}73 \text{ см/с}, \quad v_1 = 1{,}33 \text{ см/с}. \tag{3}$$

3. Аналогично найдем ускорение точки:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\pi^2}{8} \cos\left(\frac{\pi}{4} t\right); \; a_y = \frac{dv_y}{dt} = -\frac{\pi^2}{32} \sin\left(\frac{\pi}{8} t\right);$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

и при $t = 1$ с

$$a_{1x} = 0{,}87 \text{ см/с}^2, \; a_{1y} = -0{,}12 \text{ см/с}^2, \; a_1 = 0{,}88 \text{ см/с}^2. \qquad (4)$$

4. Касательное ускорение найдем, дифференцируя по времени равенство $v^1 = v_x^2 + v_y^2$. Получим

$$2v \frac{dv}{dt} = 2v_x \frac{dv_x}{dt} + 2v_y \frac{dv_y}{dt} \quad \text{и}$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}. \qquad (5)$$

Числовые значения всех величин, входящих в правую часть выражения (5), определены и даются равенствами (3) и (4). Подставив в (5) эти числа, найдем сразу, что при $t_1 = 1$ с $a_{1\tau} = 0{,}66$ см/с^2.

5. Нормальное ускорение точки $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$. Подставляя сюда найденные числовые значения a_1 и $a_{1\tau}$, получим, что при $t_1 = 1$ с $a_{1n} = 0{,}58$ см/с^2.

6. Радиус кривизны траектории $\rho = v^2/a_n$. Подставляя сюда числовые значения v_1 и a_{1n}, найдем, что при $t_1 = 1$ с $\rho_1 = 3{,}05$ см.

О т в е т: $v_1 = 1{,}33$ см/с, $a_1 = 0{,}88$ см/с^2, $a_{1\tau} = 0{,}66$ см/с^2, $a_{1n} = 0{,}58$ см/с^2, $\rho_1 = 3{,}05$ см.

Задача К2

Плоский механизм состоит из стержней *1–4* и ползуна B, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами (рис. К2.0–К2.9). Длины стержней: $l_1 = 0{,}4$ м, $l_2 = 1{,}2$ м, $l_3 = 1{,}4$ м, $l_4 = 0{,}8$ м. Положение механизма определяется углами α, β, γ, φ, θ, которые вместе с другими величинами заданы в табл. К2. Точка D на всех ри-

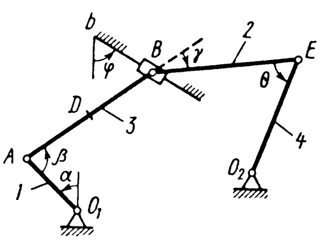


Рис. К2.0

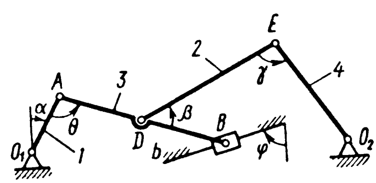


Рис. К2.1

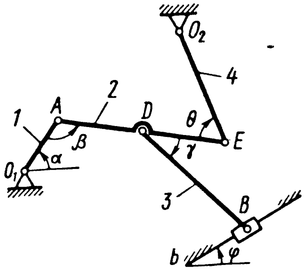


Рис. К2.2

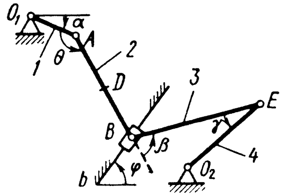


Рис. К2.3

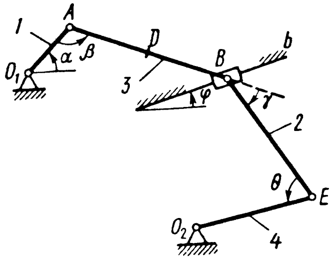


Рис. К2.4

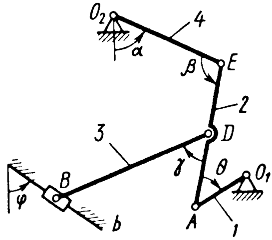


Рис. К2.5

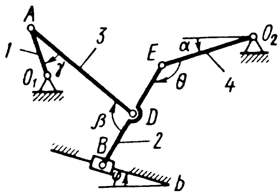


Рис. К2.6

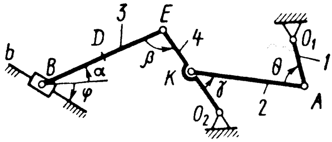


Рис. К2.7

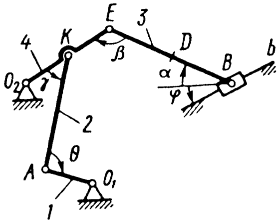


Рис. К2.8

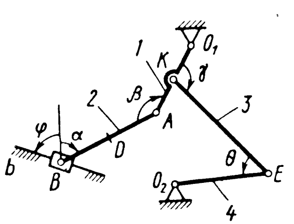


Рис. К2.9

Таблица К2

Номер условия	Углы					Дано			Найти
	α°	β°	γ°	φ°	θ°	ω_1, 1/с	ω_4, 1/с	v_B, м/с	
0	30	150	120	0	60	2	–	–	v_B, v_E, ω_2
1	60	60	60	90	120	–	3	–	v_A, v_D, ω_3
2	0	120	120	0	60	–	–	10	v_A, v_E, ω_2
3	90	120	90	90	60	3	–	–	v_B, v_E, ω_2
4	0	150	30	0	60	–	4	–	v_B, v_A, ω_2
5	60	150	120	90	30	–	–	8	v_A, v_E, ω_3
6	30	120	30	0	60	5	–	–	v_B, v_E, ω_3
7	90	150	120	90	30	–	5	–	v_A, v_D, ω_3
8	0	60	30	0	120	–	–	6	v_A, v_E, ω_2
9	30	120	120	0	60	4	–	–	v_B, v_E, ω_3

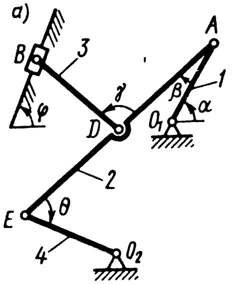
сунках и точка K на рис. К2.7–К2.9 в середине соответствующего стержня. Определить величины, указанные в таблице в столбце "Найти". Найти также ускорение a_A точки A стержня *1*, если стержень *1* имеет в данный момент времени угловое ускорение $\epsilon_1 = 10\ \text{с}^{-2}$.

Дуговые стрелки на рисунках показывают, как при построении чертежа должны откладываться соответствующие углы, т.е. по ходу или против хода часовой стрелки (например, угол γ на рис. 1 следует отложить от стержня DE против хода часовой стрелки, а на рис. 2 – от стержня AE по ходу часовой стрелки).

Построение чертежа начинать со стержня, направление которого определяется углом α; ползун B и его направляющие для большей наглядности изобразить, как в примере К2 (см. рис. К2). Заданную угловую скорость считать направленной против хода часовой стрелки, а заданную скорость v_B – от точки B к b.

Указания. Задача К2 – на исследование плоскопараллельного движения твердого тела. При ее решении для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев следует воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек тела и понятием о мгновенном центре скоростей, применяя эту теорему (или это понятие) к каждому звену механизма в отдельности.

Пример К2. Механизм (рис. К2, *а*) состоит из стержней *1, 2, 3, 4* и ползуна B, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами.



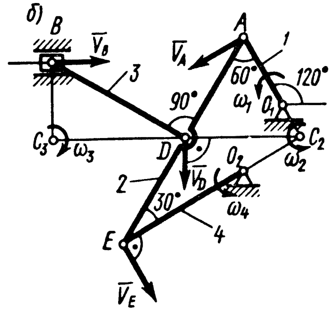


Рис. К2

Д а н о: $\alpha = 120°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 90°$, $\varphi = 0°$, $\theta = 30°$, $AD = DE$, $l_1 = 0{,}6$ м, $l_3 = 1{,}2$ м, $\omega_1 = 5\text{с}^{-1}$, $\epsilon_1 = 8\ \text{с}^{-2}$.

О п р е д е л и т ь: v_B, v_E, ω_3 и a_A.

Решение. 1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами (рис. К2, *б*).

2. Определяем v_E. Точка E принадлежит стержню AE. Чтобы найти v_E, надо знать скорость какой-нибудь другой точки этого стержня и направление v_E. По данным задачи можем определить

$$v_A = \omega_1 l_1 = 5 \cdot 0{,}6 = 3\ \text{м/с};\ \overline{v}_A \perp O_1A. \quad (1)$$

Направление $\overline{v}_E$ найдем, учтя, что точка E принадлежит одновременно стержню O_2E, вращающемуся вокруг O_2; следовательно, $\overline{v}_E \perp O_2E$. Теперь, зная $\overline{v}_A$ и направление $\overline{v}_E$, воспользуемся теоремой о проекциях скоростей двух точек тела (стержня AE) на прямую, соединяющую эти точки (прямая AE). Сначала по этой теореме устанавливаем, в какую сторону направлен вектор $\overline{v}_E$ (проекции скоростей должны иметь одинаковые знаки). Затем, вычисляя эти проекции, находим

$$v_E \cos 60° = v_A \cos 30°;\ v_E = 3\sqrt{3} = 5{,}2\ \text{м/с}. \quad (2)$$

3. Определяем v_B. Точка B принадлежит стержню BD. Следовательно, по аналогии с предыдущим, чтобы определить v_B, надо сначала найти скорость точки D, принадлежащей одновременно стержню AE. Для этого, зная $\overline{v}_A$ и $\overline{v}_E$, построим мгновенный центр скоростей (МЦС) стержня AE; это точка C_2, лежащая на пересечении перпендикуляров к $\overline{v}_A$ и $\overline{v}_E$, восставленных из точек A и E (к $\overline{v}_A$ и $\overline{v}_E$ перпендикулярны стержни *1* и *4*). По направлению вектора $\overline{v}_A$ определяем направление поворота стержня AE вокруг МЦС C_2. Вектор $\overline{v}_D$ будет перпендикулярен отрезку C_2D, соединяющему точки D и C_2, и направлен в сторону поворота. Величину v_D найдем из пропорции

$$\frac{v_D}{C_2D} = \frac{v_A}{C_2A}. \quad (3)$$

Чтобы вычислить C_2D и C_2A, заметим, что ΔAC_2E – прямоугольный, так как острые углы в нем равны 30 и 60°, и что $C_2A = AE \sin 30° = 0{,}5\ AE = AD$. Тогда ΔAC_2D является равносторонним и $C_2A = C_2D$. В результате равенство (3) дает

$$v_D = v_A = 3 \text{ м/с}; \quad \bar{v}_D \perp C_2D. \tag{4}$$

Так как точка B принадлежит одновременно ползуну, движущемуся вдоль направляющих поступательно, то направление $\bar{v}_B$ известно. Тогда, восставляя из точек B и D перпендикуляры к скоростям $\bar{v}_B$ и $\bar{v}_D$, построим МЦС C_3 стержня BD. По направлению вектора $\bar{v}_D$ определяем направление поворота стержня BD вокруг центра C_3. Вектор $\bar{v}_B$ будет направлен в сторону поворота стержня BD. Из рис. К2, *б* видно, что $\angle C_3DB = 30°$, а $\angle DC_3B = 90°$, откуда $C_3B = l_3 \sin 30°$, $C_3D = l_3 \cos 30°$. Составив теперь пропорцию, найдем, что

$$\frac{v_B}{C_3B} = \frac{v_D}{C_3D}; \quad v_B = v_D \operatorname{tg} 30° = 1{,}7 \text{ м/с}. \tag{5}$$

4. Определяем ω_3. Так как МЦС стержня *3* известен (точка C_3), то

$$\omega_3 = \frac{v_D}{C_3D} = \frac{v_D}{l_3 \cos 30°} = 2{,}9 \text{ с}^{-1}.$$

5. Определяем a_A. Так как ϵ_1 известно, то $a_{A\tau} = l_1 \epsilon_1$. Далее $a_{An} = v_A^2/l_1$, или $a_{An} = l_1 \omega_1^2$. Тогда $a_A = \sqrt{a_{A\tau}^2 + a_{An}^2}$. Произведя вычисления, получим $a_A = 15{,}8$ м/с².

Ответ: $v_E = 5{,}2$ м/с, $v_B = 1{,}7$ м/с, $\omega_3 = 2{,}9$ с⁻¹, $a_A = 15{,}8$ м/с².

Задача К3

Прямоугольная пластина (рис. К3.0–К3.5) или круглая пластина радиусом $R = 60$ см (рис. К3.6–К3.9) вращается вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью ω, заданной в табл. К3 (при знаке минус направление ω противоположно показанному на рисунке). Ось

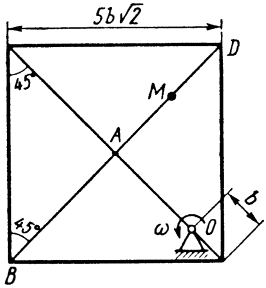


Рис. К3.0

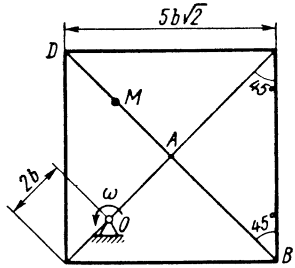


Рис. К3.1

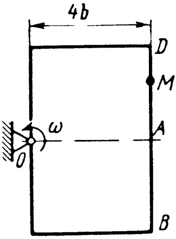


Рис. К3.2

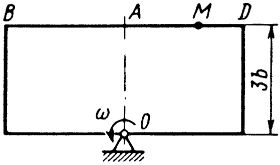


Рис. К3.3

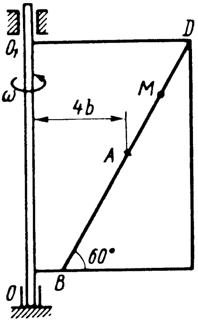


Рис. К3.4

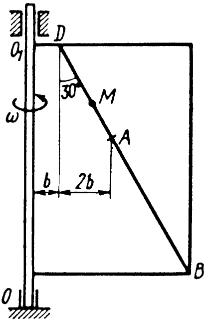


Рис. К3.5

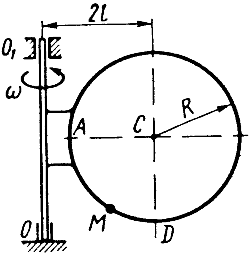


Рис. К3.6

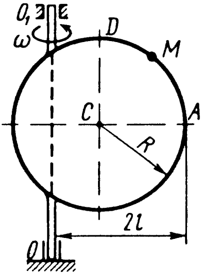


Рис. К3.7

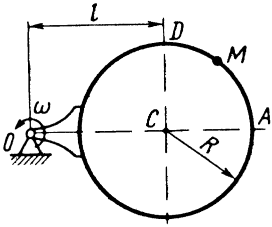


Рис. К3.8

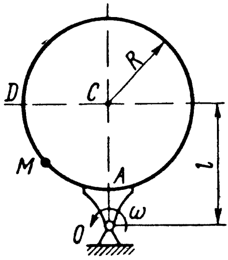


Рис. К3.9

вращения на рис. К3.0–К3.3 и К3.8, К3.9 перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку O (пластина вращается в своей плоскости); на рис. К3.4–К3.7 ось вращения OO_1 лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве).

