

1. В условиях задачи 13 ИДЗ (осенний семестр) найдите:
  - 1) Математическое ожидание и дисперсию случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ .
  - 2) Ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ .
  - 3) Математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $\mu$ , математическое ожидание и ковариацию случайных величин  $\mu_1$  и  $\mu_2$ .
2. В условиях задачи 15 ИДЗ (осенний семестр) найдите:
  - 1) Математическое ожидание и дисперсию случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ .
  - 2) Ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ .
  - 3) Математическое ожидание случайной величины  $\mu$ .
3. В условиях задачи 13 ИДЗ (осенний семестр) найдите:
  - 1) условное математическое ожидание с.в.  $\xi$  при условии  $\eta$ ;
  - 2) условное математическое ожидание с.в.  $\eta$  при условии  $\xi$ ;
4. В условиях задачи 15 ИДЗ (осенний семестр) найдите условное математическое ожидание с.в.  $\eta$  при условии  $\xi$  и условное математическое ожидание с.в.  $\xi$  при условии  $\eta$ .
5. Выполните следующие задания:
  - 1) По заданным плотностям  $p_\xi(x)$  и  $p_\eta(y)$  найдите характеристические функции  $f_\xi(t)$  и  $f_\eta(t)$  случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ ; характеристическую функцию  $f_\mu(t)$  случайной величины  $\mu = \xi + \eta$
  - 2) По заданной характеристической функции  $f_\xi(t)$  вычислите математическое ожидание случайной величины  $\xi$  и дисперсию случайной величины  $\xi$ .
6. Посетитель тира платит  $a$  рублей за выстрел. При попадании в девятку получает выигрыш  $b$  рублей, при попадании в десятку получает выигрыш  $c$  рублей. Если стрелок не попадает ни в девятку, ни в десятку, то деньги ему не выплачиваются. Вероятности попадания в девятку, десятку и промаха равны  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_3$  соответственно. Число посетителей равно  $n$ .  
С помощью **неравенства Чебышева**:
  - 1) найдите границы, в которых будет лежать суммарная прибыль владельца тира с вероятностью не менее  $\alpha$ ;
  - 2) найдите число посетителей тира, чтобы вероятность отклонения суммарной прибыли от среднего размера суммарной прибыли на величину не меньше  $\beta$  % (от средней суммарной прибыли) равнялась  $p$С помощью **центральной предельной теоремы** оцените вероятность того, что
  - 1) размер убытка у владельца тира будет лежать в пределах от  $m_1$  до  $m_2$  рублей;
  - 2) что суммарная прибыль окажется в пределах от  $n_1$  до  $n_2$  рублей.
7. Статистический анализ, проведенный по заказу авиакомпании, показал, что распределение веса (в кг) пассажира авиарейса с грузом хорошо описывается плотностью распределения
$$p(x) = Ax^3(150 - x), \quad x \in (0; 150).$$
Грузоподъемность самолета составляет 30 тонн. При посадке зарегистрировано  $n$  пассажиров.
  - 1) Какой коммерческий груз (в кг) можно дополнительно взять этим рейсом, чтобы вероятность перегрузки составила не более  $\alpha$ %.
  - 2) Найдите вероятность перегрузки, если дополнительный коммерческий груз составил  $m$  тонн.
8. По заданным выборкам  $X_1, X_2, \dots, X_n$  и  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  объема  $n = 50$  найти и построить:
  - 1) минимальный и максимальный элементы выборки, разброс выборки, статистический ряд;
  - 2) гистограмму, полигон относительных частот – для обеих выборок, эмпирическую функцию распределения (только для выборки  $X_1, X_2, \dots, X_n$ );
  - 3) выборочные характеристики: среднее, дисперсию (смещенную и несмещенную) (по выборке и по статистическому ряду), медиану.
9. Известно, что выборка  $X_1, X_2, \dots, X_n$  подчиняется теоретическому распределению с заданной плотностью  $p_\xi(x)$  с неизвестным параметром. Найдите оценку неизвестного параметра методом моментов.
10. а) Известно, что выборка  $X_1, X_2, \dots, X_n$  подчиняется теоретическому распределению с заданной плотностью

$$p(x) = \begin{cases} 2\sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-\left(x\sqrt{a}-\frac{\sqrt{b}}{x}\right)^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

с неизвестными параметрами  $(a, b)$ .

