Индивидуальное домашнее задание по теории вероятностей НК Абд-01-23 (весенний семестр).

- 1.** В условиях задачи 13 ИДЗ (осенний семестр) найдите:
 - 1) Математическое ожидание и дисперсию случайных величин ξ и η .
 - 2) Ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин ξ и η
 - 3) Математическое ожидание и дисперсию случайной величины μ , математическое ожидание и ковариацию случайных величин μ_1 и μ_2
- 2.** В условиях задачи 15 ИДЗ (осенний семестр) найдите:
 - 1) Математическое ожидание и дисперсию случайных величин ξ и η .
 - 2) Ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин ξ и η .
 - 3) Математическое ожидание случайной величины μ .
- 3.** В условиях задачи 13 ИДЗ (осенний семестр) найдите:
 - 1) условное математическое ожидание с.в. ξ при условии η ;
 - 2) условное математическое ожидание с.в. η при условии ξ ;
- 4.** В условиях задачи 15 ИДЗ (осенний семестр) найдите условное математическое ожидание с.в. η при условии ξ и условное математическое ожидание с.в. ξ при условии η .
- 5.** Выполните следующие задания:
 - 1) По заданным плотностям $p_\xi(x)$ и $p_\eta(y)$ найдите характеристические функции $f_\xi(t)$ и $f_\eta(t)$ случайных величин ξ и η ; характеристическую функцию $f_\mu(t)$ случайной величины $\mu = \xi + \eta$
 - 2) По заданной характеристической функции $f_\xi(t)$ вычислите математическое ожидание случайной величины ξ и дисперсию случайной величины ξ .
- 6.** Посетитель тира платит a рублей за выстрел. При попадании в девятку получает выигрыш b рублей, при попадании в десятку получает выигрыш c рублей. Если стрелок не попадает ни в девятку, ни в десятку, то деньги ему не выплачиваются. Вероятности попадания в девятку, десятку и промаха равны p_1, p_2 и p_3 соответственно. Число посетителей равно n .
С помощью **неравенства Чебышева**:
 - 1) найдите границы, в которых будет лежать суммарная прибыль владельца тира с вероятностью не менее α ;
 - 2) найдите число посетителей тира, чтобы вероятность отклонения суммарной прибыли от среднего размера суммарной прибыли на величину не меньше β % (от средней суммарной прибыли) равнялась pС помощью **центральной предельной теоремы** оцените вероятность того, что
 - 1) размер убытка у владельца тира будет лежать в пределах от m_1 до m_2 рублей;
 - 2) что суммарная прибыль окажется в пределах от n_1 до n_2 рублей.
- 7.** Статистический анализ, проведенный по заказу авиакомпании, показал, что распределение веса (в кг) пассажира авиарейса с грузом хорошо описывается плотностью распределения
$$p(x) = Ax^3(150-x), \quad x \in (0; 150).$$
Грузоподъемность самолета составляет 30 тонн. При посадке зарегистрировано n пассажиров.
 - 1) Какой коммерческий груз (в кг) можно дополнительно везти этим рейсом, чтобы вероятность перегрузки составила не более α %.
 - 2) Найдите вероятность перегрузки, если дополнительный коммерческий груз составил m тонн.
- 8.** По заданным выборкам $X_1, X_2, \dots, X_n$ и $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ объема $n = 50$ найти и построить:
 - 1) минимальный и максимальный элементы выборки, разброс выборки, статистический ряд;
 - 2) гистограмму, полигон относительных частот – для обеих выборок, эмпирическую функцию распределения (только для выборки $X_1, X_2, \dots, X_n$);
 - 3) выборочные характеристики: среднее, дисперсию (смещенную и несмещенную) (по выборке и по статистическому ряду), медиану.
- 9.** Известно, что выборка $X_1, X_2, \dots, X_n$ подчиняется теоретическому распределению с заданную плотностью $p_\xi(x)$ с неизвестным параметром. Найдите оценку неизвестного параметра методом моментов.
- 10.** а) Известно, что выборка $X_1, X_2, \dots, X_n$ подчиняется теоретическому распределению с заданную плотностью

$$p(x) = \begin{cases} 2\sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-\left(x\sqrt{a}-\frac{\sqrt{b}}{x}\right)^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

с неизвестными параметрами (a, b) .

б) Известно, что выборка $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ подчиняется теоретическому распределению с заданной плотностью

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a\pi x^2}} e^{-\frac{(\ln x - b)^2}{2a}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

с неизвестными параметрами (a, b) .

Найдите оценку максимального правдоподобия этих параметров

11. Известно, что выборка $X_1, X_2, \dots, X_n$ подчиняется теоретическому распределению с неизвестным параметром. При помощи метода максимального правдоподобия (ММП) найти оценку неизвестного параметра распределения, проверить полученную оценку на несмещённость и эффективность.

