

1. Случайные события. Вероятность события

Событием называется любой факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

Достоверным называется событие Ω , которое происходит в каждом опыте.

Невозможным называется событие \emptyset , которое в результате опыта произойти не может.

Несовместными называются события, которые в одном опыте не могут произойти одновременно.

Суммой (объединением) двух событий A и B (обозначается $A+B$, $A \cup B$) называется такое событие, которое заключается в том, что происходит хотя бы одно из событий, т. е. A или B , или оба одновременно.

Произведением (пересечением) двух событий A и B (обозначается $A \cdot B$, $A \cap B$) называется такое событие, которое заключается в том, что оба события A и B происходят вместе.

Противоположным событию A называется такое событие \bar{A} , которое заключается в том, что событие A не происходит.

События A_k ($k = 1, 2, \dots, n$) образуют *полную группу*, если они попарно несовместны и в сумме образуют достоверное событие.

Свойства операций над событиями:

- | | |
|------------------------------------|---|
| 1) $A + \emptyset = A$; | 6) $A \cdot \emptyset = \emptyset$; |
| 2) $A + \bar{A} = \Omega$; | 7) $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$; |
| 3) $A + \Omega = \Omega$; | 8) $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$. |
| 4) $A \cdot \Omega = A$; | |
| 5) $A \cdot \bar{A} = \emptyset$; | |

Пример 1.1: Два шахматиста играют подряд две партии. Под исходом опыта будем понимать выигрыш одного из них в i -й партии или ничью. Построить пространство Ω элементарных исходов.

Решение. Обозначим события A_i – в i -й партии выиграл первый игрок, B_i – второй, C_i – ничья. Тогда возможные исходы игры:

1. Обе партии выиграл первый игрок $A_1 \cdot A_2$.
2. Обе партии выиграл второй игрок $B_1 \cdot B_2$.
3. Обе партии закончились ничью $C_1 \cdot C_2$.
4. В первой партии выиграл первый игрок, во второй – второй $A_1 \cdot B_2$.
5. В первой выиграл первый игрок, во второй – ничья $A_1 \cdot C_2$.
6. В первой партии победа второго игрока, во второй – первого $B_1 \cdot A_2$.
7. В первой – победа второго игрока, во второй – ничья $B_1 \cdot C_2$.
8. В первой – ничья, во второй – победа первого игрока $C_1 \cdot A_2$.
9. В первой – ничья, во второй – победа второго игрока $C_1 \cdot B_2$.

Ответ: $\Omega = \{A_1 \cdot A_2, B_1 \cdot B_2, C_1 \cdot C_2, A_1 \cdot B_2, A_1 \cdot C_2, B_1 \cdot A_2, B_1 \cdot C_2, C_1 \cdot A_2, C_1 \cdot B_2\}$.

Пример 1.2: Пусть A, B, C – три произвольных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что из A, B, C :

1. Произошло только A .
2. Произошли A и B , но C не произошло.
3. Все три события произошли.
4. Произошло, по крайней мере, одно из событий.
5. Произошли, по крайней мере, два события.
6. Произошло одно и только одно событие.
7. Произошли два и только два события.
8. Ни одно событие не произошло.
9. Произошло не более двух событий.

Решение.

1. Обозначим \bar{B} и \bar{C} , что события B и C не произошли, тогда событие «произошло только A » можно записать в виде $A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$.

2. $A \cdot B \cdot \bar{C}$.

3. $A \cdot B \cdot C$.

4. Событие произошло, по крайней мере, одно из событий можно представить как сумму этих событий: $A + B + C$.

5. Произошли, по крайней мере, два события – это сумма $A \cdot B + B \cdot C + C \cdot A$.

6. Произошло одно и только одно событие – это сумма событий $A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$.

7. Произошли два и только два события – это можно записать в виде $A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot C$.

8. $\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$.

9. $\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} = \overline{A \cdot B \cdot C}$, т. е. три события одновременно не произошли.

Задачи

1.1. Рабочий обслуживает три автоматических станка. Событие A – первый станок потребует внимания рабочего в течение часа, B – второй станок потребует внимания рабочего в течение часа, C – третий станок потребует внимания рабочего в течение часа. Что означают события: а) $A \cdot B \cdot C$; б) $A + B + C$; в) $A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$; г) $A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot C$; д) $\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$?