Таблица К3

Номер условия	ω, 1/с	Рис. 0–5		Рис. 6–9	
		b, см	$s = AM = f(t)$	l	$s = \breve{AM} = f(t)$
0	−2	16	$60(t^4 - 3t^2) + 56$	R	$\frac{\pi}{3} R(t^4 - 3t^2)$
1	4	20	$60(t^3 - 2t^2)$	R	$\frac{\pi}{3} R(t^3 - 2t)$
2	3	8	$80(2t^2 - t^3) - 48$	R	$\frac{\pi}{6} R(3t - t^2)$
3	−4	12	$40(t^2 - 3t) + 32$	$\frac{3}{4} R$	$\frac{\pi}{2} R(t^3 - 2t^2)$
4	−3	10	$50(t^3 - t) - 30$	R	$\frac{\pi}{3} R(3t^2 - t)$
5	2	12	$50(3t - t^2) - 64$	R	$\frac{\pi}{3} R(4t^2 - 2t^3)$
6	4	20	$40(t - 2t^3) - 40$	$\frac{4}{3} R$	$\frac{\pi}{2} R(t - 2t^2)$
7	−5	10	$80(t^2 - t) + 40$	R	$\frac{\pi}{3} R(2t^2 - 1)$
8	2	8	$60(t - t^3) + 24$	R	$\frac{\pi}{6} R(t - 5t^2)$
9	−5	16	$40(3t^2 - t^4) - 32$	$\frac{4}{3} R$	$\frac{\pi}{2} R(2t^2 - t^3)$

По пластине вдоль прямой BD (рис. К3.0–К3.5) или по окружности радиуса R, т.е. по ободу пластины (рис. К3.6–К3.9), движется точка M. Закон ее относительного движения, выражаемый уравнением $s = AM = f(t)$ (s – в сантиметрах, t – в секундах), задан в табл. К3 отдельно для рис. К3.0–К3.5 и для рис. К3.6–К3.9, при этом на рис. 6–9 $s = \breve{AM}$ и отсчитывается по дуге окружности; там же даны размеры b и l. На всех рисунках точка M показана в положении, при котором $s = AM > 0$ (при $s < 0$ точка M находится по другую сторону от точки A).

Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1 = 1$ с.

Указания. Задача К3 – на сложное движение точки. При ее решении движение точки по пластине считать относительным, а вращательное движение самой пластины – переносным и воспользоваться теоремами о сложении скоростей и о сложении ускорений. Прежде чем производить расчеты, следует изобразить точку M на пластине в том положении, в котором нужно определить ее абсолютную скорость (или ускорение), а не в произвольном положении, показанном на рисунках к задаче.

В случаях, относящихся к рис. К3.6–К3.9, при решении задачи не подставлять числового значения R, пока не будут определены положение точки M в момент времени $t_1 = 1$ с и угол между радиусами CM и CA в этот момент.

Пример К3. Шар радиуса R (рис. К3, *а*) вращается вокруг своего диаметра AB по закону $\varphi = f_1(t)$ (положительное направление отсчета угла φ показано на рис. К3, *а* дуговой стрелкой). По дуге большого круга ("меридиану") $\overset{\smile}{ADB}$ движется точка M по закону $s = AM = f_2(t)$; положительное направление отсчета расстояния s от A к D.

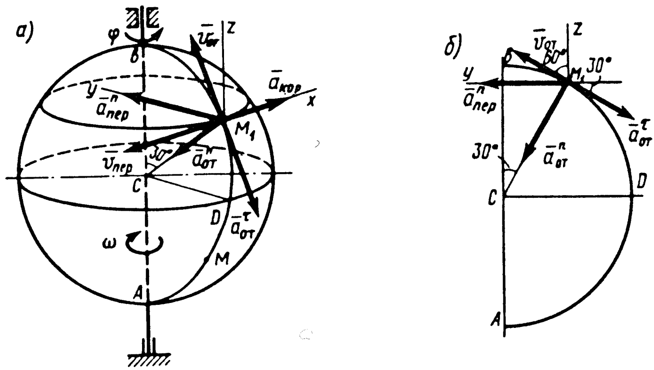


Рис. К3

Д а н о: $R = 0{,}5$ м, $\varphi = -2t$, $s = (\pi R/6)(7t - 2t^2)$ (φ – в радианах, s – в метрах, t – в секундах).

О п р е д е л и т ь: $v_{абс}$ и $a_{абс}$ в момент времени $t_1 = 1$ с.

Решение. Рассмотрим движение точки M как сложное, считая ее движение по дуге $\overset{\smile}{ADB}$ относительным ($\overset{\smile}{AB}$ – относительная траектория точки), а вращение шара – переносным движением. Тогда абсолютная скорость $\bar{v}_{абс}$ и абсолютное ускорение $\bar{a}_{абс}$ точки найдутся по формулам

$$\bar{v}_{абс} = \bar{v}_{отн} + \bar{v}_{пер}, \quad \bar{a}_{абс} = \bar{a}_{отн} + \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{кор}, \qquad (1)$$

где, в свою очередь,

$$\overline{a}_{\text{отн}} = \overline{a}^{\tau}_{\text{отн}} + \overline{a}^{n}_{\text{отн}}, \quad \overline{a}_{\text{пер}} = \overline{a}^{\tau}_{\text{пер}} + \overline{a}^{n}_{\text{пер}}.$$

Определим все характеристики относительного и переносного движений.

1. Относительное движение. Это движение происходит по закону

$$s = \breve{AM} = \frac{\pi R}{6}\,(7t - 2t^2). \tag{2}$$

Сначала установим, где будет находиться точка M на дуге ADB в момент времени t_1. Полагая в уравнении (2) $t = 1$ с, получим $s_1 = \frac{5}{6}\pi R$. Тогда $\angle ACM_1 = \frac{s_1}{R} = \frac{5}{6}\pi = 150°$ или $\angle BCM_1 = 30°$. Изображаем на рис. К3,*а* точку в положении, определяемом этим углом (точка M_1).

Теперь находим числовые значения $v_{\text{отн}}$, $a^{\tau}_{\text{отн}}$ и $a^{n}_{\text{отн}}$:

$$v_{\text{отн}} = \frac{ds}{dt} = \frac{\pi R}{6}\,(7 - 4t), \quad a^{\tau}_{\text{отн}} = \frac{dv_{\text{отн}}}{dt} = -\frac{2}{3}\pi R,$$

$$a^{n}_{\text{отн}} = \frac{v^2_{\text{отн}}}{\rho_{\text{отн}}} = \frac{v^2_{\text{отн}}}{R},$$

где $\rho_{\text{отн}}$ – радиус кривизны относительной траектории, т.е. дуги ADB. Для момента времени $t_1 = 1$ с, учитывая, что $R = 0{,}5$ м, получим

$$v_{\text{отн}} = \frac{\pi R}{6}\,3 = \frac{\pi}{4}\ \text{м/с}, \quad a^{\tau}_{\text{отн}} = -\frac{\pi}{3}\ \text{м/с}^2, \quad a^{n}_{\text{отн}} = \frac{\pi^2}{8}\ \text{м/с}^2. \tag{3}$$

Знаки показывают, что вектор $\overline{v}_{\text{отн}}$ направлен в сторону положительного отсчета расстояния s, а вектор $\overline{a}^{\tau}_{\text{отн}}$ – в противоположную сторону; вектор $\overline{a}^{n}_{\text{отн}}$ направлен к центру C дуги ADB. Изображаем все эти векторы на рис. К3, *а*. Для наглядности приведен рис. К3, *б*, где дуга ADB совмещена с плоскостью чертежа.

2. Переносное движение. Это движение (вращение) происходит по закону $\varphi = -2t$. Найдем угловую скорость ω и угловое ускорение ϵ переносного вращения: $\omega = \dot{\varphi} = -2$, $\epsilon = \dot{\omega} = 0$ (шар вращается равномерно). Таким образом,

$$\omega = -2\ \text{с}^{-1}, \quad \epsilon = 0. \tag{4}$$

Знак указывает, что направление ω противоположно положительному направлению отсчета угла φ; отметим это на рис. К3, *а* соответствующей дуговой стрелкой.

Для определения $\overline{v}_{\text{пер}}$ и $\overline{a}_{\text{пер}}$ найдем сначала расстояние h точки M_1 от оси вращения: $h = R\sin 30° = 0{,}25$ м. Тогда в момент времени $t_1 = 1$ с, учитывая равенства (4), получим

$$v_{\text{пер}} = |\omega| h = 0{,}5 \text{ м/с},$$

$$a^{\tau}_{\text{пер}} = \epsilon h = 0, \;\; a^{n}_{\text{пер}} = \omega^2 h = 1 \text{ м/с}^2. \qquad (5)$$

Изображаем на рис. К3, *а* вектор $\overline{v}_{\text{пер}}$ с учетом направления ω и вектор $\overline{a}^{n}_{\text{пер}}$ (направлен к оси вращения).

3. Кориолисово ускорение. Так как угол между вектором $\overline{v}_{\text{отн}}$ и осью вращения (вектором $\overline{\omega}$) равен 60°, то численно в момент времени t_1 = 1 с [см. равенства (3) и (4)]

$$a_{\text{кор}} = 2\,|v_{\text{отн}}| \cdot |\omega| \cdot \sin 60^\circ = 2\,\frac{\pi}{4} \cdot 2\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 2{,}72 \text{ м/с}^2. \qquad (6)$$

Направление $\overline{a}_{\text{кор}}$ найдем, спроектировав вектор $\overline{v}_{\text{отн}}$ на плоскость, перпендикулярную оси вращения (проекция направлена так же, как вектор $\overline{a}^{n}_{\text{пер}}$), и повернув затем эту проекцию в сторону ω, т.е. по ходу часовой стрелки, на 90°. Иначе направление $a_{\text{кор}}$ можно найти, учтя, что $\overline{a}_{\text{кор}} = 2(\overline{\omega} \times \overline{v}_{\text{отн}})$. Изображаем вектор $\overline{a}_{\text{кор}}$ на рис. К3, *а*.

Теперь можно вычислить значения $v_{\text{абс}}$ и $a_{\text{абс}}$.

4. Определение $v_{\text{абс}}$. Так как $\overline{v}_{\text{абс}} = \overline{v}_{\text{отн}} + \overline{v}_{\text{пер}}$, а векторы $\overline{v}_{\text{отн}}$ и $\overline{v}_{\text{пер}}$ взаимно перпендикулярны (см. рис. К3, *а*), то в момент времени t_1 = 1 с

$$v_{\text{абс}} = \sqrt{v^2_{\text{отн}} + v^2_{\text{пер}}} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + (0{,}5)^2} = 0{,}93 \text{ м/с}.$$

5. Определение $a_{\text{абс}}$. По теореме о сложении ускорений, так как $a^{\tau}_{\text{пер}} = 0$,

$$\overline{a}_{\text{абс}} = \overline{a}^{\tau}_{\text{отн}} + \overline{a}^{n}_{\text{отн}} + \overline{a}^{n}_{\text{пер}} + \overline{a}_{\text{кор}}. \qquad (7)$$

Для определения $a_{\text{абс}}$ проведем координатные оси M_1xyz (рис. К3, *а*) и вычислим проекции вектора $\overline{a}_{\text{абс}}$ на эти оси. Учтем при этом, что вектор $\overline{a}_{\text{кор}}$ лежит на проведенной оси x, а векторы $\overline{a}^{\tau}_{\text{отн}}$, $\overline{a}^{n}_{\text{отн}}$ и $\overline{a}^{n}_{\text{пер}}$ расположены в плоскости дуги *ADB*, т.е. в плоскости M_1yz (рис. К3, б). Тогда, проектируя обе части равенства (7) на координатные оси и учтя одновременно равенства (3), (5), (6), получим для момента времени t_1 = 1 с:

$$a_{\text{абс}\,x} = a_{\text{кор}} = 2{,}72 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{\text{абс}\,y} = a^{n}_{\text{пер}} + a^{n}_{\text{отн}} \cos 60^\circ - |a^{\tau}_{\text{отн}}| \cos 30^\circ = 1 + \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi\sqrt{3}}{6} =$$

$$= 0{,}71 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{\text{абс}\,z} = -|a^{\tau}_{\text{отн}}| \cos 60^\circ - a^{n}_{\text{отн}} \cos 30^\circ =$$

$$= -\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi^2\sqrt{3}}{16}\right) = -1{,}59 \text{ м/с}^2.$$

Отсюда находим значение $a_{абс}$ в момент времени $t_1 = 1$ с:

$$a_{абс} = \sqrt{a_{абс\,x}^2 + a_{абс\,y}^2 + a_{абс\,z}^2} = 3{,}23 \text{ м/с}^2.$$

О т в е т: $v_{абс} = 0{,}93$ м/с, $a_{абс} = 3{,}23$ м/с^2.

