

Индивидуальное домашнее задание по теории вероятностей НК Абд-04-23 (весенний семестр).

- 1.** В условиях задачи 13 ИДЗ (осенний семестр) найдите:
 - 1) Математическое ожидание и дисперсию случайных величин ξ и η .
 - 2) Ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин ξ и η
 - 3) Математическое ожидание и дисперсию случайной величины μ , математическое ожидание и ковариацию случайных величин μ_1 и μ_2
- 2.** В условиях задачи 15 ИДЗ (осенний семестр) найдите
 - 1) Математическое ожидание и дисперсию случайных величин ξ и η .
 - 2) Ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин ξ и η .
 - 3) Математическое ожидание случайной величины μ .
- 3.** В условиях задачи 13 ИДЗ (осенний семестр) найдите:
 - 1) условное математическое ожидание с.в. ξ при условии η ;
 - 2) условное математическое ожидание с.в. η при условии ξ ;
- 4.** В условиях задачи 15 ИДЗ (осенний семестр) найдите условное математическое ожидание с.в. η при условии ξ и условное математическое ожидание с.в. ξ при условии η .
- 5.** Выполните следующие задания:
 - 1) По заданным плотностям $p_\xi(x)$ и $p_\eta(y)$ найдите характеристические функции $f_\xi(t)$ и $f_\eta(t)$ случайных величин ξ и η ; характеристическую функцию $f_\mu(t)$ случайной величины $\mu = \xi + \eta$
 - 2) По заданной характеристической функции $f_\xi(t)$ вычислите математическое ожидание случайной величины ξ и дисперсию случайной величины ξ .
- 6.** Посетитель тира платит a рублей за выстрел. При попадании в девятку получает выигрыш b рублей, при попадании в десятку получает выигрыш c рублей. Если стрелок не попадает ни в девятку, ни в десятку, то деньги ему не выплачиваются. Вероятности попадания в девятку, десятку и промаха равны p_1, p_2 и p_3 соответственно. Число посетителей равно n .

С помощью **неравенства Чебышева**:

 - 1) найдите границы, в которых будет лежать суммарная прибыль владельца тира с вероятностью не менее α ;
 - 2) найдите число посетителей тира, чтобы вероятность отклонения суммарной прибыли от среднего размера суммарной прибыли на величину не меньше β % (от средней суммарной прибыли) равнялась p

С помощью **центральной предельной теоремы** оцените вероятность того, что

 - 1) размер убытка у владельца тира будет лежать в пределах от m_1 до m_2 рублей;
 - 2) что суммарная прибыль окажется в пределах от n_1 до n_2 рублей.
- 7.** Статистический анализ, проведенный по заказу авиакомпании, показал, что распределение веса (в кг) пассажира авиарейса с грузом хорошо описывается плотностью распределения
$$p(x) = Ax^3(150-x), \quad x \in (0; 150).$$
Грузоподъемность самолета составляет 30 тонн. При посадке зарегистрировано n пассажиров.
 - 1) Какой коммерческий груз (в кг) можно дополнительно взять этим рейсом, чтобы вероятность перегрузки составила не более α %.
 - 2) Найдите вероятность перегрузки, если дополнительный коммерческий груз составил m тонн.
- 8.** По заданным выборкам X_1, X_2, \dots, X_n и Y_1, Y_2, \dots, Y_n объема $n = 50$ найти и построить:
 - 1) минимальный и максимальный элементы выборки, разброс выборки, статистический ряд;
 - 2) гистограмму, полигон относительных частот – для обеих выборок, эмпирическую функцию распределения (только для выборки X_1, X_2, \dots, X_n);
 - 3) выборочные характеристики: среднее, дисперсию (смещенную и несмещенную) (по выборке и по статистическому ряду), медиану.
- 9.** Известно, что выборка X_1, X_2, \dots, X_n подчиняется теоретическому распределению с заданную плотностью $p_\xi(x)$ с неизвестным параметром. Найдите оценку неизвестного параметра методом моментов.
- 10.** а) Известно, что выборка X_1, X_2, \dots, X_n подчиняется теоретическому распределению с заданную плотностью

$$p(x) = \begin{cases} 2\sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-\left(x\sqrt{a}-\frac{\sqrt{b}}{x}\right)^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

с неизвестными параметрами (a, b) .