б) Известно, что выборка  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  подчиняется теоретическому распределению с заданной плотностью

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a\pi x^2}} e^{-\frac{(\ln x - b)^2}{2a}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

с неизвестными параметрами  $(a, b)$ .

Найдите оценку максимального правдоподобия этих параметров

**11.** Известно, что выборка  $X_1, X_2, \dots, X_n$  подчиняется теоретическому распределению с неизвестным параметром. При помощи метода максимального правдоподобия (ММП) найти оценку неизвестного параметра распределения, проверить полученную оценку на несмещённость и эффективность.

**12.** С помощью критерия отношения правдоподобия проверьте:

- 1) гипотезы  $H_0$  и  $H_1$  о принадлежности выборки  $X_1, X_2, \dots, X_n$  дискретному распределению с заданными параметрами.
- 2) гипотезы  $H_0$  и  $H_1$  о принадлежности выборки  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  непрерывному распределению с заданными параметрами.

**13.** С помощью критерия  $\chi^2$  проверьте:

- 1) гипотезу о принадлежности выборки  $X_1, X_2, \dots, X_n$  к заданному дискретному распределению (с помощью метода моментов найдите параметры распределения).
- 2) гипотезу о принадлежности выборки  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  заданному непрерывному распределению (с помощью метода моментов найдите параметры распределения).

#### Распределение баллов (15 баллов)

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Задача 7
1, 5 балла	1,5 балла	1 балл	1 балл	2 балла	1,5 балла	1,5 балла

Задача 8	Задача 9	Задача 10	Задача 11	Задача 12	Задача 13
1 балл	1 балл	2 балла	1 балл	2 балла	3 балла

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}(x+2), & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & x < 0, \quad x > 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad p_{\eta}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos y, & -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & y > \pi/2, \quad y < -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$f_{\xi}(t) = \frac{e^{-3it-2}}{e^{2t^2} \cdot e^{-2e^{it}}}$$

$$a = 150, b = 200, c = 500, p_1 = 0,25, p_2 = 0,15, p_3 = 0,6, n = 300, \\ \alpha = 0,8, \quad \beta = 20, p = 0,034, \quad m_1 = 0, \quad m_2 = 2000, \quad n_1 = 5000, \quad n_2 = 10000$$

$$n = 255, \quad \alpha = 0,1, \quad m = 8$$

Выборка  $X_1, \dots, X_n$

[1,]	0	4	0	0	0	0	3	3	1	2
[2,]	1	4	6	0	6	0	6	0	2	3
[3,]	1	0	1	2	2	2	2	6	0	0
[4,]	6	1	8	0	3	1	2	0	0	2
[5,]	1	9	1	5	1	0	2	3	2	2

Выборка  $Y_1, \dots, Y_n$

[1,]	2.30	4.02	3.98	1.03	3.73	0.34	4.50	1.73	6.34	11.21
[2,]	1.82	1.40	1.19	3.54	7.51	0.21	2.70	14.31	1.20	3.15
[3,]	1.71	1.85	3.36	6.14	3.24	0.07	7.99	1.07	0.08	0.57
[4,]	2.33	0.57	2.54	0.24	2.80	8.43	0.51	2.01	3.77	0.13
[5,]	0.49	5.93	5.11	5.52	4.02	3.78	1.73	1.40	1.50	0.37

Выборка  $X_1, \dots, X_n$  — имеет плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} p\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + (1-p)\lambda_2^2 x e^{-\lambda_2 x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

При заданных значениях параметров  $\lambda_1 = 2$  и  $\lambda_2 = 0,8$  найти оценку параметра  $p$ .