ДИНАМИКА

Задача Д1

Груз D массой m, получив в точке A начальную скорость v_0, движется в изогнутой трубе ABC, расположенной в вертикальной плоскости; участки трубы или оба наклонные, или один горизонтальный, а другой наклонный (рис. Д1.0–Д1.9, табл. Д1). На участке AB на груз кроме силы тяжести действуют постоянная сила $\bar{Q}$ (ее направление показано на рисунках) и сила сопротивления среды $\bar{R}$, зависящая от скорости $\bar{v}$ груза (направлена против движения).

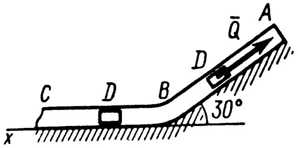


Рис. Д1.0

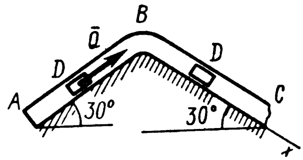


Рис. Д1.1

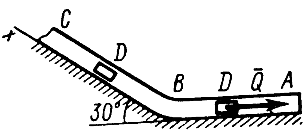


Рис. Д1.2

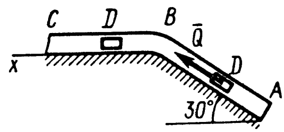


Рис. Д1.3

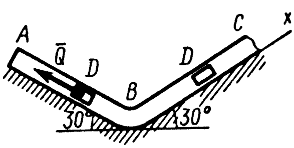


Рис. Д1.4

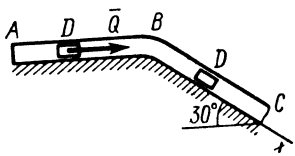


Рис. Д1.5

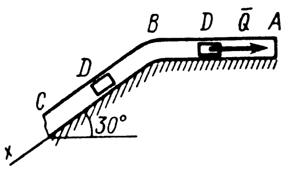


Рис. Д1.6

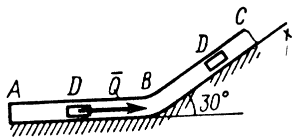


Рис. Д1.7

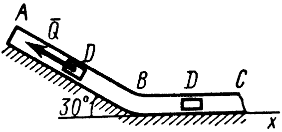


Рис. Д1.8

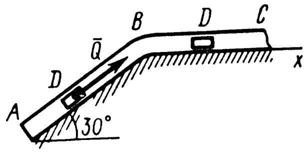


Рис. Д1.9

Таблица Д1

Номер условия	m, кг	v_0, м/с	Q, Н	R, Н	l, м	t_1, с	F_x, Н
0	2,4	12	5	$0{,}8\,v^2$	1,5	–	$4\sin(4t)$
1	2	20	6	$0{,}4\,v$	–	2,5	$-5\cos(4t)$
2	8	10	16	$0{,}5\,v^2$	4	–	$6t^2$
3	1,8	24	5	$0{,}3\,v$	–	2	$-2\cos(2t)$
4	6	15	12	$0{,}6\,v^2$	5	–	$-5\sin(2t)$
5	4,5	22	9	$0{,}5\,v$	–	3	$3t$
6	4	12	10	$0{,}8\,v^2$	2,5	–	$6\cos(4t)$
7	1,6	18	4	$0{,}4\,v$	–	2	$-3\sin(4t)$
8	4,8	10	10	$0{,}2\,v^2$	4	–	$4\cos(2t)$
9	3	22	9	$0{,}5\,v$	–	3	$4\sin(2t)$

В точке B груз, не изменяя значения своей скорости, переходит на участок BC трубы, где на него кроме силы тяжести действует переменная сила $\bar{F}$, проекция которой F_x на ось x задана в таблице.

Считая груз материальной точкой и зная расстояние $AB = l$ или время t_1 движения груза от точки A до точки B, найти закон движения груза на участке BC, т.е. $x = f(t)$, где $x = BD$. Трением груза о трубу пренебречь.

Указания. Задача Д1 – на интегрирование дифференциальных уравнений движения точки (решение основной задачи динамики). Решение задачи разбивается на две части. Сначала нужно составить и проинтегрировать методом разделения переменных дифференциальное уравнение движения точки (груза) на участке AB, учтя начальные условия. Затем, зная время движения на участке AB или его длину, определить, какую скорость будет иметь груз в точке B. Эта скорость будет начальной для движения груза на участке BC. После этого нужно составить и проинтегрировать дифференциальное уравнение движения груза на участке BC тоже с учетом начальных условий, ведя отсчет времени от момента, когда груз находится в точке B, и полагая, что в этот момент времени $t = 0$. При интегрировании уравнения движения на участке AB в случае, когда

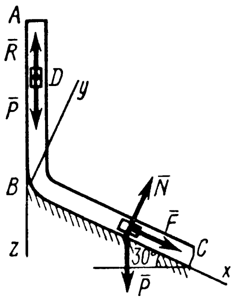


Рис. Д1

задана длина l участка, целесообразно перейти в уравнении к переменному x, учтя, что

$$\frac{dv_x}{dt} = v_x \frac{dv_x}{dx}.$$

Пример Д1. На вертикальном участке AB трубы (рис. Д1) на груз D массой m действуют сила тяжести и сила сопротивления $\bar{R}$; расстояние от точки A, где $v = v_0$, до точки B равно l. На наклонном участке BC на груз действуют сила тяжести и переменная сила $F = F(t)$, заданная в ньютонах.

Дано: $m = 2$ кг, $R = \mu v^2$, где $\mu = 0{,}4$ кг/м, $v_0 = 5$ м/с, $l = 2{,}5$ м, $F_x = 16 \sin(4t)$.

Определить: $x = f(t)$ – закон движения груза на участке BC.

Решение. 1. Рассмотрим движение груза на участке AB, считая груз материальной точкой. Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $\bar{P} = m\bar{g}$ и $\bar{R}$. Проводим ось Az и составляем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

$$m \frac{dv_z}{dt} = \Sigma F_{kz} \text{ или } m v_z \frac{dv_z}{dz} = P_z + R_z. \tag{1}$$

Далее находим: $P_z = P = mg$, $R_z = -R = -\mu v^2$; подчеркиваем, что в уравнении все переменные силы надо обязательно выразить через величины, от которых они зависят. Учтя еще, что $v_z = v$, получим

$$mv \frac{dv}{dz} = mg - \mu v^2 \text{ или } v \frac{dv}{dz} = \frac{\mu}{m} \left(\frac{mg}{\mu} - v^2 \right). \tag{2}$$

Введем для сокращения записей обозначения

$$k = \frac{\mu}{m} = 0{,}2 \text{ м}^{-1}, \quad n = \frac{mg}{\mu} = 50 \text{ м}^2/\text{с}^2, \tag{3}$$

где при подсчете принято $g \approx 10$ м/с^2. Тогда уравнение (2) можно представить в виде

$$2v \frac{dv}{dz} = -2k (v^2 - n). \tag{4}$$

Разделяя в уравнении (4) переменные, а затем беря от обеих частей интегралы, получим

$$\frac{2v\,dv}{v^2 - n} = -2k\,dz \text{ и } \ln(v^2 - n) = -2kz + C_1. \tag{5}$$

По начальным условиям при $z = 0$ $v = v_0$, что дает $C_1 = \ln(v_0^2 - n)$, и из равенства (5) находим $\ln(v^2 - n) = -2kz + \ln(v_0^2 - n)$ или $\ln(v^2 - n) -$

$-\ln(v_0^2 - n) = -2kz$. Отсюда

$$\ln\frac{v^2 - n}{v_0^2 - n} = -2kz \quad \text{и} \quad \frac{v^2 - n}{v_0^2 - n} = e^{-2kz}.$$

В результате находим

$$v^2 = n + (v_0^2 - n)\, e^{-2kz}. \qquad (6)$$

Полагая в равенстве (6) $z = l = 2{,}5$ м и заменяя k и n их значениями (3), определим скорость v_B груза в точке B ($v_0 = 5$ м/с, число $e = 2{,}7$):

$$v_B^2 = 50 - 25/e = 40{,}7 \quad \text{и} \quad v_B = 6{,}4 \text{ м/с}. \qquad (7)$$

2. Теперь рассмотрим движение груза на участке BC; найденная скорость v_B будет для движения на этом участке начальной скоростью ($v_0 = v_B$). Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $\overline{P} = m\overline{g}$, $\overline{N}$ и $\overline{F}$.

Проведем из точки B ось Bx и составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

$$m\frac{dv_x}{dt} = P_x + N_x + F_x. \qquad (8)$$

Так как $P_x = P \sin 30° = 0{,}5\, mg$, $N_x = 0$, $F_x = 16 \sin(4t)$, то уравнение (8) примет вид

$$m\frac{dv_x}{dt} = 0{,}5\, mg + 16 \sin(4t). \qquad (9)$$

Разделив обе части равенства на $m = 2$ кг и полагая опять $g \approx 10$ м/с^2, получим

$$\frac{dv_x}{dt} = 5 + 8 \sin(4t). \qquad (10)$$

Умножая обе части уравнения (10) на dt и интегрируя, найдем

$$v_x = 5t - 2\cos(4t) + C_2. \qquad (11)$$

Будем теперь отсчитывать время от момента, когда груз находится в точке B, считая в этот момент $t = 0$. Тогда при $t = 0$ $v_x = v_0 = v_B$, где v_B дается равенством (7). Подставляя эти величины в (11), получим

$$C_2 = v_B + 2\cos 0 = 6{,}4 + 2 = 8{,}4.$$

При найденном значении C_2 уравнение (11) дает

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 5t - 2\cos(4t) + 8{,}4. \qquad (12)$$

Умножая здесь обе части на dt и снова интегрируя, найдем

$$x = 2{,}5t^2 - 0{,}5\sin(4t) + 8{,}4t + C_3. \qquad (13)$$

Так как при $t = 0$ $x = 0$, то $C_3 = 0$ и окончательно искомый закон движения груза будет

$$x = 2{,}5t^2 + 8{,}4t - 0{,}5 \sin(4t), \tag{14}$$

где x – в метрах, t – в секундах.

Задача Д2

Механическая система состоит из прямоугольной вертикальной плиты *1* массой $m_1 = 24$ кг и груза D массой $m_2 = 8$ кг; плита или движется вдоль горизонтальных направляющих (рис. Д2.0–Д2.4), или вращается вокруг вертикальной оси z, лежащей в плоскости плиты (рис. Д2.5–Д2.9).

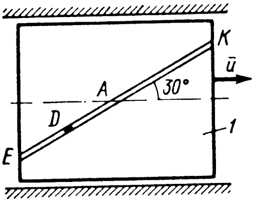


Рис. Д2.0

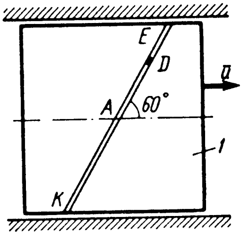


Рис. Д2.1

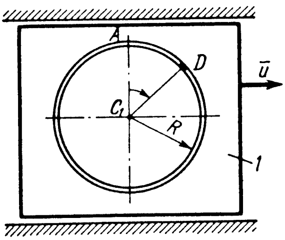


Рис. Д2.2

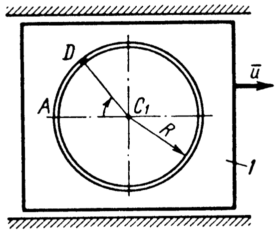


Рис. Д2.3

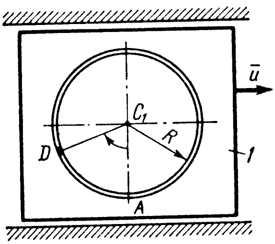


Рис. Д2.4

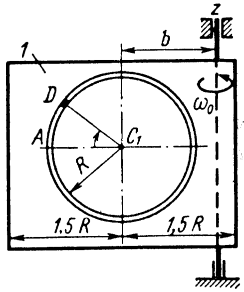


Рис. Д2.5

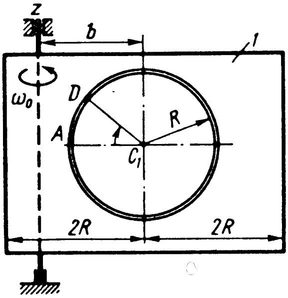


Рис. Д2.6

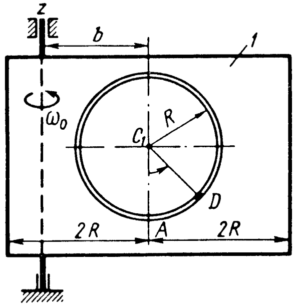


Рис. Д2.7

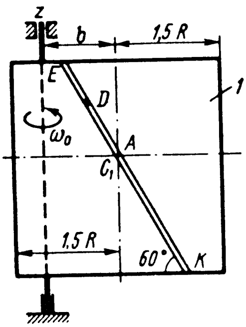


Рис. Д2.8

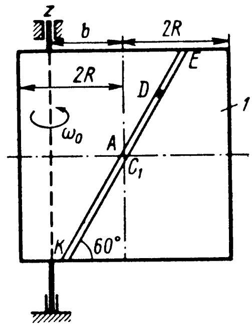


Рис. Д2.9

В момент времени $t_0=0$ груз начинает двигаться под действием внутренних сил по имеющемуся на плите желобу; закон его движения $s = AD = F(t)$ задан в табл. Д2, где s выражено в метрах, t – в секундах. Форма желоба на рис. Д2.0, Д2.1, Д2.8, Д2.9 – прямолинейная (желоб KE), на рис. Д2.2–Д2.7 – окружность радиуса R = 0,8 м с центром в центре масс C_1 плиты ($s = \breve{AD}$ на рис. Д2.2–Д2.7 отсчитывается по дуге окружности).

Плита (рис. Д2.0–Д2.4) имеет в момент $t_0 = 0$ скорость $u_0 = 0$.