1.2. Три студента независимо друг от друга решают одну и ту же задачу. Пусть событие $A_1 = \{\text{первый студент решил задачу}\}$, $A_2 = \{\text{второй студент решил задачу}\}$, $A_3 = \{\text{третий студент решил задачу}\}$. Выразить через A_i ($i=1, 2, 3$) события:

3) следующие события: $B = \{\text{задачу решил хотя бы один студент}\}$; $C = \{\text{задачу решил только первый студент}\}$; $D = \{\text{задачу решил только один студент}\}$.

1.3. Пусть D_i ($i = \overline{1,3}$) – события, состоящие в том, что i -ый депутат выступил с речью. Назовите события: а) $\overline{D_1 + D_2 + D_3}$; б) $(\overline{D_2 + D_1}) \cdot D_3$; в) $\overline{D_2} \cdot D_3$; г) $D_1 + D_2 + D_3$; д) $\overline{D_1} \cdot \overline{D_2} \cdot D_3 + \overline{D_1} \cdot D_2 \cdot \overline{D_3} + D_1 \cdot \overline{D_2} \cdot \overline{D_3}$; е) $\overline{D_1} \cdot \overline{D_2} \cdot \overline{D_3}$; ж) $\overline{D_1} \cdot D_2 \cdot D_3$.

1.4. Пусть T_i ($i = \overline{1,3}$) – события, состоящие в том, что i -ое такси стоит на стоянке. Составьте события: а) можно уехать на такси; б) только одна машина стоит на стоянке; в) двух такси нет на стоянке; г) только два такси стоят на стоянке; д) только второго такси нет на стоянке; е) какого-то такси нет на стоянке; ж) стоянка пуста.

1.5. Пусть S_i ($i = \overline{1,3}$) – события, состоящие в том, что i -ый магазин закрыт на обед. Назовите события: а) $\overline{S_1 \cdot S_2 \cdot S_3}$; б) $\overline{S_1} \cdot \overline{S_2} + \overline{S_1} \cdot \overline{S_3} + \overline{S_2} \cdot \overline{S_3}$; в) $S_1 \cdot \overline{S_2} \cdot S_3$; г) $\overline{\overline{S_1} \cdot \overline{S_2} \cdot \overline{S_3}}$; д) $\overline{S_2}$; е) $S_1 + S_2 + S_3$; ж) $S_1 \cdot S_2 \cdot S_3$.

2. Классическое определение вероятности. Элементы комбинаторики

Классическое определение вероятности: вероятность случайного события A определяется по формуле

$$p(A) = \frac{m}{n}, \quad (2.1)$$

где n – число равновозможных исходов данного опыта;

m – число равновозможных исходов, приводящих к появлению события.

Геометрическое определение вероятности. Пусть в некоторую область случайным образом попадает точка T , причем все точки области Ω равноправны в отношении попадания точки T . Тогда за вероятность попадания точки T в область A принимается отношение

$$p(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}, \quad (2.2)$$

где $S(A)$ и $S(\Omega)$ – геометрические меры (длина, площадь, объем и т. д.) областей A и Ω соответственно.

Пусть имеется множество $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, состоящее из n различных элементов. (n, r) -выборкой называется множество, состоящее из r элементов, взятых из множества X .

Упорядоченной называется выборка, для которой важен порядок следования элементов. Если каждый элемент множества X может извлекаться несколько раз, то выборка называется *выборкой с повторениями*.

Число упорядоченных (n, r) -выборок (*размещений*) с повторениями $\hat{A}(n, r)$ и без повторений $A(n, r)$ равно

$$\hat{A}(n, r) = n^r, \quad (2.3)$$

$$A(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}. \quad (2.4)$$

Если $r = n$, то размещения без повторений называются *перестановками*, т. е. это – расположение элементов исходного множества в определенном порядке. Число перестановок из n элементов равно

$$P_n = n! = 1 \cdot \dots \cdot n. \quad (2.5)$$

Пустое множество можно упорядочить только одним способом:

$$P_0 = 0! = 1.$$

Число неупорядоченных (n, r) -выборок (*сочетаний*) с повторениями \hat{C}_n^r и без повторений C_n^r равно

$$\hat{C}_n^r = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}, \quad (2.6)$$

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}. \quad (2.7)$$

Число различных разбиений множества из n элементов на k непересекающихся подмножеств (причем в первом подмножестве r_1 элементов, во втором r_2 элементов и т. д., а $n = r_1 + r_2 + \dots + r_k$) равно

$$P_n(r_1, r_2, \dots, r_k) = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!}. \quad (2.8)$$

Пример 2.1: Бросают 2 игральные кости. Найти вероятности следующих событий: A – сумма числа очков не превосходит 5; B – произведение числа очков не превосходит 4; C – произведение числа очков делится на 8.