Таблица частот

интер- валы	0- 0.5	0.5- 1	1- 1.5	1.5- 2	2- 2.5	2.5- 3	3- 3.5	3.5- 4	4- 4.5	4.5-5
частоты	253	104	49	27	19	13	10	8	6	5

По заданной таблице частот найти оценку ММП параметров  $a$  и  $b$

интер- валы	0.6- 1.6	1.6- 2.6	2.6- 3.6	3.6- 4.6	4.6- 5.6	5.6- 6.6	6.6- 7.6
частоты	178	408	266	108	31	6	3

По заданной таблице частот найти оценку ММП параметров  $a$  и  $b$

интер- валы	3.0- 4.0	4.0- 5.0	5.0- 6.0	6.0- 7.0	7.0- 8.0	8.0- 9.0	9.0- 10.0	10.0- 11.0	11.0- 12.0	12.0- 13.0
частоты	1	14	55	125	138	83	49	23	10	2

Гамма распределение  $\text{Gamma}(\gamma = 1, \lambda)$

[1,]	0.53	1.81	1.06	1.61	1.02	1.44	2.99	0.45	1.91	3.03
[2,]	2.51	0.31	2.06	1.15	0.48	3.67	1.96	5.33	3.59	3.87
[3,]	0.76	0.20	4.50	0.81	3.49	1.42	3.25	4.23	1.25	1.37
[4,]	0.76	4.15	2.37	3.41	5.70	0.11	2.89	0.69	4.35	0.88
[5,]	0.22	1.57	0.44	4.22	3.85	0.07	2.95	5.19	2.59	1.52

При помощи ММП найти оценку параметра  $1/\lambda$  и проверить эту оценку на несмещённость и эффективность.

Гипотеза  $H_0$  --- распределение Пуассона  $\text{Pois}(\lambda = 13)$

Гипотеза  $H_1$  --- распределение Пуассона  $\text{Pois}(\lambda = 14), \alpha = 0.023$

[1,]	20	10	13	15	17	13	14	8	15	16
[2,]	15	13	14	14	16	6	13	14	10	10
[3,]	13	18	18	14	14	9	8	10	12	15
[4,]	7	12	8	8	16	13	13	20	12	6
[5,]	11	11	10	17	13	9	12	14	20	12

Гипотеза  $H_0$  --- гамма распределение  $\text{Gamma}(\lambda = 0.4, \gamma = 4)$

Гипотеза  $H_1$  --- гамма распределение  $\text{Gamma}(\lambda = 0.5, \gamma = 4), \alpha = 0.088$

[1,]	9.15	8.22	16.66	8.59	4.10	9.54	9.80	21.70	11.12	4.88
[2,]	9.84	10.64	6.06	11.25	8.93	11.04	10.57	27.13	13.83	13.61
[3,]	10.89	6.55	7.27	18.30	4.56	6.25	13.49	5.51	9.43	20.39
[4,]	11.55	16.65	6.76	4.69	10.95	7.10	10.70	10.10	18.34	6.62
[5,]	9.03	8.29	4.97	13.85	9.60	6.18	8.08	6.55	15.94	12.21

13.	Геометрическое распределение с неизвестным параметром $p$ , $\alpha = 0.05$											
	[1,]	0	4	0	0	0	0	3	3	1	2	
	[2,]	1	4	6	0	6	0	6	0	2	3	
	[3,]	1	0	1	2	2	2	2	6	0	0	
	[4,]	6	1	8	0	3	1	2	0	0	2	
	[5,]	1	9	1	5	1	0	2	3	2	2	
	Гамма-распределение с неизвестными параметрами $\gamma$ и $\lambda$ , $\alpha = 0.05$											
	[1,]	2.30	4.02	3.98	1.03	3.73	0.34	4.50	1.73	6.34	11.21	
	[2,]	1.82	1.40	1.19	3.54	7.51	0.21	2.70	14.31	1.20	3.15	
	[3,]	1.71	1.85	3.36	6.14	3.24	0.07	7.99	1.07	0.08	0.57	
	[4,]	2.33	0.57	2.54	0.24	2.80	8.43	0.51	2.01	3.77	0.13	
	[5,]	0.49	5.93	5.11	5.52	4.02	3.78	1.73	1.40	1.50	0.37	