Плита (рис. Д2.5–Д2.9) имеет в момент времени $t_0 = 0$ угловую скорость $\omega_0 = 8\ c^{-1}$, и в этот момент на нее начинает действовать вращающий момент M (момент относительно оси z), заданный в таблице в ньютонометрах и направленный как ω_0 при $M > 0$ и в противоположную сторону при $M < 0$. Ось z проходит от центра C_1 плиты на расстоянии b; размеры плиты показаны на рисунках.

Считая груз материальной точкой и пренебрегая всеми сопротивлениями, определить указанное в таблице в столбцах 4 и 9, где обозначено: в столбце 4 (относится к рис. Д2.0–Д2.4) x_1 – перемещение плиты за время от $t_0 = 0$ до $t_1 = 1$ с, u_1 – скорость плиты в момент времени

Номер условия	Рис. 0 и 1	Рис. 2–4	Рис. 0–4
	$s = F(t)$	$\smile{s} = F(t)$	Найти
1	2	3	4
0	$0{,}6 \sin\left(\frac{\pi}{3} t^2\right)$	$\frac{\pi R}{3}(t^2 - 3)$	x_1
1	$0{,}4(1 - 3t^2)$	$\frac{\pi R}{3}(3 - 2t^2)$	u_1
2	$0{,}4 \sin(\pi t^2)$	$\frac{\pi R}{2} t^2$	N_1
3	$0{,}8 \cos\left(\frac{\pi}{4} t^2\right)$	$\frac{\pi R}{6} t^2$	u_1
4	$0{,}3(1 - 3t^2)$	$\frac{\pi R}{6}(2t^2 - 3)$	x_1
5	$0{,}8 \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right)$	$\frac{\pi R}{2}(t^2 - 1)$	N_1
6	$0{,}6t^2$	$\frac{\pi R}{3} t^2$	u_1
7	$0{,}4(2t^2 - 1)$	$\frac{\pi R}{6}(3 - 5t^2)$	x_1
8	$0{,}6 \cos\left(\frac{\pi}{2} t^2\right)$	$\pi R t^2$	N_1
9	$1{,}2 \cos\left(\frac{\pi}{6} t^2\right)$	$\frac{\pi R}{4} t^2$	x_1

$t_1 = 1$ с, N_1 – полная сила нормального давления плиты на направляющие в момент времени $t_1 = 1$ с (указать, куда сила направлена); в столбце 9 (относится к рис. 5–9) ω_1 – угловая скорость плиты в момент времени $t_1 = 1$ с, $\omega = f(t)$ – угловая скорость плиты как функция времени.

На всех рисунках груз показан в положении, при котором $s = AD > 0$; при $s < 0$ груз находится по другую сторону от точки A.

Указания. Задача Д2 – на применение теорем о движении центра масс и об изменении количества движения и кинетического момента системы. Теоремой о движении центра масс целесообразно воспользоваться в задаче, где нужно определить поступательное перемещение одного из тел системы (или реакцию связи), а теоремой об изменении количества движения – когда нужно определить скорость такого тела. Теорема об изменении кинетического момента применяется в задачах, где нужно найти угловую скорость или закон вращения одного из тел системы.

Таблица Д2

Рис. 5–7	Рис. 8 и 9	Рис. 5–9		
$\breve{s} = F(t)$	$s = F(t)$	b	M	Найти
5	6	7	8	9
$\frac{\pi R}{2}(1 - 2t)$	$0{,}4 \sin(\pi t)$	$\frac{R}{2}$	8	$\omega = f(t)$
$\frac{\pi R}{6}(1 + 2t^2)$	$0{,}2(2 - 3t)$	$\frac{4R}{3}$	0	ω_1
$\frac{\pi R}{2} t^2$	$-0{,}8t$	R	$12t^2$	$\omega = f(t)$
$\frac{\pi R}{3}(4t^2 - 1)$	$0{,}2(2 - 5t)$	$\frac{4R}{3}$	0	ω_1
$\frac{\pi R}{6}(5 - 7t)$	$0{,}4(3t - 1)$	$\frac{R}{2}$	0	ω_1
$\frac{\pi R}{3}(2t^2 - 3)$	$0{,}6 \cos(\pi t)$	R	-12	$\omega = f(t)$
$\frac{\pi R}{6}(3 - 4t^2)$	$0{,}8(1 - t^2)$	$\frac{R}{2}$	0	ω_1
$\frac{\pi R}{3}(3t - t^2)$	$0{,}8(5t^2 - 2)$	$\frac{4R}{3}$	0	ω_1
$\frac{\pi R}{6}(2t - 3)$	$0{,}4t^2$	$\frac{R}{2}$	$-8t$	$\omega = f(t)$
$\frac{\pi R}{3}(3 - 5t^2)$	$0{,}6(t - 2t^2)$	$\frac{4R}{3}$	0	ω_1

При решении задачи учесть, что абсолютная скорость $\bar{v}$ груза слагается из относительной $\bar{v}_{\text{отн}}$ и переносной $\bar{v}_{\text{пер}}$ скоростей (определяются так же, как при решении задачи К3), т.е. $\bar{v} = \bar{v}_{\text{отн}} + \bar{v}_{\text{пер}}$. Тогда количество движения груза $m\bar{v} = m\bar{v}_{\text{отн}} + m\bar{v}_{\text{пер}}$, а момент $m\bar{v}$ относительно оси z по теореме Вариньона (статика) будет $m_z(m\bar{v}) = m_z(m\bar{v}_{\text{отн}}) + m_z(m\bar{v}_{\text{пер}})$; эти моменты вычисляются так же, как моменты силы.

Конкретнее ход решения разъяснен в примерах Д2.

Момент инерции плиты относительно оси $C_1 z'$, направленной так же, как ось z на рис. Д2.5–Д2.9, но проходящей через центр масс C_1 плиты, равняется $m_1 l^2/12$, где l – ширина плиты (в задаче $l = 3R$ или $l = 4R$). Для определения момента инерции I_z относительно оси z воспользоваться теоремой Гюйгенса о моментах инерции относительно параллельных осей. Ось z при изображении чертежа провести на том расстоянии b от центра C_1, которое указано в таблице.

Пример Д2. К вертикальной плите *1* массой m_1 с помощью невесомого стержня BD длиной l прикреплен груз D массой m_2 (рис. Д2а). В момент времени $t_0 = 0$ стержень начинает вращаться вокруг точки B так, что расстояние $s = \overset{\frown}{AD}$ изменяется по закону $s = F(t)$, где s – в метрах, t – в секундах.

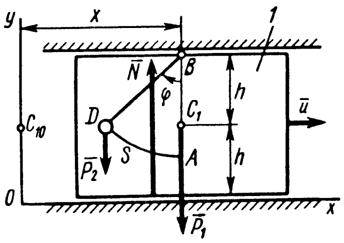


Рис. Д2а

Плита движется по горизонтальным направляющим и при $t_0 = 0$ ее скорость $u = u_0$.

Д а н о: $m_1 = 12$ кг, $m_2 = 6$ кг, $l = 0{,}8$ м, $t_1 = 2$ с,

$$u_0 = 0,\ s = \frac{\pi l}{6}(3 - t^2). \tag{1}$$

1. Определение перемещения x_1 плиты за время от $t_0 = 0$ до $t = t_1$.

Решеиие. Рассмотрим механическую систему, состоящую из плиты и груза. Изобразим действующие на нее внешние силы: силы тяжести $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ и суммарную реакцию $\overline{N}$ направляющих. Проведем координатные оси xy так, чтобы ось y прошла через начальное положение центра масс плиты. Для определения x_1 воспользуемся теоремой о движении центра масс C системы и составим дифференциальное уравнение его движения в проекции на ось x, обозначая массу системы через m:

$$m\ddot{x}_C = \Sigma F^e_{kx},\ \text{или}\ m\ddot{x}_C = 0,\ \text{так как}$$

$$\Sigma F^e_{kx} = P_{1x} + P_{2x} + N_x = 0.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$m\dot{x}_C = C_1,\ mx_C = C_1 t + C_2, \tag{2}$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования.

Из формулы, определяющей абсциссу x_C центра масс, следует, что для рассматриваемой системы $mx_C = m_1 x + m_2 x_D$, где x – абсцисса центра масс плиты, определяющая одновременно ее положение, x_D – абсцисса груза D. Из рис. Д3а видно, что $x_D = x - l\sin\varphi$, где

$$\varphi = \frac{s}{l} = \frac{\pi}{6}(3 - t^2)\ \text{и}\ \sin\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi t^2}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi t^2}{6}\right). \tag{3}$$

В результате, найдя значение mx_C и подставив его в (2), получим

$$(m_1 + m_2)x - m_2 l\cos\left(\frac{\pi t^2}{6}\right) = C_1 t + C_2. \tag{4}$$

Для определения постоянных C_1 и C_2 понадобится еще одно уравнение, которое получим, продифференцировав обе части равенства (4) по времени; это даст:

$$(m_1 + m_2)\dot{x} + \frac{\pi t}{3} m_2 l \sin\left(\frac{\pi t^2}{6}\right) = C_1, \qquad (5)$$

где $\dot{x} = u$ – скорость плиты. По начальным условиям при $t = 0$ $x = 0$, $\dot{x} = u_0 = 0$. Подставив эти величины в равенства (5) и (4), получим $C_1 = 0$, $C_2 = -m_2 l$. При найденных значениях C_1 и C_2 из равенства (4) окончательно получим

$$x = -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2}\left[1 - \cos\left(\frac{\pi t^2}{6}\right)\right].$$

Этот результат дает зависимость x от t. Полагая здесь $t = t_1 = 2$ с, найдем искомое перемещение x_1. О т в е т: $x_1 = -0{,}4$ м (плита переместится влево).

2. Определение скорости u_1. При тех же условиях (1) найдем скорость u_1 плиты в момент времени $t_1 = 2$ с.

Решение. Рассматриваем опять механическую систему, состоящую из плиты и груза, и изображаем действующие на нее внешние силы $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ и реакцию $\bar{N}$; проводим оси xy (рис. Д2б). Для определения u_1 воспользуемся теоремой об изменении количества движения системы, учитывая, что для рассматриваемой системы $\bar{Q} = \bar{Q}^{\text{пл}} + \bar{Q}^D$, где $\bar{Q}^{\text{пл}} = m_1\bar{u}$ и $\bar{Q}^D = m_2\bar{v}_D$ – количества движения плиты и груза соответственно. Составляя уравнение в проекции на ось x, получим

$$\frac{dQ_x}{dt} = \Sigma F^e_{kx}, \text{ или } \frac{dQ_x}{dt} = 0,$$

так как

$$\Sigma F^e_{kx} = P_{1x} + P_{2x} + N_x = 0.$$

Отсюда следует, что

$$Q_x = Q_x^{\text{пл}} + Q_x^D = 0 \quad \text{или}$$

$$m_1 u_x + m_2 v_{Dx} = C_1. \qquad (6)$$

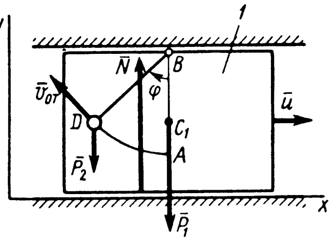


Рис. Д2б

Для определения v_{Dx} рассмотрим движение груза как сложное, считая его движение по отношению к плите относительным, а движение самой плиты – переносным движением. Тогда $\bar{v}_D = \bar{v}_{\text{пер}} + \bar{v}_{\text{отн}}$, где численно $v_{\text{пер}} = u$ и $v_{\text{отн}} = \dot{s}$. Покажем вектор $\bar{v}_{\text{отн}}$ на рис. Д2б, направив его перпендикулярно BD в сторону положительного отсчета s или φ, и определим проекцию вектора $\bar{v}_D$ на ось x; получим $v_{Dx} = u_x - v_{\text{отн}}\cos\varphi$, где

$$\varphi = \frac{s}{l} = \frac{\pi}{6}(3 - t^2) \text{ и } \cos\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi t^2}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi t^2}{6}\right). \qquad (7)$$

В данной задаче v_{Dx} можно еще найти, определив абсциссу точки D, т.е. $x_D = x - l\sin\varphi$ (рис. Д2а); тогда $v_{Dx} = \dot{x}_D = \dot{x} - l\dot{\varphi}\cos\varphi$, где $\dot{x} = u_x$, $l\dot{\varphi} = \dot{s}$, а значение $\cos\varphi$ дает равенство (7).

При найденном значении v_{Dx} равенство (6), если учесть, что $u_x = u$, а $v_{\text{отн}} = \dfrac{ds}{dt} = -\dfrac{\pi l}{3}\,t$, примет вид

$$(m_1 + m_2)\,u + m_2 \frac{\pi l}{3}\,t \sin\left(\frac{\pi t^2}{6}\right) = C_1. \tag{8}$$

По начальным условиям при $t = 0$ $u = 0$, что дает $C_1 = 0$, и окончательно из (8) находим

$$u = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\;\frac{\pi l}{3}\,t \sin\left(\frac{\pi t^2}{6}\right).$$

Этот результат определяет зависимость u от t. Полагая здесь $t = t_1 = 2$ с, найдем искомую скорость u_1.

Ответ: $u_1 = -0{,}48$ м/с (скорость направлена влево).

3. Определение реакции N_1. При тех же условиях (1) найдем реакцию N_1 направляющих в момент времени $t_1 = 2$ с.

Решение. Опять рассмотрим механическую систему, состоящую из плиты и груза D, и изобразим действующие на нее внешние силы $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ и реакцию $\overline{N}$ (рис. Д2а). Для определения N_1 воспользуемся теоремой о движении центра масс системы и составим дифференциальное уравнение его движения в проекции на ось y:

$$m\ddot{y}_C = \Sigma F_{ky}^e, \text{ или } m\ddot{y}_C = N - P_1 - P_2, \tag{9}$$

где m – масса системы; $P_1 = m_1 g$; $P_2 = m_2 g$. Из формулы, определяющей ординату y_C центра масс системы, следует, что для рассматриваемой системы $my_C = m_1 y_{C1} + m_2 y_D$, где, как видно из рис. Д2а, $y_{C1} = h$, $y_D = 2h - l\cos\varphi$. Тогда, используя равенство (7), получим

$$my_C = m_1 h + 2m_2 h - m_2 l \sin\left(\frac{\pi t^2}{6}\right).$$

Вычисляя производные и учитывая, что $h = \text{const}$, получим

$$m\dot{y}_C = -\frac{\pi}{3}\, m_2 l t \cos\left(\frac{\pi t^2}{6}\right),$$

$$m\ddot{y}_C = -\frac{\pi}{3}\, m_2 l \cos\left(\frac{\pi t^2}{6}\right) + \frac{\pi^2}{9}\, m_2 l t^2 \sin\left(\frac{\pi t^2}{6}\right).$$

Подставив это значение $m\ddot{y}_C$ в равенство (9), найдем зависимость N от t и из нее, полагая $t = t_1 = 2$ с, определим искомую величину N_1.