Решение. Определим общее число исходов: поскольку в случае подбрасывания одной кости имеем 6 исходов, то в случае подбрасывания двух костей имеем $n = 6 \cdot 6 = 36$ исходов. Найдем число благоприятных исходов.

Множество исходов, благоприятных событию A , состоит из 10 исходов:

$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$.

Соответственно, вероятность того, что сумма числа очков не превосходит 5 равна $p(A) = \frac{m}{n} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

Множество исходов, благоприятных событию B , состоит из 8 исходов:

$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (4, 1)\}$.

Соответственно, вероятность того, что произведение числа очков не превосходит 4 равна $p(B) = \frac{m}{n} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$.

Множество исходов, благоприятных событию C , состоит из 5 исходов:

$\{(2, 4), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 4)\}$.

Соответственно, вероятность того, что произведение числа очков делится на 8 равна $p(C) = \frac{m}{n} = \frac{5}{36}$.

Задачи

2.1. В ящике 5 апельсинов и 4 яблока. Наудачу выбираются 3 фрукта. Какова вероятность, что все три фрукта – апельсины?

Ответ: 0,12.

2.2. Фокусник предлагает троим зрителям задумать любое число от 1 до 10. Считая, что выбор каждым из зрителей любого числа из заданных равновозможен, найти вероятность того, что у кого-то из них задуманные числа совпадут.

Ответ: 0,028.

2.3. На карточках написаны числа 201, 202, ..., 220. Наудачу извлекают 2 из них. Определить вероятность, что это будут карточки с числами 207 и 213.

Ответ: 1/380.

2.4. Устройство состоит из 5 элементов, 2 из которых изношены. При включении устройства случайным образом включаются 2 элемента. Определить вероятность, что включенными окажутся неизношенные элементы.

Ответ: 0,3.

2.5. Пусть в урне имеется N шаров, из них M белых и $N - M$ черных. Из урны извлекается n шаров. Найти вероятность того, что среди них окажется ровно m белых шаров.

$$\text{Ответ: } \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

2.6. Точку наудачу бросили на отрезок $[0; 2]$. Какова вероятность ее попадания в отрезок $[0,5; 1,4]$?

Ответ: 0,45.

2.7. В урне находится 15 белых, 5 красных и 10 черных шаров. Наугад извлекается 1 шар, найти вероятность того, что он будет: а) белым; б) красным; в) черным.

Ответ: а) $1/2$; б) $1/6$; в) $1/3$.

2.8. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры, но помнит, что одна из них – ноль, а другая – нечетная. Найти вероятность того, что он наберет правильный номер.

Ответ: 0,1.

2.9. На семиместную скамейку случайным образом рассаживается 7 человек. Какова вероятность того, что два определенных человека окажутся рядом?

Ответ: $2/7$.

2.10. Студент знает ответы на 25 экзаменационных вопросов из 60-ти. Какова вероятность сдать экзамен, если для этого необходимо ответить не менее чем на 2 из 3-х вопросов?

Ответ: $640/1711$.

2.11. Четыре шарика разбрасывают по 4 лункам. Шарик попадает в ту или иную лунку с одинаковой вероятностью, независимо друг от друга. Определить вероятность, что в каждой лунке окажется по одному шарiku.

Ответ: $3/32$.

2.12. Какова вероятность, что взятое наудачу четырехзначное число кратно 5?

Ответ: 0,2.

2.13. В прямоугольник 5×4 см² вписан круг радиусом 1,5 см. Какова вероятность того, что точка, случайным образом поставленная в прямоугольник, окажется внутри круга?

Ответ: $9\pi/80$.

2.14. Наугад взяты два положительных числа, каждое из которых не больше 3. Какова вероятность того, что их сумма не превзойдет 3, а произведение будет не больше $14/9$?

Ответ: 0,4387.

2.15. В урне имеется 20 белых шаров и 5 черных. Наудачу последовательно, без возвращения извлекают по одному шару до появления белого. Найти вероятность, что придется производить третье извлечение.