12. С помощью критерия отношения правдоподобия проверьте:

- 1) гипотезы H_0 и H_1 о принадлежности выборки $X_1, X_2, \dots, X_n$ дискретному распределению с заданными параметрами.
- 2) гипотезы H_0 и H_1 о принадлежности выборки $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ непрерывному распределению с заданными параметрами.

13. С помощью критерия χ^2 проверьте:

- 1) гипотезу о принадлежности выборки $X_1, X_2, \dots, X_n$ к заданному дискретному распределению (с помощью метода моментов найдите параметры распределения).
- 2) гипотезу о принадлежности выборки $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ заданному непрерывному распределению (с помощью метода моментов найдите параметры распределения).

Распределение баллов (15 баллов)

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Задача 7
1,5 балла	1,5 балла	1 балл	1 балл	2 балла	1,5 балла	1,5 балла

Задача 8	Задача 9	Задача 10	Задача 11	Задача 12	Задача 13
1 балл	1 балл	2 балла	1 балл	2 балла	3 балла

15.	5.	$p_{\xi}(x) = \begin{cases} 2\cos 2x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ 0, & x < 0, \quad x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$ и $p_{\eta}(y) = \begin{cases} \frac{2}{21}(3+y), & -1 \leq y \leq 2 \\ 0, & y < -1, \quad y > 2 \end{cases}$																																					
		$f(t) = \frac{e^{2it+3}}{e^{3e^{it}+2t^2}}$																																					
	6.	$a = 130, b = 400, c = 800, p_1 = 0,15, p_2 = 0,05, p_3 = 0,8, n = 500,$ $\alpha = 0,85, \quad \beta = 30, p = 0.035, \quad m_1 = 0, \quad m_2 = 1500, \quad n_1 = 3000, \quad n_2 = 6000.$																																					
	7.	$n = 195, \alpha = 0,1, \quad m = 13.$																																					
	8.	Выборка $X_1, \dots, X_n$ [1,] 0 4 0 0 0 0 3 3 1 2 [2,] 1 4 6 0 6 0 6 0 2 3 [3,] 1 0 1 2 2 2 2 6 0 0 [4,] 6 1 8 0 3 1 2 0 0 2 [5,] 1 9 1 5 1 0 2 3 2 2 Выборка $Y_1, \dots, Y_n$ [1,] 5.32 4.25 1.32 1.40 4.70 1.64 2.69 0.92 0.05 3.33 [2,] 1.80 2.56 0.43 1.77 2.67 1.58 4.64 0.26 0.50 1.82 [3,] 3.13 0.18 1.60 1.74 5.68 0.19 0.11 1.07 0.81 5.30 [4,] 0.31 0.31 5.75 1.71 1.58 3.45 0.37 0.44 2.55 6.59 [5,] 3.03 1.40 2.03 1.80 2.25 1.76 0.06 1.66 0.00 6.59																																					
9.	Выборка $X_1, \dots, X_n$ – имеет плотность распределения $f(x) = \begin{cases} p\lambda e^{-\lambda x} + \frac{1-p}{a}, & x \in (0; a) \\ p\lambda e^{-\lambda x}, & x \in (a; +\infty) \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ При заданных значениях параметров $\lambda = 0.7$ и $a = 3$ найти оценку параметра p . Таблица частот <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>интер-валы</td> <td>0-0.8</td> <td>0.8-1.6</td> <td>1.6-2.4</td> <td>2.4-3.2</td> <td>3.2-4</td> <td>4-4.8</td> <td>4.8-5.6</td> <td>5.6-6.4</td> <td>6.4-7.2</td> <td>7.2-8</td> </tr> <tr> <td>частоты</td> <td>175</td> <td>148</td> <td>118</td> <td>88</td> <td>26</td> <td>17</td> <td>11</td> <td>10</td> <td>7</td> <td>5</td> </tr> </table>	интер-валы	0-0.8	0.8-1.6	1.6-2.4	2.4-3.2	3.2-4	4-4.8	4.8-5.6	5.6-6.4	6.4-7.2	7.2-8	частоты	175	148	118	88	26	17	11	10	7	5																
интер-валы	0-0.8	0.8-1.6	1.6-2.4	2.4-3.2	3.2-4	4-4.8	4.8-5.6	5.6-6.4	6.4-7.2	7.2-8																													
частоты	175	148	118	88	26	17	11	10	7	5																													
10.	По заданной таблице частот найти оценку ММП параметров a и b <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>интер-валы</td> <td>1.1-1.7</td> <td>1.7-2.3</td> <td>2.3-2.9</td> <td>2.9-3.5</td> <td>3.5-4.1</td> <td>4.1-4.7</td> <td>4.7-5.3</td> </tr> <tr> <td>частоты</td> <td>36</td> <td>197</td> <td>182</td> <td>117</td> <td>39</td> <td>23</td> <td>6</td> </tr> </table> По заданной таблице частот найти оценку ММП параметров a и b <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>интер-валы</td> <td>0.0-0.5</td> <td>0.5-1.0</td> <td>1.0-1.5</td> <td>1.5-2.0</td> <td>2.0-2.5</td> <td>2.5-3.0</td> <td>3.0-3.5</td> <td>3.5-4.0</td> <td>4.0-4.5</td> <td>4.5-5.0</td> </tr> <tr> <td>частоты</td> <td>26</td> <td>73</td> <td>38</td> <td>27</td> <td>24</td> <td>6</td> <td>3</td> <td>1</td> <td>0</td> <td>2</td> </tr> </table>	интер-валы	1.1-1.7	1.7-2.3	2.3-2.9	2.9-3.5	3.5-4.1	4.1-4.7	4.7-5.3	частоты	36	197	182	117	39	23	6	интер-валы	0.0-0.5	0.5-1.0	1.0-1.5	1.5-2.0	2.0-2.5	2.5-3.0	3.0-3.5	3.5-4.0	4.0-4.5	4.5-5.0	частоты	26	73	38	27	24	6	3	1	0	2
интер-валы	1.1-1.7	1.7-2.3	2.3-2.9	2.9-3.5	3.5-4.1	4.1-4.7	4.7-5.3																																
частоты	36	197	182	117	39	23	6																																
интер-валы	0.0-0.5	0.5-1.0	1.0-1.5	1.5-2.0	2.0-2.5	2.5-3.0	3.0-3.5	3.5-4.0	4.0-4.5	4.5-5.0																													
частоты	26	73	38	27	24	6	3	1	0	2																													
11.	Экспоненциальное распределение [1,] 2.46 -0.65 1.03 2.25 3.38 1.38 3.80 2.79 -0.28 2.89 [2,] 1.39 -0.50 3.56 0.29 0.70 3.46 1.17 0.01 0.20 2.99 [3,] 3.31 0.58 0.47 1.39 3.20 3.32 2.56 2.56 -0.71 1.28 [4,] 1.19 1.59 1.30 2.83 0.73 0.95 1.00 -0.39 2.21 1.05 [5,] 0.22 2.31 0.66 -0.58 0.67 2.89 0.63 0.23 3.38 3.05 При помощи ММП найти оценку квадратного корня из дисперсии и проверить эту оценку на несмещённость и эффективность																																						
12.	Гипотеза H_0 --- распределение Пуассона $Pois(\lambda = 7)$ Гипотеза H_1 --- распределение Пуассона $Pois(\lambda = 5), \alpha = 0.058$ [1,] 8 3 6 8 8 8 6 8 6 8 [2,] 6 8 5 10 5 7 6 4 10 12 [3,] 5 8 8 6 8 5 6 8 5 7 [4,] 9 3 3 3 10 6 8 6 4 8 [5,] 7 4 5 4 6 6 5 7 3 9																																						