Ответ: $N_1 = 197{,}3$ Н.

4. Определение угловой скорости ω. Плита вращается вокруг оси z, лежащей в плоскости плиты (рис. Д2в), и в момент времени $t_0 = 0$, когда угловая скорость плиты равна ω_0, на нее начинает действовать вращающий момент M.

Д а н о: дополнительно к условиям (1): $\omega_0 = 5$ с$^{-1}$, $M = kt$, где $k = 10$ Н·м/с.

О п р е д е л и т ь: $\omega = f(t)$ – зависимость угловой скорости плиты от времени.

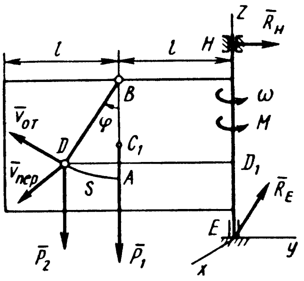


Рис. Д2в

Решение. Рассмотрим механическую систему, состоящую из плиты и груза D, и изобразим действующие на нее внешние силы: силы тяжести $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, реакции $\bar{R}_E$ и $\bar{R}_H$ подпятника и подшипника и вращающий момент M. Для определения ω применим теорему об изменении кинетического момента системы относительно оси z. Предварительно заметим, что так как силы $\bar{P}_1$ и $\bar{P}_2$ параллельны оси z, а реакции $\bar{R}_E$ и $\bar{R}_H$ эту ось пересекают, то их моменты относительно оси z равны нулю. Тогда $\Sigma m_z(\bar{F}_k^e) = M = kt$ и теорема дает

$$\frac{dK_z}{dt} = \Sigma m_z(\bar{F}_k^e) \quad \text{или} \quad \frac{dK_z}{dt} = kt. \tag{10}$$

Умножая обе части этого уравнения на dt и интегрируя, получим

$$K_z = \frac{kt^2}{2} + C_1. \tag{11}$$

Для рассматриваемой механической системы

$$K_z = K_z^{\text{пл}} + K_z^D, \tag{12}$$

где $K_z^{\text{пл}}$ и K_z^D – кинетические моменты относительно оси z плиты и груза D соответственно. Поскольку плита вращается вокруг оси z, то

$$K_z^{\text{пл}} = I_z\omega, \text{ где } I_z = \frac{m_1}{3}(2l)^2 = \frac{4}{3}m_1 l^2. \tag{13}$$

Для определения K_z^D рассмотрим движение груза как сложное, считая его движение по отношению к плите относительным, а вращение плиты вокруг оси z – переносным движением. Тогда $\bar{v}_D = \bar{v}_{\text{отн}} + \bar{v}_{\text{пер}}$ и, по теореме Вариньона,

$$K_z^D = m_z(m_2\bar{v}_{\text{отн}}) + m_z(m_2\bar{v}_{\text{пер}}). \tag{14}$$

Но вектор $\bar{v}_{\text{отн}}$ лежит в одной плоскости с осью z и, следовательно, $m_z(m_2\bar{v}_{\text{отн}}) = 0$. Вектор $\bar{v}_{\text{пер}}$ направлен перпендикулярно плите (как ось x, если ось y в плоскости плиты); по модулю $v_{\text{пер}} = \omega \cdot DD_1$. Тогда $m_z(m_2\bar{v}_{\text{пер}}) = m_2 v_{\text{пер}} \cdot DD_1 = m_2\omega(DD_1)^2$. Но из рис. Д2в видно, что $DD_1 = l + l\sin\varphi$. Взяв значение $\sin\varphi$ из формулы (3) и подставив все найденные величины в равенство (14), получим

$$K_Z^D = m_2 \omega (DD_1)^2 = m_2 \omega l^2 \left(1 + \cos \frac{\pi t^2}{6}\right)^2 . \tag{15}$$

Зная $K_Z^{\text{пл}}$ и K_Z^D [формулы (13) и (15)], найдем из равенства (12) значение K_Z; тогда уравнение (11) примет вид

$$\left[\frac{4}{3} m_1 + m_2 \left(1 + \cos \frac{\pi t^2}{6}\right)^2\right] l^2 \omega = \frac{kt^2}{2} + C_1,$$

или при числовых значениях задачи

$$0{,}64 \left[16 + 6 \left(1 + \cos \frac{\pi t^2}{6}\right)^2\right] \omega = 5t^2 + C_1 . \tag{16}$$

Постоянную интегрирования определим по начальным условиям: при $t = 0$ $\omega = \omega_0 = 5$ с$^{-1}$; получим $C_1 = 128$. При этом значении C_1 из уравнения (16) находим искомую зависимость ω от t.

Ответ:

$$\omega = \frac{128 + 5t^2}{0{,}64 \left[16 + 6 \left(1 + \cos \frac{\pi t^2}{6}\right)^2\right]} .$$

Примечание. Из полученного результата можно найти и значение ω_1 при $t = t_1$. Но если по условиям задачи одновременно $M = 0$, то уравнение (10) дает $K_Z = \text{const}$, и тогда обычно проще не искать зависимость ω от t в общем виде, а сначала определить положение груза D при $t = 0$ (т.е. угол φ_0) и вычислить значение K_{Z0} при $\varphi = \varphi_0$ и $\omega = \omega_0$ с помощью равенств, аналогичных (11) – (15); затем определить положение груза при $t = t_1$ (угол φ_1) и тем же путем найти K_{Z1} при $\varphi = \varphi_1$ и $\omega = \omega_1$.

Так, в рассмотренном примере при $t = 0$ будет $\varphi_0 = \pi/2$ и $DD_1 = 2l$ (рис Д2в), а при $t = t_1 = 2$ с будет $\varphi_1 = -\pi/6$ и $DD_1 = l/2$. Тогда

$$K_{Z0} = \left(\frac{4}{3} m_1 l^2 + m_2 4l^2\right)\omega_0, \quad K_{Z1} = \left(\frac{4}{3} m_1 l^2 + m_2 \frac{l^2}{4}\right)\omega_1 .$$

Значение ω_1 находится из равенства $K_{Z1} = K_{Z0}$.

Задача Д3

Механическая система состоит из грузов *1* и *2* (коэффициент трения грузов о плоскость $f = 0{,}1$), цилиндрического сплошного однородного катка *3* и ступенчатых шкивов *4* и *5* с радиусами ступеней $R_4 = 0{,}3$ м, $r_4 = 0{,}1$ м, $R_5 = 0{,}2$ м, $r_5 = 0{,}1$ м (массу каждого шкива считать равномерно распределенной по его внешнему ободу) (рис. Д3.0–Д3.9, табл. Д3). Тела системы соединены друг с другом нитями, намотанными на шкивы; участки нитей параллельны соответствующим плоскостям.

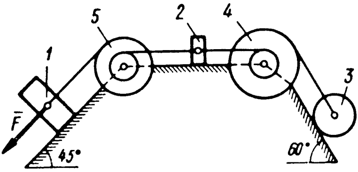


Рис. Д3.0

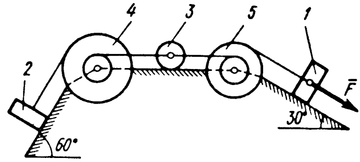


Рис. Д3.1

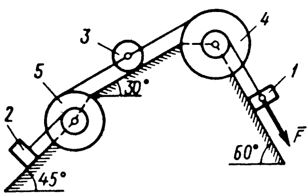


Рис. Д3.2

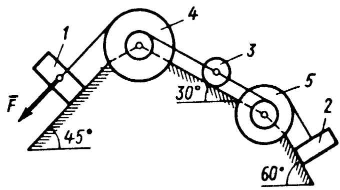


Рис. Д3.3

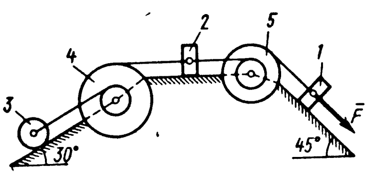


Рис. Д3.4

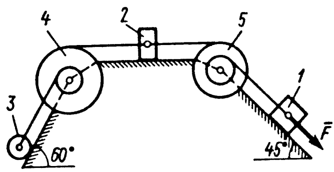


Рис. Д3.5

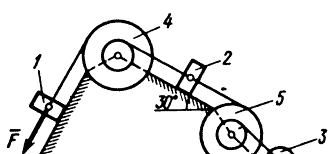


Рис. Д3.6

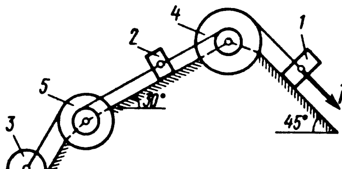


Рис. Д3.7

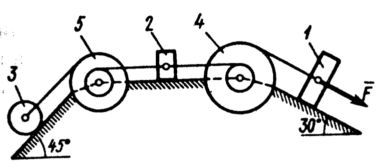


Рис. Д3.8

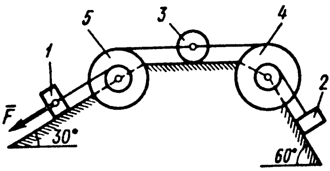


Рис. Д3.9

Таблица Д3

Номер условия	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	m_5, кг	M_4, Н · м	M_5, Н · м	$F = f(s)$, Н	s_1, м	Найти
0	2	0	4	6	0	0	0,8	$50(2 + 3s)$	1,0	v_1
1	6	0	2	0	8	0,6	0	$20(5 + 2s)$	1,2	ω_5
2	0	4	6	8	0	0	0,4	$80(3 + 4s)$	0,8	v_{C_3}
3	0	2	4	0	10	0,3	0	$40(4 + 5s)$	0,6	v_2
4	8	0	2	6	0	0	0,6	$30(3 + 2s)$	1,4	ω_4
5	8	0	4	0	6	0,9	0	$40(3 + 5s)$	1,6	v_1
6	0	6	2	8	0	0	0,8	$60(2 + 5s)$	1,0	ω_4
7	0	4	6	0	10	0,6	0	$30(8 + 3s)$	0,8	ω_5
8	6	0	4	0	8	0,3	0	$40(2 + 5s)$	1,6	v_{C_3}
9	0	4	6	10	0	0	0,4	$50(3 + 2s)$	1,4	v_2

Под действием силы $F = f(s)$, зависящей от перемещения точки приложения силы, система приходит в движение из состояния покоя. При движении системы на шкивы *4* и *5* действуют постоянные моменты сил сопротивлений, равные соответственно M_4 и M_5.

Определить значение искомой величины в тот момент времени, когда перемещение точки приложения силы $\bar{F}$ равно s_1. Искомая величина указана в столбце "Найти" таблицы, где обозначено: v_1 – скорость груза *1*, v_{C3} – скорость центра масс катка *3*, ω_4 – угловая скорость тела *4* и т.д.

Указания. Задача Д3 – на применение теоремы об изменении кинетической энергии системы. При решении задачи учесть, что кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий всех входящих в систему тел: эту энергию нужно выразить через ту скорость (линейную или угловую), которую в задаче надо определить. При вычислении кинетической энергии катка, движущегося плоскопараллельно, для установления зависимости между его угловой скоростью и скоростью его центра масс воспользоваться понятием о мгновенном центре скоростей (кинематика). При определении работы все перемещения следует выразить через заданное перемещение s_1, учтя, что зависимость между перемещениями здесь будет такой же, как между соответствующими скоростями.

Когда по данным таблицы $m_2 = 0$, груз *2* на чертеже не изображать; шкивы *4* и *5* всегда входят в систему.

Пример Д3. Механическая система (рис. Д3) состоит из сплошного цилиндрического катка *1*, ступенчатого шкива *2* с радиусами ступеней R_2 и r_2 (масса шкива равномерно распределена по его внешнему ободу) и груза *3* (коэффициент трения груза о плоскость равен f). Тела системы соединены друг с другом нитями, намотанными на шкив *2*.

Под действием силы $F = f(s)$, зависящей от перемещения s точки ее приложения, система приходит в движения из состояния покоя. При движении на шкив 2 действует постоянный момент M_2 сил сопротивления.

Дано: $m_1 = 4$ кг, $m_2 = 10$ кг, $m_3 = 8$ кг, $R_2 = 0{,}2$ м, $r_2 = 0{,}1$ м, $f = 0{,}2$, $M_2 = 0{,}6$ Н · м, $F = 2(1 + 2s)$ Н, $s_1 = 2$ м.

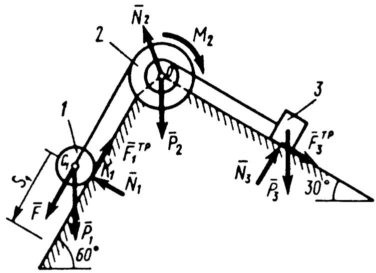


Рис. Д3

Определить: скорость v_{C1} центра масс катка, когда $s = s_1$.

Решение. 1. Рассмотрим движение неизменяемой механической системы, состоящей из тел 1, 2, 3, соединенных нитями. Изобразим все действующие на систему внешние силы: активные $\bar{F}$, $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$, момент сопротивления M_2, реакции $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$, $\bar{N}_3$ и силы трения $\bar{F}_1^{тр}$ и $\bar{F}_3^{тр}$.