Ответ: $1/30$.

2.16. Наудачу выбирается 4-значное число. Какова вероятность следующих событий: а) число читается одинаково как слева направо, так и справа налево (например, 1551); б) число кратно пяти; в) число состоит из нечетных цифр; г) число состоит из четных цифр.

Ответ: а) $p = 0,01$; б) $p = 0,2$;

в) $p = 0,069$; г) $p = 0,06$.

2.17. Колода карт (36 карты) делится пополам. Найти вероятность того, что количество черных и красных карт в обеих пачках будет одинаковым.

Ответ: $p = 0,26$.

2.18. Числа 1, 2, 3, 4, 5 написаны на пяти карточках. Наугад последовательно выбирают три карточки, и вытянутые таким образом цифры ставятся слева направо. Найти вероятность того, что полученное при этом трехзначное число будет четным.

Ответ: $p = 0,4$.

2.19. Десять студентов условились ехать определенным электропоездом, но не договорились о вагоне. Какова вероятность того, что ни один из них не встретится с другим, если в составе электропоезда 10 вагонов. Предполагается, что все возможные распределения студентов по вагонам равновероятны.

Ответ: $p = 0,00036$.

2.20. Два друга договорились о встрече между 16 и 17 часами дня. Пришедший первым ждет второго в течение 20 мин, а после уходит. Определить вероятность, что друзья встретятся.

Ответ: $p = 0,31$.

3. Теоремы сложения и умножения

Вероятность суммы несовместных событий A_1, \dots, A_n равна сумме вероятностей этих событий

$$p(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^n p(A_i). \quad (3.1)$$

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей каждого из событий минус вероятность их совместного появления:

$$p(A+B) = p(A) + p(B) - p(A \cdot B), \quad (3.2)$$

Вероятность суммы трех совместных событий вычисляется по следующей формуле:

$$p(A+B+C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cdot B) - p(B \cdot C) - p(A \cdot C) + p(A \cdot B \cdot C). \quad (3.3)$$

Вероятность суммы n событий A_1, \dots, A_n равна

$$p\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i_1=1}^n p(A_{i_1}) - \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n p(A_{i_1} A_{i_2}) + \dots \\ \dots + (-1)^{k+1} \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n p(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) + \dots + (-1)^{n+1} p(A_1 A_2 \dots A_n).$$

С учетом того, что $p(A) = 1 - p(\bar{A})$, вероятность суммы n событий (если $n > 3$) удобнее вычислять по формуле

$$p(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1 - p(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_n). \quad (3.4)$$

Вероятность произведения двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность второго при наличии первого.

$$p(AB) = p(A)p(B/A) = p(B)p(A/B). \quad (3.5)$$

Для независимых событий

$$p(AB) = p(A)p(B). \quad (3.6)$$

Вероятность произведения n событий $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ равна

$$p(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = p(A_1) \cdot p(A_2/A_1) \cdot p(A_3/A_1 \cdot A_2) \cdot \dots \cdot p(A_n/A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{n-1}), \quad (3.7)$$

где $p(A_k/A_1 \cdot \dots \cdot A_{k-1})$ – вероятность появления события A_k , при условии, что события A_1, A_2, \dots, A_{k-1} в данном опыте произошли.

В случае независимых событий данная формула упрощается:

$$p(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot \dots \cdot p(A_n). \quad (3.8)$$

Пример 3.1: В ящике находится 10 деталей, из которых только 4 окрашены. Наудачу извлекают 3 детали. Определить вероятность, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что изъята хотя бы одна окрашенная деталь. Тогда \bar{A} – ни одна из изъятых деталей не окрашена.

Воспользуемся утверждением $p(A) = 1 - p(\bar{A})$.

По классическому определению вероятности определим $p(\bar{A})$: $p(A) = \frac{m}{n}$.

Рассчитаем количество благоприятных исходов (изъято 3 детали из неокрашенных деталей): $m = C_{10-4}^3 = C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$.

Далее определим количество всевозможных исходов (общее количество вариантов для изъятия 3 деталей из 10 возможных):

$$n = C_{10}^3 = C_{10}^3 = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120.$$

Отсюда получаем, что $p(\bar{A}) = \frac{m}{n} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$.