б) Известно, что выборка Y_1, Y_2, \dots, Y_n подчиняется теоретическому распределению с заданной плотностью

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a\pi x^2}} e^{-\frac{(\ln x - b)^2}{2a}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

с неизвестными параметрами (a, b) .

Найдите оценку максимального правдоподобия этих параметров

11. Известно, что выборка X_1, X_2, \dots, X_n подчиняется теоретическому распределению с неизвестным параметром. При помощи метода максимального правдоподобия (ММП) найти оценку неизвестного параметра распределения, проверить полученную оценку на несмещённость и эффективность.

12. С помощью критерия отношения правдоподобия проверьте:

- 1) гипотезы H_0 и H_1 о принадлежности выборки X_1, X_2, \dots, X_n дискретному распределению с заданными параметрами.
- 2) гипотезы H_0 и H_1 о принадлежности выборки Y_1, Y_2, \dots, Y_n непрерывному распределению с заданными параметрами.

13. С помощью критерия χ^2 проверьте:

- 1) гипотезу о принадлежности выборки X_1, X_2, \dots, X_n к заданному дискретному распределению (с помощью метода моментов найдите параметры распределения).
- 2) гипотезу о принадлежности выборки Y_1, Y_2, \dots, Y_n заданному непрерывному распределению (с помощью метода моментов найдите параметры распределения).

Распределение баллов (15 баллов)

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Задача 7
1,5 балла	1,5 балла	1 балл	1 балл	2 балла	1,5 балла	1,5 балла

Задача 8	Задача 9	Задача 10	Задача 11	Задача 12	Задача 13
1 балл	1 балл	2 балла	1 балл	2 балла	3 балла

5.

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad p_{\eta}(y) = \begin{cases} \ln 4 \cdot 4^{-y}, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0, \end{cases}$$

$$f_{\xi}(t) = \frac{16}{(2-it)^2(t^2+4)}$$

6.

$$a = 150, b = 400, c = 600, \quad p_1 = 0,2, p_2 = 0,1, p_3 = 0,7, \quad n = 500,$$

$$\alpha = 0,7, \quad \beta = 15, \quad p = 0.15$$

$$m_1 = 0, \quad m_2 = 600, \quad n_1 = 3000, \quad n_2 = 6000.$$

7.

$$n = 420, \alpha = 0,3, \quad m = 50$$

8.

Выборка X_1, \dots, X_n

[1,]	8	1	1	2	10	7	5	1	2	0
[2,]	3	7	2	1	9	0	0	12	2	5
[3,]	1	0	0	1	6	1	0	2	0	1
[4,]	0	5	1	0	1	0	7	5	0	1
[5,]	6	7	1	2	2	1	16	0	3	2

Выборка Y_1, \dots, Y_n

[1,]	4.15	3.39	0.37	2.02	2.11	0.48	10.72	0.63	2.68	0.04
[2,]	0.43	4.65	1.01	4.58	0.22	3.29	2.15	4.33	0.36	1.61
[3,]	7.55	0.60	0.98	0.70	5.55	3.72	2.68	4.16	4.51	0.38
[4,]	6.42	0.17	0.86	1.59	1.02	0.67	5.22	0.07	4.14	1.11
[5,]	1.86	1.10	1.18	0.79	0.08	5.84	0.20	0.09	7.39	4.31

9.

Выборка X_1, \dots, X_n – имеет плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} p\lambda_1^2 x e^{-\lambda_1 x} + (1-p)\lambda_2^2 x e^{-\lambda_2 x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

При заданных значениях параметров $\lambda_1 = 0.7$ и $\lambda_2 = 2$ найти оценку параметра p . Таблица частот

интервалы	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10
частоты	251	226	133	84	44	26	13	11	7	5

10.