Для определения v_{C1} воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии системы

$$T - T_0 = \Sigma A_k^e. \tag{1}$$

2. Определяем T_0 и T. Так как в начальный момент система находилась в покое, то $T_0 = 0$. Величина T равна сумме энергий всех тел системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \tag{2}$$

Учитывая, что тело 1 движется плоскопараллельно, тело 3 – поступательно, а тело 2 вращается вокруг неподвижной оси, получим

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_{C1}^2 + \frac{1}{2} I_{C1}\omega_1^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2, \quad T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_3^2. \tag{3}$$

Все входящие сюда скорости следует выразить через искомую v_{C1}. Приняв во внимание, что точка K_1 – мгновенный центр скоростей катка 1, и обозначив радиус катка через r_1, получим

$$\omega_1 = \frac{v_{C1}}{K_1C_1} = \frac{v_{C1}}{r_1}, \quad \omega_2 = \frac{v_{C1}}{R_2}, \quad v_3 = \omega_2 r_2 = v_{C1}\frac{r_2}{R_2}. \tag{4}$$

Кроме того, входящие в (3) моменты инерции имеют значения

$$I_{C1} = 0{,}5\, m_1 r_1^2, \quad I_2 = m_2 R_2^2. \tag{5}$$

Подставив все величины (4) и (5) в равенство (3), а затем используя равенство (2), получим окончательно:

$$T = \left(\frac{3}{4} m_1 + \frac{1}{2} m_2 + \frac{1}{2} m_3 \frac{r_2^2}{R_2^2} \right) v_{C1}^2. \tag{6}$$

3. Теперь найдем сумму работ всех действующих внешних сил при том перемещении, которое будет иметь система, когда точка C_1 пройдет

путь s_1. Одновременно все перемещения следует выразить через заданную величину s_1, для чего учтем, что здесь зависимость между перемещениями будет такой же, как и между соответствующими скоростями в равенствах (4), т.е. $\varphi_2 = s_1/R_2$ $s_3 = s_1\ (r_2/R_2)$. В результате получим:

$$A(\bar{F}) = \int_0^{s_1} 2(1 + 2s)\,ds = 2(s_1 + s_1^2),$$

$$A(\bar{P}_1) = P_1 s_1 \sin 60°,\ A(M_2) - -M_2\varphi_2 = -M_2 \frac{s_1}{R_2},$$

$$A(\bar{P}_3) = -P_3 s_3 \sin 30° = -P_3 s_1 \frac{r_2}{R_2} \sin 30°,$$

$$A(\bar{F}_3^{\text{тр}}) = -F_3^{\text{тр}} s_3 = -fN_3 s_3 = -fP_3 \cos 30° \cdot s_1 \frac{r_2}{R_2}.$$

Работа остальных сил равна нулю, так как точка K_1, где приложены $\bar{N}_1$ и $\bar{F}_1^{\text{тр}}$ – мгновенный центр скоростей, точка O, где приложены $\bar{P}_2$ и $\bar{N}_2$, неподвижна, а реакция $\bar{N}_3$ перпендикулярна перемещению груза 3. Тогда окончательно

$$\Sigma A_k^e = 2(s_1 + s_1^2) + P_1 s_1 \sin 60° - M_2 \frac{s_1}{R_2} -$$

$$- P_3 s_1 \frac{r_2}{R_2} (\sin 30° + f \cos 30°). \tag{7}$$

4. Подставив выражения (6) и (7) в уравнение (1) и учитывая, что $T_0 = 0$, получим

$$\left(\frac{3}{4} m_1 + \frac{1}{2} m_2 + \frac{1}{2} m_3 \frac{r_2^2}{R_2^2} \right) v_{C1}^2 = 2(s_1 + s_1^2) + P_2 s_1 \sin 60° -$$

$$- M_2 \frac{s_1}{R_2} - P_3 s_1 \frac{r_2}{R_2} (\sin 30° + f \cos 30°). \tag{8}$$

При числовых значениях, которые имеют заданные величины, равенство (8) дает

$$9v_{C1}^2 = 21{,}1.$$

Отсюда находим искомую скорость.

О т в е т: $v_{C1} = 1{,}53$ м/с.

Задача Д4

Вертикальный вал AK (рис. Д4.0–Д4.9, табл. Д4), вращающийся с постоянной угловой скоростью $\omega = 10\ \text{с}^{-1}$, закреплен подпятником в точке A и цилиндрическим подшипником в точке, указанной в табл. Д4 в столбце 2 ($AB = BD = DE = EK = b$). К валу жестко прикреплены неве-

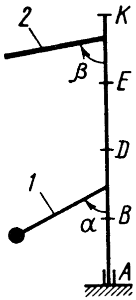


Рис. Д4.0

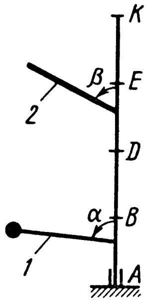


Рис. Д4.1

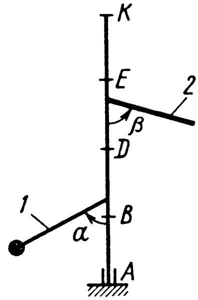


Рис. Д4.2

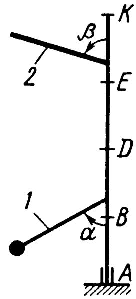


Рис. Д4.3

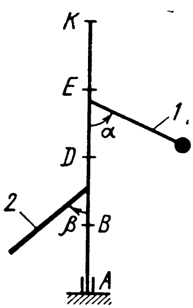


Рис. Д4.4

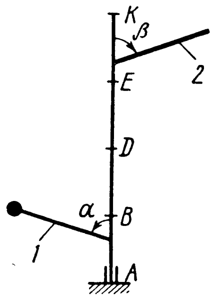


Рис. Д4.5

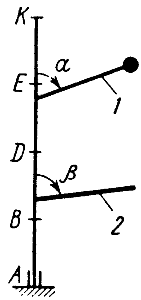


Рис. Д4.6

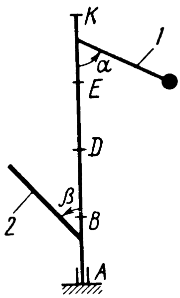


Рис. Д4.7

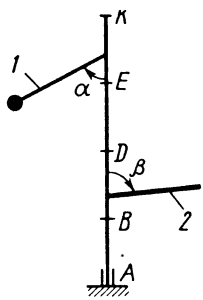


Рис. Д4.8

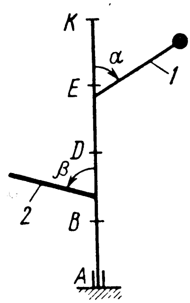


Рис. Д4.9

Таблица Д4

Номер условия	Подшипник в точке	Крепление стержня 1 в точке	Крепление стержня 2 в точке	$\alpha°$	$\beta°$	Номер условия	Подшипник в точке	Крепление стержня 1 в точке	Крепление стержня 2 в точке	$\alpha°$	$\beta°$
1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
0	*B*	*D*	*K*	30	45	5	*D*	*K*	*B*	30	45
1	*D*	*B*	*E*	45	60	6	*E*	*B*	*K*	45	30
2	*E*	*D*	*B*	60	75	7	*K*	*E*	*B*	60	75
3	*K*	*D*	*E*	75	30	8	*D*	*E*	*K*	75	60
4	*B*	*E*	*D*	90	60	9	*E*	*K*	*D*	90	45

сомый стержень *1* длиной $l_1 = 0{,}4$ м с точечной массой $m_1 = 6$ кг на конце и однородный стержень *2* длиной $l_2 = 0{,}6$ м, имеющий массу $m_2 = 4$ кг; оба стержня лежат в одной плоскости. Точки крепления стержней к валу указаны в таблице в столбцах 3 и 4, а углы α и β – в столбцах 5 и 6.

Пренебрегая весом вала, определить реакции подпятника и подшипника. При окончательных подсчетах принять $b = 0{,}4$ м.

Указания. Задача Д4 – на применение к изучению движения системы принципа Даламбера. При решении задачи учесть, что когда силы инерции частиц тела (в данной задаче стержня *2*) имеют равнодействующую $\bar{R}^{и}$, то численно $R^{и} = ma_C$, где a_C – ускорение центра масс C стержня, но линия действия силы $\bar{R}^{и}$ в общем случае не проходит через точку C (см. пример Д4).

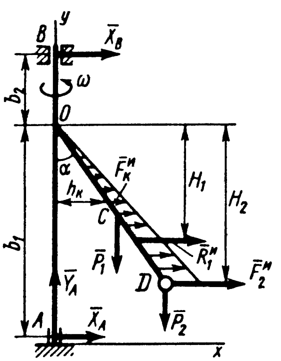


Рис. Д4

Пример Д4. С невесомым валом AB, вращающимся с постоянной угловой скоростью ω, жестко скреплен стержень OD длиной l и массой m_1, имеющий на конце груз массой m_2 (рис. Д4).

Дано: $b_1 = 0{,}6$ м, $b_2 = 0{,}2$ м, $\alpha = 30°$, $l = 0{,}5$ м, $m_1 = 3$ кг, $m_2 = 2$ кг, $\omega = 6$ с$^{-1}$.

Определить: реакции подпятника A и подшипника B.

Решение. Для определения искомых реакций рассмотрим движение механической системы, состоящей из вала AB, стержня OD и груза, и применим принцип Даламбера. Проведем вращающиеся вместе с валом оси

Axy так, чтобы стержень лежал в плоскости xy, и изобразим действующие на систему внешние силы: силы тяжести $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, составляющие $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$ реакции подпятника и реакцию $\overline{X}_B$ подшипника.

Согласно принципу Даламбера присоединим к этим силам силы инерции элементов стержня и груза, считая груз материальной точкой. Так как вал вращается равномерно ($\omega = \text{const}$), то элементы стержня имеют только нормальные ускорения $\overline{a}_{nk}$, направленные к оси вращения, а численно $a_{nk} = \omega^2 h_k$, где h_k – расстояние элемента от оси. Тогда силы инерции $\overline{F}_k^{\text{и}}$ будут направлены от оси вращения и численно $F_k^{\text{и}} = \Delta m a_{nk} = \Delta m \omega^2 h_k$, где Δm – масса элемента. Поскольку все $\overline{F}_k^{\text{и}}$ пропорциональны h_k, то эпюра этих параллельных сил образует треугольник и их можно заменить равнодействующей $\overline{R}_1^{\text{и}}$, линия действия которой проходит через центр тяжести этого треугольника, т.е. на расстоянии H_1 от вершины O, где $H_1 = \dfrac{2}{3} H_2$ $(H_2 = l \cos \alpha)$.

Но, как известно, равнодействующая любой системы сил равна ее главному вектору, а численно главный вектор сил инерции стержня $R_1^{\text{и}} = m_1 a_C$, где a_C – ускорение центра масс стержня; при этом, как и для любого элемента стержня, $a_C = a_{Cn} = \omega^2 h_C = \omega^2 OC \sin \alpha$ $(OC = l/2)$. В результате получим

$$R_1^{\text{и}} = m_1 \omega^2 \frac{l}{2} \sin \alpha = 13{,}5 \text{ Н}.$$

Аналогично для силы инерции $\overline{F}_2^{\text{и}}$ груза найдем, что она тоже направлена от оси вращения, а численно $F_2^{\text{и}} = m_2 \omega^2 l \sin \alpha = 18$ Н.

Так как все действующие силы и силы инерции лежат в плоскости xy, то и реакции подпятника A и подшипника B тоже лежат в этой плоскости, что было учтено при их изображении.

По принципу Даламбера, приложенные внешние силы и силы инерции образуют уравновешенную систему сил. Составляя для этой плоской системы сил три уравнения равновесия, получим:

$$\Sigma F_{kx} = 0; \quad X_A + X_B + R_1^{\text{и}} + F_2^{\text{и}} = 0, \tag{1}$$

$$\Sigma F_{ky} = 0; \quad Y_A - P_1 - P_2 = 0, \tag{2}$$

$$\Sigma m_B (\overline{F}_k) = 0; \quad X_A (b_1 + b_2) - P_1 (l/2) \sin \alpha - P_2 l \sin \alpha + R_1^{\text{и}} (H_1 + b_2) + F_2^{\text{и}} (H_2 + b_2) = 0. \tag{3}$$

Подставив сюда числовые значения всех заданных и вычисленных величин и решив эту систему уравнений, найдем искомые реакции.

Ответ: $X_A = -11{,}8$ Н, $Y_A = 49{,}1$ Н, $X_B = -19{,}7$ Н.

Знаки указывают, что силы $\overline{X}_A$ и $\overline{X}_B$ направлены противоположно показанным на рис. Д4.

Задача Д5

Механическая система состоит из ступенчатых шкивов *1* и *2* весом P_1 и P_2 с радиусами ступеней $R_1 = R$, $r_1 = 0{,}4\,R$; $R_2 = R$, $r_2 = 0{,}8R$ (массу каждого шкива считать равномерно распределенной по его внешнему ободу); грузов *3, 4* и сплошного однородного цилиндрического катка *5* весом P_3, P_4, P_5 соответственно (рис. Д5.0–Д5.9, табл. Д5). Тела системы соединены нитями, намотанными на шкивы; участки нитей параллельны соответствующим плоскостям. Грузы скользят по плоскостям без трения, а катки катятся без скольжения.

