

Определитель матрицы. Вычисление определителей Свойства определителей

Пусть дана квадратная матрица второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Определителем или детерминантом второго порядка, соответствующим данной матрице, называется число $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Определитель второго порядка записывается так:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Отметим, что определитель второго порядка равен разности попарных произведений элементов главной и побочной диагоналей.

Задание №1. Вычислить определитель второго порядка:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$

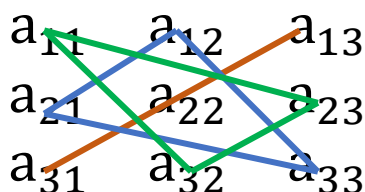
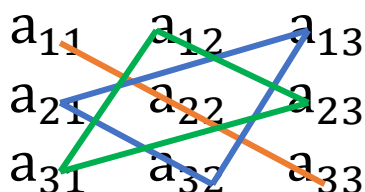
Пусть дана квадратная матрица третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Определителем или детерминантом третьего порядка, соответствующим данной матрице называется число:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

При вычислении определителя третьего порядка удобно пользоваться правилом треугольников (правилом Сарруса). Это правило иллюстрируется на схеме:



Три положительных члена определителя представляют собой произведение главной диагонали ($a_{11}a_{22} a_{33}$) и элементов, находящихся в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны главной диагонали ($a_{12}a_{23} a_{31}$ и $a_{21}a_{32} a_{13}$). Три отрицательных его члена есть произведения элементов побочной диагонали ($a_{13}a_{22}a_{31}$) и элементов находящихся в вершинах равнобедренных треугольников, основания которых параллельны побочной диагонали ($a_{12}a_{21} a_{33}$ и $a_{23}a_{32} a_{11}$).

Задание №2. Вычислить определители третьего порядка:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

Основные свойства определителей

1. Определитель не изменится, если его строки поменять местами с соответствующими столбцами.
2. При перестановки двух строк или столбцов определитель изменит свой знак на противоположный.
3. Общий множитель всех элементов строки (или столбца) можно вынести за знак определителя.
4. Определитель с двумя одинаковыми строками или столбцами равен нулю.
5. Если все элементы двух строк (столбцов) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.
6. Если к какой-либо строке или столбцу определителя прибавить соответствующие элементы другой строки или столбца, умноженные на одно и то же число, то определитель не изменит своей величины.
7. Треугольный определитель, у которого все элементы, лежащие выше (или ниже) главной диагонали, - нули, равен произведению элементов главной диагонали.