А подставляя в $p(A) = 1 - p(\bar{A})$, получаем, что $p(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Задачи

3.1. Два радиста пытаются принять сигнал передатчика. Первый из них сможет это сделать с вероятностью 60 %, а второй – с вероятностью 80 %, независимо друг от друга. Найти вероятность, что хотя бы одному из них удастся принять сигнал.

Ответ: 0,92.

3.2. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одной мишени, делая по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка 70 %, а для второго 50 %. Найти вероятность, что оба стрелка попадут в мишень.

Ответ: 0,35.

3.3. В партии лампочек в среднем 4 % брака. Найти вероятность, что среди наугад выбранных двух лампочек окажется хотя бы одна неисправная.

Ответ: 0,0784.

3.4. Прибор содержит генератор и осциллограф. За время работы генератор может выйти из строя с вероятностью 30 %, а осциллограф – с вероятностью 20 %. Отказы осциллографа и генератора не связаны друг с другом. Найти вероятность, что прибор будет работать исправно.

Ответ: 0,56.

3.5. Радист пытается принять сигналы от трех передатчиков. Сигнал первого передатчика он может принять с вероятностью 50 %, второго – 40 % и третьего – 30 %. Найти вероятность, что ему удастся принять сигналы ото всех передатчиков.

Ответ: 0,06.

3.6. В урне имеется 3 белых и 4 черных шара. Из урны вытягиваются 3 шара. Найти вероятность, что хотя бы один из них окажется белым.

Ответ: 31/35.

3.7. Игральный кубик бросается 6 раз. Найти вероятность, что выпадет хотя бы одна шестерка.

Ответ: 0,6651.

3.8. За прямоугольный стол, у которого стоит по 4 стула слева и справа, в случайном порядке садятся 4 мальчика и 4 девочки. Какова вероятность того, что все мальчики окажутся с одной стороны?

Ответ: $1/35 \approx 0,0286$.

3.9. За круглый стол в случайном порядке садятся 4 мальчика и 4 девочки. Какова вероятность того, что все мальчики будут сидеть рядом друг с другом?

Ответ: $4/35 \approx 0,1143$.

3.10. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

Ответ: 0,14.

3.11. Новому работнику предоставляются три попытки проявить свои способности. Вероятность того, что ему удастся это с первой попытки, равна 0,2, со второй – 0,3, с третьей – 0,4. Исходы попыток представляют независимые события. Найти вероятность того, что работник оправдает оказанное ему доверие.

Ответ: 0,664.

3.12. Сколько раз нужно бросить пару игральных костей, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,5, хотя бы один раз появилась сумма очков, равная 12?

Ответ: $n \geq 25$.

3.13. При передаче текста 10 % букв искажается и принимается неверно. Какова вероятность того, что все 5 букв данного сообщения будут приняты правильно?

Ответ: 0,59.

3.14. Партия из 100 деталей подвергается выборочному контролю. Условием непригодности всей партии является наличие хотя бы одной бракованной детали среди пяти проверенных. Какова вероятность для данной партии быть принятой, если она содержит 5 % неисправных деталей.

Ответ: 0,23.

4. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Допустим, что проводится некоторый опыт, об условиях которого можно сделать n исключаяющих друг друга предположений (*гипотез*): $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$, $H_i \cap H_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

Событие A может появляться совместно с одной из гипотез H_i . Тогда *полная вероятность* события A равна

$$p(A) = \sum_{i=1}^n p(H_i) \cdot p(A / H_i). \quad (4.1)$$

Если опыт произведен и произошло некоторое событие A , то определить вероятность гипотезы H_k с учетом того, что произошло событие A , можно по *формуле Байеса*:

$$P(H_k) / A = \frac{P(H_k) \cdot P(A / H_k)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A / H_i)}. \quad (4.2)$$

Пример 4.1: В первой урне находится 7 черных и 3 белых шара, а во второй урне – 4 черных и 6 белых шаров. Из наудачу взятой урны достали один шар, который оказался белым. Какова вероятность того, что этот шар был вынут из первой урны?

Решение. Предварительно вычислим вероятность события A (вынутый наудачу шар – белый) по формуле полной вероятности: $P(A) = P(B_1)P(A / B_1) + P(B_2)P(A / B_2)$.