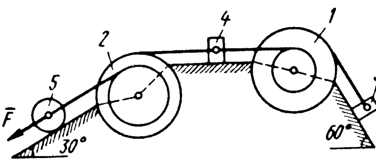


Рис. Д5.0

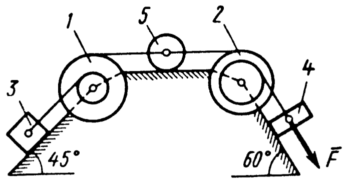


Рис. Д5.1

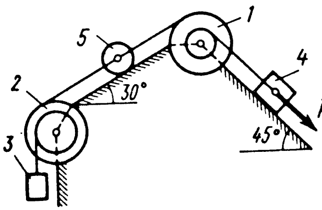


Рис. Д5.2

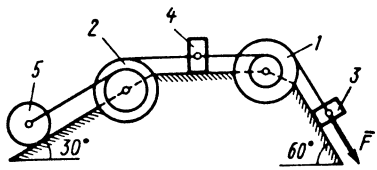


Рис. Д5.3

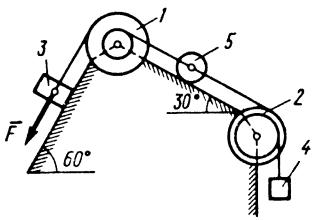


Рис. Д5.4

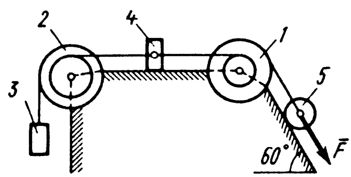


Рис. Д5.5

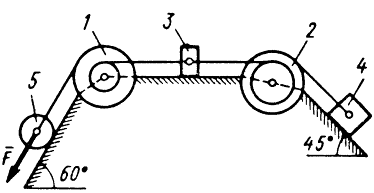


Рис. Д5.6

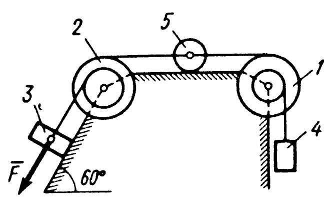


Рис. Д5.7

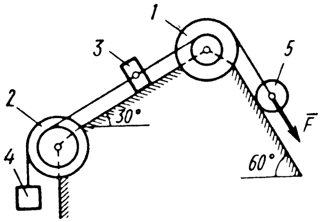


Рис. Д5.8

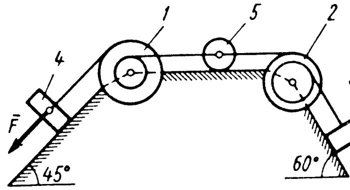


Рис. Д5.9

Таблица Д5

Номер условия	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	M_1	M_2	F	Найти
0	$12P$	0	P	0	$3P$	$0{,}2PR$	0	$8P$	a_3
1	0	$10P$	0	$4P$	$2P$	0	$0{,}3PR$	$6P$	ϵ_2
2	$10P$	0	0	$2P$	P	$0{,}3PR$	0	$4P$	ϵ_1
3	0	$12P$	$2P$	0	$3P$	0	$0{,}2PR$	$10P$	a_3
4	$8P$	$10P$	0	0	$2P$	0	$0{,}3PR$	$5P$	a_{C5}
5	$12P$	0	$2P$	0	P	0	$0{,}4PR$	$8P$	ϵ_1
6	0	$12P$	0	$3P$	$4P$	$0{,}2PR$	0	$6P$	a_4
7	$10P$	$8P$	0	0	$2P$	$0{,}3PR$	0	$5P$	ϵ_2
8	$12P$	0	0	$5P$	$4P$	0	$0{,}2PR$	$6P$	a_4
9	0	$12P$	$2P$	0	$3P$	$0{,}2PR$	0	$10P$	a_{C5}

Кроме сил тяжести на одно из тел системы действует постоянная сила $\bar{F}$, а на шкивы *1* и *2* при их вращении действуют постоянные моменты сил сопротивления, равные соответственно M_1 и M_2.

Составить для данной системы уравнение Лагранжа и определить из него величину, указанную в таблице в столбце "Найти", где обозначено: ϵ_1, ϵ_2 – угловые ускорения шкивов *1* и *2*, a_3, a_4, a_{C5} – ускорения грузов *3*, *4* и центра масс катка *5* соответственно. Когда в задаче надо определить ϵ_1 или ϵ_2, считать $R = 0{,}25$ м.

Тот из грузов *3*, *4*, вес которого равен нулю, на чертеже не изображать. Шкивы *1* и *2* всегда входят в систему.

Указания. Задача Д5 – на применение к изучению движения системы уравнений Лагранжа. В задаче система имеет одну степень свободы, следовательно, ее положение определяется одной обобщенной координатой и для нее должно быть составлено одно уравнение.

За обобщенную координату q принять: в задачах, где требуется определить a_3, a_4 или a_{C5}, – перемещение x соответствующего груза или центра масс C_5 катка *5*; в задачах, где требуется определить ϵ_1 или ϵ_2, – угол поворота φ соответствующего шкива.

Для составления уравнения вычислить сначала кинетическую энергию T системы (как в задаче Д3) и выразить все вошедшие в T скорости через обобщенную скорость, т.е. через $\dot{x}$, если обобщенная координата x, или через $\dot{\varphi}$, если обобщенная координата φ. Затем вычислить обобщенную силу Q. Для этого сообщить системе возможное (малое) перемещение, при котором выбранная координата, т.е. x (или φ), получает положительное приращение δx (или $\delta\varphi$), и вычислить сумму элементарных работ всех сил на этом перемещении; в полученном равенстве надо все другие элементарные перемещения выразить через δx (или через $\delta\varphi$, если обобщенная координата φ) и вынести δx (или $\delta\varphi$) за скобки. Коэффициент при δx (или $\delta\varphi$) и будет обобщенной силой Q (см. еще пример Д5).

Пример Д5. Механическая система состоит из ступенчатого шкива *2* (радиусы ступеней R_2 и r_2), груза *1* и сплошного катка *3*, прикрепленных к концам нитей, намотанных на ступени шкива (рис. Д5). На шкив при его вращении действует момент сил сопротивления M_2. Массу шкива считать равномерно распределенной по внешнему ободу.

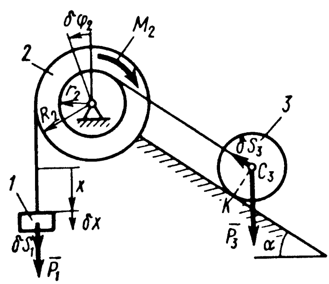


Рис. Д5

Д а н о: $R_2 = R$, $r_2 = 0{,}6R$, $P_1 = 6P$, $P_2 = 3P$, $P_3 = 5P$, $M_2 = 0{,}2PR$, $\alpha = 30°$.

О п р е д е л и т ь: a_1 – ускорение груза *1*.

Решение. 1. Система имеет одну степень свободы. Выберем в качестве обобщенной координаты перемещение x груза *1* ($q = x$), полагая, что груз движется вниз, и, отсчитывая x в сторону движения. Составим уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q. \qquad (1)$$

2. Определим кинетическую энергию T системы, равную сумме энергий всех тел:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \qquad (2)$$

Так как груз *1* движется поступательно, шкив *2* вращается вокруг неподвижной оси, а каток *3* движется плоскопараллельно, то

$$T_1 = \frac{P_1}{2g} v_1^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2, \quad T_3 = \frac{P_3}{2g} v_{C3}^2 + \frac{1}{2} I_{C3} \omega_3^2, \tag{3}$$

где, поскольку масса шкива считается распределенной по внешнему ободу, а каток – сплошной (его радиус обозначим r_3),

$$I_2 = \frac{P_2}{g} R^2, \quad I_{C3} = \frac{1}{2} \frac{P_3}{g} r_3^2. \tag{4}$$

3. Все скорости, входящие в T_1, T_2 и T_3, выразим через обобщенную скорость $\dot{x}$, равную очевидно, v_1. Если при этом учесть, что $v_1 = \omega_2 R_2$, а $v_{C3} = \omega_2 r_2$ и что точка K является для катка *3* мгновенным центром скоростей, то получим:

$$v_1 = \dot{x}, \quad \omega_2 = \frac{v_1}{R} = \frac{\dot{x}}{R}, \quad v_{C3} = \omega_2 r_2 = \frac{r_2}{R} \dot{x},$$

$$\omega_3 = \frac{v_{C3}}{KC_3} = \frac{v_{C3}}{r_3} = \frac{r_2}{r_3 R} \dot{x}. \tag{5}$$

Подставляя значения величин (5) и (4) в равенства (3), а затем значения T_1, T_2, T_3 в равенство (2), найдем окончательно, что

$$T = \frac{1}{2g} \left(P_1 + P_2 + \frac{3}{2} \frac{r_2^2}{R^2} P_3 \right) \dot{x}^2, \text{ или } T = \frac{11{,}7P}{2g} \dot{x}^2. \tag{6}$$

Так как здесь T зависит только от $\dot{x}$, то

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 11{,}7 \frac{P}{g} \dot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \text{ и } \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = 11{,}7 \frac{P}{g} \ddot{x}. \tag{7}$$

4. Найдем обобщенную силу Q. Для этого изобразим силы, совершающие при движении системы работу, т.е. силы $\bar{P}_1$, $\bar{P}_3$ и момент сил сопротивления M_2, направленный против вращения шкива. Затем сообщим системе возможное перемещение, при котором обобщенная координата x получает положительное приращение δx, и покажем перемещения каждого из тел; для груза *1* это будет $\delta s_1 = \delta x$, для шкива *2* – поворот на угол $\delta \varphi_2$, для катка *3* – перемещение δs_3 его центра. После этого вычислим сумму элементарных работ сил и момента на данных перемещениях. Получим

$$\delta A = P_1 \delta s_1 - M_2 \delta \varphi_2 - P_3 \sin \alpha \delta s_3. \tag{8}$$

Все входящие сюда перемещения надо выразить через δx. Учтя, что зависимости между элементарными перемещениями здесь аналогичны зависимостям (5) между соответствующими скоростями, получим

$$\delta s_1 = \delta x, \quad \delta \varphi_2 = \frac{\delta x}{R}, \quad \delta s_3 = r_2 \delta \varphi_2 = \frac{r_2}{R} \delta x. \tag{9}$$

Подставляя эти значения в равенство (8) и вынося δx за скобки, найдем, что

$$\delta A = \left(P_1 - \frac{M_2}{R} - \frac{r_2}{R} P_3 \sin\alpha \right) \delta x. \tag{10}$$

Коэффициент при δx в полученном выражении и будет обобщенной силой Q. Следовательно,

$$Q = P_1 - \frac{M_2}{R} - P_3 \frac{r_2}{R} \sin\alpha \text{ или } Q = 4{,}3P. \tag{11}$$

5. Подставляя найденные величины (7) и (11) в уравнение (1), получим

$$11{,}7 \frac{P}{g} \ddot{x} = 4{,}3P.$$

Отсюда находим искомое ускорение $a_1 = \ddot{x}$.

Ответ: $a_1 = 0{,}37\,g$.

Примечание. Если в ответе получится $a < 0$ (или $\epsilon < 0$), то это означает, что система движется не в ту сторону, куда было предположено. Тогда у момента M_2, направленного против вращения шкива, изменится направление и, следовательно, как видно из равенства (11), изменится величина Q, для которой надо найти новое верное значение.

Задача Д6*

Механическая система состоит из тел *1, 2, 3, 4, 5,* имеющих веса P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 соответственно; тела системы связаны нитями, намотанными на ступенчатые блоки *1* и *2* (рис. Д6.0–Д6.9, табл. Д6). Прочерк в столбцах таблицы, где заданы веса, означает, что соответствующее тело в систему не входит (на чертеже не изображать), а ноль в столбцах таблицы означает, что тело считается невесомым, но в систему входит (на чертеже должно быть изображено). Для колес, обозначенных номером *4*, P_4 – их общий вес (вес платформы такой тележки не учитывается).

Радиусы ступенчатых блоков *1* и *2* равны соответственно: $R_1 = R$, $r_1 = 0{,}8\,R$; $R_2 = R$, $r_2 = 0{,}4\,R$. При вычислении моментов инерции оба блока, колеса и катки считать однородными цилиндрами радиуса R.

На систему кроме сил тяжести действуют сила $\bar{F}$, приложенная к телу *4* или *5* (если тело *5* в систему не входит, сила приложена в точке *B* к тележке), и пары сил с моментами M_1 и M_2, приложенные к блокам:

* Решением кафедры на всех (или некоторых) специальностях в задание по динамике вместо задачи Д5 может быть включена задача Д6, о чем студентов своевременно известить.