	<p>Гипотеза H_0 --- нормальное распределение $Norm(m = 3, \sigma = 7)$ Гипотеза H_1 --- нормальное распределение $Norm(m = -1, \sigma = 7), \alpha = 0.061$</p> <p>[1,] 11.14 6.99 2.86 -0.06 4.66 -7.30 1.49 -10.02 -2.73 3.13 [2,] -1.10 -17.23 1.95 9.79 1.99 -1.17 14.13 -3.40 -7.80 9.17 [3,] 15.50 -3.08 -1.40 3.20 8.06 -5.03 13.89 11.72 6.89 9.17 [4,] -6.33 -0.23 12.26 2.40 5.59 -14.32 10.76 3.61 0.42 10.18 [5,] -0.13 -0.89 -7.65 5.72 1.31 -1.29 -4.68 5.96 -4.33 0.33</p>
13.	<p>Геометрическое распределение с неизвестным параметром $p, \alpha = 0.05$</p> <p>[1,] 0 4 0 0 0 0 3 3 1 2 [2,] 1 4 6 0 6 0 6 0 2 3 [3,] 1 0 1 2 2 2 2 6 0 0 [4,] 6 1 8 0 3 1 2 0 0 2 [5,] 1 9 1 5 1 0 2 3 2 2</p>
	<p>Экспоненциальное распределение с параметром $\lambda, \alpha = 0.05$</p> <p>[1,] 5.32 4.25 1.32 1.40 4.70 1.64 2.69 0.92 0.05 3.33 [2,] 1.80 2.56 0.43 1.77 2.67 1.58 4.64 0.26 0.50 1.82 [3,] 3.13 0.18 1.60 1.74 5.68 0.19 0.11 1.07 0.81 5.30 [4,] 0.31 0.31 5.75 1.71 1.58 3.45 0.37 0.44 2.55 6.59 [5,] 3.03 1.40 2.03 1.80 2.25 1.76 0.06 1.66 0.00 6.59</p>