Здесь $P(B_1)$ – вероятность того, что шар извлечен из первой урны; $P(B_2)$ – вероятность того, что шар извлечен из второй урны; $P(A / B_1)$ – условная вероятность того, что вынутый шар белый, если он извлечен из первой урны; $P(A / B_2)$ – условная вероятность того, что вынутый шар белый, если он извлечен из второй урны.

$$\text{Тогда } P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} = \frac{9}{20} = 0,45.$$

Теперь вычислим условную вероятность того, что этот шар был извлечен из первой урны, по формуле Байеса:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P(A / B_1)}{P(A)} = \frac{1/2 \cdot 3/10}{9/20} = \frac{1}{3}.$$

Задачи.

4.1. В двух коробках находятся однотипные диоды. В первой – 20 шт., из них 2 неисправных; во второй – 10 шт., из них 4 неисправных. Наугад была выбрана коробка, а затем из нее наугад был выбран диод. Он оказался неисправным. Найти вероятность того, что он был взят из второй коробки.

Ответ: 0,8.

4.2. Два радиста пытались принять сигнал передатчика. Первый из них может это сделать с вероятностью 60 %, а второй – с вероятностью 80 %, независимо друг от друга. Известно, что как минимум одному из радистов удалось принять сигнал. Найти вероятность, что это удалось обоим радистам.

Ответ: $12/23 \approx 0,5217$.

4.3. В двух коробках однотипные конденсаторы. В первой – 20 штук, из них 3 неисправных; во второй – 40 штук, из них 2 неисправных. Наугад была выбрана коробка, а затем из нее наугад был выбран конденсатор. Он оказался неисправным. Найти вероятность того, что он был взят из первой коробки.

Ответ: 0,75.

4.4. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одной мишени, делая по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка составляет 70 %, а для второго 60 %. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Найти вероятность, что попал первый стрелок.

Ответ: $14/23 \approx 0,6087$.

4.5. На базе находятся лампы, изготовленные на двух заводах. Из них 70 % изготовлено на первом заводе, а 30 % – на втором. Известно, что 90 % ламп, изготовленных на первом заводе, соответствуют стандарту, а среди ламп, изготовленных на втором заводе, соответствуют стандарту лишь 80 %. Найти вероятность, что взятая наугад лампа с базы будет соответствовать стандарту.

Ответ: 0,87.

4.6. Радиосообщение может быть передано днем (с вероятностью $3/4$), либо ночью (с вероятностью $1/4$). Из-за помех вероятность его успешного приема составляет днем 60 %, а ночью 80 %. Найти вероятность, что сообщение будет принято.

Ответ: 0,65.

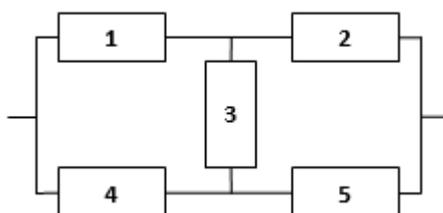
4.7. В ящике 4 белых и 5 черных шаров. Наугад вынимаются 3 шара. Найти вероятность, что они окажутся одинакового цвета.

Ответ: $1/6$.

4.8. На шахматную доску наугад ставятся два короля – черный и белый, в разные клетки. Какова вероятность, что при этом получится допустимая позиция? Недопустимой считается позиция, когда короли стоят в соседних (в том числе и по диагонали) клетках.

Ответ: $3612/4032 \approx 0,8958$.

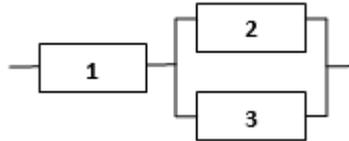
4.9. Элементы соединены в цепь с одним входом и одним выходом по следующей схеме:



Отказы элементов являются независимыми событиями. Отказ любого из элементов приводит к прерыванию сигнала в той ветви цепи, где находится данный элемент. Вероятности отказа элементов 1, 2, 3, 4, 5 соответственно равны $q_1 = 0,1$; $q_2 = 0,2$; $q_3 = 0,3$; $q_4 = 0,4$; $q_5 = 0,5$. Найти вероятность того, что сигнал пройдет со входа на выход.

Ответ: 0,846.

4.10. Элементы соединены в цепь с одним входом и одним выходом по следующей схеме:



Отказы элементов являются независимыми событиями. Отказ любого из элементов приводит к прерыванию сигнала в той ветви цепи, где находится данный элемент. Изначальные вероятности отказа элементов 1, 2, 3 соответственно равны $q_1 = 0,2$; $q_2 = 0,4$; $q_3 = 0,6$.