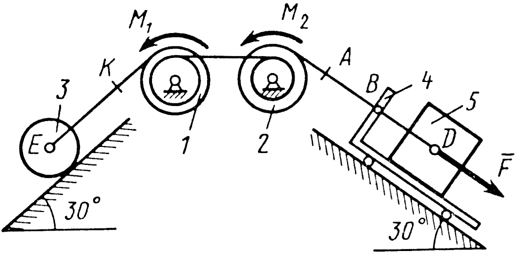


Рис. Д6.0

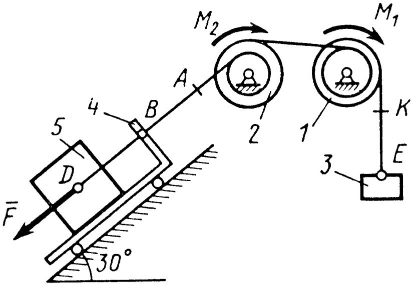


Рис. Д6.1

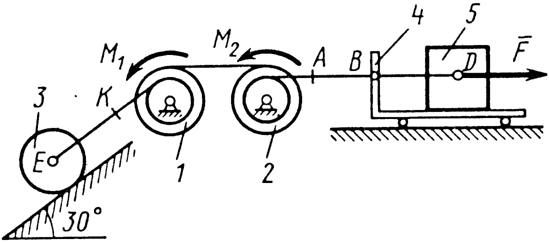


Рис. Д6.2

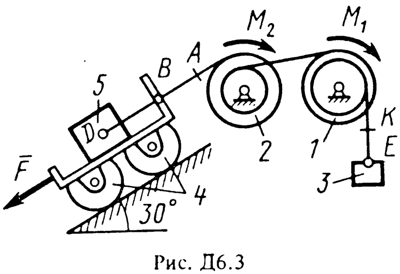


Рис. Д6.3

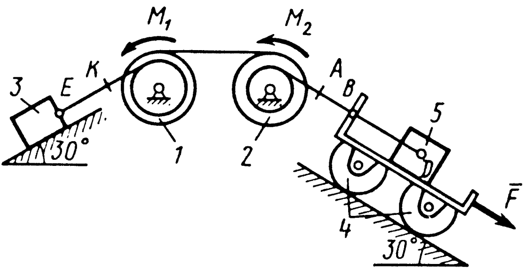


Рис. Д6.4

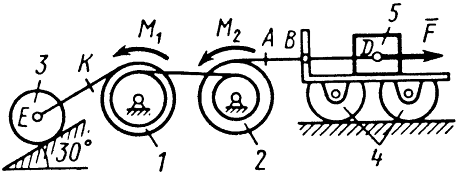


Рис. Д6.5

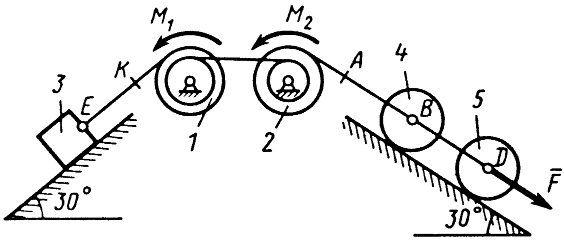


Рис. Д6.6

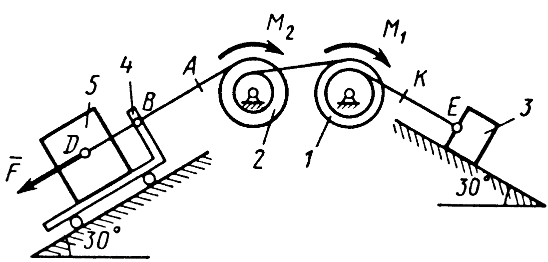


Рис. Д6.7

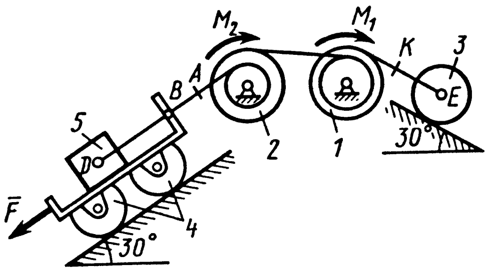


Рис. Д6.8

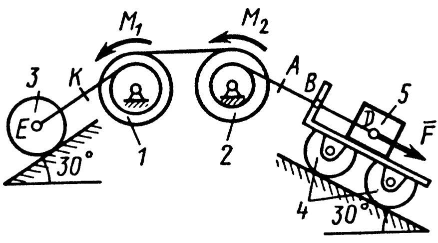


Рис. Д6.9

при $M < 0$ направление момента противоположно показанному на рисунке.

На участке нити, указанном в таблице в столбце "Пружина", включена пружина с коэффициентом жесткости c (например, если в столбце стоит AB, то участок AB является пружиной, если AD то AD пружина, и т.д.); в начальный момент времени пружина не деформирована.

Составить для системы уравнения Лагранжа и определить из них частоту и период колебаний, совершаемых телами системы при ее движении.

Указания. Задача Д6 – на применение к изучению движения системы уравнений Лагранжа. В задаче система имеет две степени свободы; следовательно, ее положение определяется двумя обобщенными координатами q_1 и q_2 и для нее должны быть составлены два уравнения.

Обобщенные координаты можно обозначить $q_1 = x$ и $q_2 = \varphi$ или $q_1 = x$ и $q_2 = y$. При этом за координату x принять удлинение пружины, отсчитываемое в сторону того из тел *3, 4* или *5* системы, к которому пружина прикреплена; например, если пружина прикреплена к телу в точке B и ее длина в произвольный момент времени равна AB, то $x = AB - l_0$, где l_0 – длина недеформированной пружины. За координату φ принять угол

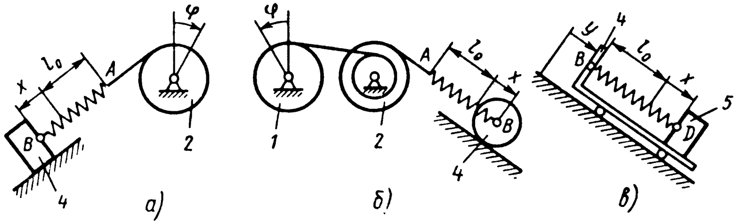


Рис. Д6.10

поворота крайнего блока (этот блок может быть и невесомым), отсчитывая φ от начального положения. Если в систему ни один блок не входит (входят лишь тела *4* и *5*), за координату y принять расстояние тела *4* от начального положения. Соответствующие примеры даны на рис. Д6.10, *а, б, в*.

При таком выборе обобщенных координат искомые частота и период колебаний могут быть найдены из уравнения, определяющего зависимость $x = f(t)$.

Далее для составления уравнений надо вычислить кинетическую энергию T системы (как в задаче Д3) и выразить все вошедшие в T скорости через обобщенные скорости $\dot{x}$ и $\dot{\varphi}$, если за обобщенные координаты приняты x и φ, или через $\dot{x}$ и $\dot{y}$, если этими координатами являются x и y. Затем определяются обобщенные силы так, как это показано ниже в примере Д6, где разъяснен весь ход решения.

Таблица Д6

Номер условия	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	F	M_1	M_2	Пружина
0	P	0	P	–	–	0	0	$-3PR$	*KE*
1	–	$2P$	–	$3P$	–	P	0	0	*AB*
2	$2P$	0	–	P	–	$2P$	0	0	*AB*
3	–	–	–	$3P$	$2P$	P	0	0	*BD*
4	P	–	$2P$	–	–	0	$-3PR$	0	*KE*
5	–	$2P$	–	P	–	0	0	$2PR$	*AB*
6	P	0	–	$2P$	–	0	$2PR$	0	*AB*
7	0	$2P$	P	–	–	0	0	$-2PR$	*KE*
8	0	P	–	$2P$	–	0	$3PR$	0	*AB*
9	–	0	–	$4P$	$3P$	0	0	$4PR$	*BD*

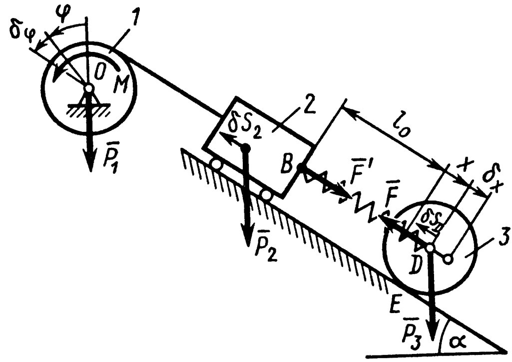


Рис. Д6

Пример Д6. Механическая система (рис. Д6) состоит из барабана *1* радиуса R, к которому приложена пара сил с моментом M, тележки *2* и катка *3* (барабан и каток однородные цилиндры); веса всех тел равны соответственно P_1, P_2, P_3; весом колес тележки пренебрегаем. Тележка соединена с барабаном намотанной на него нитью, а с катком – пружиной BD; коэффициент жесткости пружины равен c. Система начинает движение из состояния покоя; пружина в этот момент не деформирована.

Д а н о: $R, c, P_1 = 2P, P_2 = 4P, P_3 = 2P, M = 4PR, \alpha = 30°$.

О п р е д е л и т ь: частоту k и период τ колебаний, совершаемых телами системы при ее движении.

Решение. 1. Для решения задачи воспользуемся уравнениями Лагранжа. Рассматриваемая система имеет две степени свободы. Выберем в качестве обобщенных координат удлинение пружины x и угол поворота барабана φ ($q_1 = x$, $q_2 = \varphi$). Тогда уравнения Лагранжа будут иметь вид:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_1, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_2. \tag{1}$$

2. Определим кинетическую энергию T системы, равную сумме энергий всех тел:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \tag{2}$$

Так как барабан вращается вокруг неподвижной оси O, тележка движется поступательно, а каток – плоскопараллельно, то

$$T_1 = \frac{1}{2} I_0 \omega_1^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} v_2^2,$$

$$T_3 = \frac{1}{2} \frac{P_3}{g} v_D^2 + \frac{1}{2} I_D \omega_3^2, \tag{3}$$

где $I_0 = (P_1/2g)R^2$, $I_D = (P_3/2g)R_3^2$ (R_3 – радиус катка 3).

Все входящие сюда скорости надо выразить через обобщенные скорости $\dot{x}$ и $\dot{\varphi}$. Очевидно, что $\omega_1 = \dot{\varphi}$, $v_2 = R\omega_1 = R\dot{\varphi}$. Для определения v_D рассмотрим движение катка как сложное. Учитывая, что x определяет положение точки D по отношению к тележке, получим $\bar{v}_D = \bar{v}_D^{от} + \bar{v}_D^{пер}$, где численно $v_D^{от} = \dot{x}$, $v_D^{пер} = v_2 = R\dot{\varphi}$. Тогда принимая во внимание, что при возрастании x и φ скорости $\bar{v}_D^{от}$ и $\bar{v}_D^{пер}$ направлены в разные стороны и что точка E для катка – мгновенный центр скоростей, получим

$$v_D = \dot{x} - R\dot{\varphi}, \quad \omega_3 = \frac{v_D}{ED} = \frac{v_D}{R_3} = \frac{\dot{x} - R\dot{\varphi}}{R_3}.$$

Подставляя все найденные значения скоростей и значения I_0 и I_D в равенства (3), получим следующие выражения для T_1, T_2, T_3.

$$T_1 = \frac{1}{2}\frac{P_1}{2g}R^2\dot{\varphi}^2, \quad T_2 = \frac{P_2}{2g}R^2\dot{\varphi}^2,$$

$$T_3 = \frac{3}{4}\frac{P_3}{g}v_D^2 = \frac{3}{4}\frac{P_3}{g}(\dot{x} - R\dot{\varphi})^2.$$

Тогда равенство (2), если учесть, что $P_1 = P_3 = 2P$, а $P_2 = 4P$, окончательно дает:

$$T = \frac{P}{g}\left(4R^2\dot{\varphi}^2 - 3R\dot{\varphi}\dot{x} + \frac{3}{2}\dot{x}^2\right). \tag{4}$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{P}{g}(-3R\dot{\varphi} + 3\dot{x}), \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{P}{g}(8R^2\dot{\varphi} - 3R\dot{x}), \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0. \tag{5}$$

3. Теперь определим обобщенные силы Q_1 и Q_2. Изображаем действующие на систему активные силы: силы тяжести $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$, силы упругости $\bar{F}$ и $\bar{F}'$, где численно $F = F' = cx$, и пару с моментом M.

а) Для определения Q_1 сообщим системе возможное перемещение, при котором координата x получает приращение $\delta x > 0$, а φ не изменяется, т.е. $\delta\varphi = 0$ (барабан при таком перемещении не поворачивается и тележка не перемещается). Тогда элементарную работу совершат только силы $\bar{P}_3$ и $\bar{F}$; учтя что $P_3 = 2P$, получим для этой работы значение

$$\delta A_1 = P_3 \sin 30° \cdot \delta x - F\delta x = (P - cx)\,\delta x. \tag{6}$$

б) Для определения Q_2 сообщим системе возможное перемещение, при котором координата φ получает приращение $\delta\varphi > 0$, а x не изменяется, т.е. $\delta x = 0$ (пружина при таком перемещении системы не изменяет своей длины). Тогда тележка и центр D катка получат одинаковые перемещения $\delta s_2 = \delta s_D = R\delta\varphi$ и элементарная работа всех действующих сил будет равна

$$\delta A_2 = M\delta\varphi - P_2 \sin 30^\circ \cdot \delta s_2 - P_3 \sin 30^\circ \cdot \delta s_D - F'\delta s_2 + F\delta s_D.$$

Заменяя здесь все величины их значениями, найдем в результате, что

$$\delta A_2 = (M - 0{,}5P_2R - 0{,}5P_3R)\,\delta\varphi = PR\delta\varphi. \tag{7}$$

Коэффициенты при δx и $\delta\varphi$ в равенствах (6) и (7) и будут искомыми обобщенными силами, следовательно

$$Q_1 = P - cx, \qquad Q_2 = PR. \tag{8}$$

Подставляя величины (5) и (8) в уравнения (1), получим следующие дифференциальные уравнения движения системы:

$$\frac{P}{g}\,(-3R^2\ddot{\varphi} + 3\ddot{x}) = P - cx, \quad \frac{P}{g}\,(8R^2\ddot{\varphi} - 3R\ddot{x}) = PR. \tag{9}$$

4. Чтобы определить k и τ, исключим из уравнений (9) $\ddot{\varphi}$. Для этого умножим обе части первого из уравнений на $8g$, а второго – на $3g/R$ и сложим почленно полученные равенства. В результате придем к следующему дифференциальному уравнению свободных колебаний $15P\ddot{x} = 11Pg - 8cgx$ или

$$\ddot{x} + k^2x = \frac{11}{15}\,g, \text{ где } k^2 = \frac{8cg}{15P}\ . \tag{10}$$

Известно, что когда уравнение приведено к виду (10), то k в нем является круговой частотой, а период $\tau = 2\pi/k$. Следовательно искомые величины имеют значения:

$$k = \sqrt{8cg/15P}, \quad \tau = 2\pi/k = 2\pi\sqrt{15P/8cg}.$$

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Людмила Ивановна Котова, Раиса Ивановна Надеева, Семен Михайлович Тарг, Василий Львович Цывильский, Инна Мироновна Шмарова

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические указания и контрольные задания

Зав. редакцией А.В. Дубровский. Редактор О.Г. Подобедова. Художественный редактор Л.К. Громова. Технический редактор Е.В. Фельдман. Корректор Г.А. Чечеткина. Оператор В.А. Фетисова.

Н/К

Изд. № ОТ–695. Сдано в набор 17.02.88. Подп. в печать 13.04.88. Формат 84x108 1/32. Бум. кн.-журн. Гарнитура Пресс-Роман. Печать высокая. Объем 3,36 усл.-печ. л. 3,47 усл.-кр. отт. 3,34 уч.-изд. л. Тираж 110000 экз. Зак. № 1322. Цена 10 коп.

Издательство "Высшая школа" 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14.

Набрано на наборно-пишущих машинах издательства.

Отпечатано в Ярославском полиграфкомбинате "Союзполиграфпрома" при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 150014, Ярославль, ул. Свободы, 97.