По заданной таблице частот найти оценку ММП параметров a и b

интервалы	0.8-1.6	1.6-2.4	2.4-3.2	3.2-4.0	4.0-4.8	4.8-5.6	5.6-8.4
частоты	9	111	164	82	20	9	5

По заданной таблице частот найти оценку ММП параметров a и b

интервалы	3.0-4.4	4.4-5.8	5.8-7.2	7.2-8.6	8.6-10.0	10.0-11.4	11.4-12.8	12.8-14.2	14.2-15.6	15.6-17.0
частоты	12	82	142	127	82	38	12	4	0	1

11.

Экспоненциальное распределение $Exp(\lambda)$

[1,]	0.03	2.17	0.85	3.27	1.29	2.22	0.02	0.29	0.10	0.31
[2,]	1.84	4.66	2.23	0.14	0.69	0.34	5.59	1.50	6.06	0.49
[3,]	1.50	1.46	2.63	5.14	1.59	3.84	4.71	4.58	0.18	4.03
[4,]	3.15	2.58	0.83	3.49	2.79	0.33	1.33	0.14	2.37	7.45
[5,]	0.46	1.34	1.35	0.59	2.80	1.94	1.04	0.57	0.29	1.19

При помощи ММП найти оценку параметра математического ожидания и проверить эту оценку на несмещённость и эффективность

12.

Гипотеза H_0 --- Биномиальное распределение $Binom(k = 25, p = 0.6)$ Гипотеза H_1 --- Биномиальное распределение $Binom(k = 25, p = 0.5), \alpha = 0.035$

[1,]	8	12	13	17	12	14	18	13	13	12
[2,]	12	12	16	13	9	11	14	13	14	12
[3,]	12	11	15	11	8	14	13	11	16	8
[4,]	15	12	12	11	9	11	11	7	12	19
[5,]	11	15	14	11	12	13	16	12	14	11

	<p>Гипотеза H_0 --- экспоненциальное распределение $Exp(\lambda = 0.4)$</p> <p>Гипотеза H_1 --- экспоненциальное распределение $Exp(\lambda = 0.3), \alpha = 0.023$</p> <p>[1,] 1.89 0.24 5.06 2.34 0.02 0.55 2.32 0.50 5.82 2.84</p> <p>[2,] 1.40 1.64 0.01 1.52 1.54 6.51 1.45 1.97 0.73 0.09</p> <p>[3,] 4.35 2.80 6.10 0.89 0.20 1.08 3.52 0.29 8.35 0.28</p> <p>[4,] 1.71 2.88 2.23 0.67 2.06 6.81 0.22 3.41 2.52 3.39</p> <p>[5,] 1.50 2.74 1.76 2.50 2.01 3.24 0.94 6.81 0.45 9.11</p>
13.	<p>Геометрическое распределение с неизвестным параметром $p, \alpha = 0.1$</p> <p>[1,] 8 1 1 2 10 7 5 1 2 0</p> <p>[2,] 3 7 2 1 9 0 0 12 2 5</p> <p>[3,] 1 0 0 1 6 1 0 2 0 1</p> <p>[4,] 0 5 1 0 1 0 7 5 0 1</p> <p>[5,] 6 7 1 2 2 1 16 0 3 2</p>
	<p>Гамма-распределение с параметрами γ и $\lambda, \alpha = 0.05$</p> <p>[1,] 4.15 3.39 0.37 2.02 2.11 0.48 10.72 0.63 2.68 0.04</p> <p>[2,] 0.43 4.65 1.01 4.58 0.22 3.29 2.15 4.33 0.36 1.61</p> <p>[3,] 7.55 0.60 0.98 0.70 5.55 3.72 2.68 4.16 4.51 0.38</p> <p>[4,] 6.42 0.17 0.86 1.59 1.02 0.67 5.22 0.07 4.14 1.11</p> <p>[5,] 1.86 1.10 1.18 0.79 0.08 5.84 0.20 0.09 7.39 4.31</p>