Посланный сигнал не прошел со входа на выход. Найти вероятность того, что: а) элемент 1 отказал; б) только элемент 1 отказал; в) элемент 2 отказал; г) только элемент 2 отказал.

Ответ: а) $200/392 \approx 0,5102$; б) $48/392 \approx 0,1224$; в) $272/392 \approx 0,6939$; г) 0.

4.11. Найти вероятность отгадать пин-код телефона с первого раза если в нем используются 4 строго возрастающие цифры.

Ответ: 0,5.

4.12. Каждый из трех котов спит в одной из трех коробок. Найти вероятность того, что все коты будут спать в одной коробке, если они выбирают каждую коробку равновероятно и независимо друг от друга.

Ответ: 0,012.

4.13. Три гимнаста стоят друг на друге. Вероятность падения нижнего составляет 0,08, второго – 0,5, третьего – 0,31. Найти вероятность того, что трюк не удастся.

Ответ: 0,683.

4.14. Двое соперников участвует в олимпиаде. Вероятность того, что первый решит все задачи верно равна 0,89. Для второго эта вероятность равна 0,92. Найти вероятность того, что только один займет первое место.

Ответ: 0,1724.

4.15. В город поступило 3000 л молока с первого завода и 3500 – со второго завода. Известно, что средний процент непригодного молока среди продукции первого завода равен 1,5 %, второго – 1 %. Найти вероятность того, что купленный литр молока в этом городе окажется непригодным.

Ответ: 0,012.

4.16. Для каждого из трех друзей вероятности провала экзамена равны соответственно 0,01; 0,03; 0,1. Найти вероятность того, что только двое из них сдадут экзамен.

Ответ: 0,131.

4.17. Два датчика посылают сигнал в общий канал связи, причем первый из них посылает вдвое больше сигналов, чем второй. Вероятность получить искаженный сигнал от первого датчика равна 0,06, от второго – 0,03. Какова вероятность получить неискаженный сигнал в общем канале связи?

Ответ: 0,95.

4.18. На складе имеется 12 телевизоров, из которых 8 импортного производства. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наугад телевизоров: а) окажется более двух импортных; б) все будут отечественного производства.

Ответ: а) 0,986; б) 0.

4.19. Вероятности правильного определения химического состава продукта для каждого из 3 контролеров равны $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$. При одновременном контроле 3 проб тремя контролерами химический состав оказался правильно определенным для 2 проб (что подтвердилось на окончательной проверке в лаборатории). Найти вероятность того, что ошибся третий контролер.

Ответ: 0,46.

5. Повторение независимых опытов. Формула Бернулли

Пусть производится n независимых одинаковых опытов. В результате каждого опыта событие A появляется с вероятностью p . Вероятность $P(n, k)$ того, что в последовательности из n опытов событие A произойдет ровно k раз (формула Бернулли), равна

$$P(n, k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k \cdot q^{n-k}, 0 \leq k \leq n, \quad (5.1)$$

где $q = 1 - p$ – вероятность того, что событие A не произойдет в одном опыте.

Вычисление вероятностей $P(n, k)$ при больших значениях n по формуле Бернулли проблематично. Поэтому вычисление соответствующих вероятностей проводится с помощью следующих приближенных формул:

1) Если количество испытаний велико $n \rightarrow \infty$, а вероятность события мала $p \rightarrow 0$, так что $np \rightarrow a$, $0 < a < \infty$ и $p \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, то используется формула Пуассона:

$$P(n, k) \approx \frac{a^k}{k!} \cdot e^{-a}, k = \overline{0, n}; \quad (5.2)$$

2) Если количество испытаний n велико, вероятности p и q не малы, так что выполняются следующие условия:

$$0 < np - 3\sqrt{npq}, np + 3\sqrt{npq} < n,$$

то применяются приближенные формулы Муавра – Лапласа:

$$\text{– локальная} \quad P(n, k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \quad (5.3)$$

$$\text{где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}};$$

$$\text{– интегральная } P(n, k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi\left[\frac{(k_2 - np)}{\sqrt{npq}}\right] - \Phi\left[\frac{(k_1 - np)}{\sqrt{npq}}\right], \quad (5.4)$$

$$\text{где } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \text{ – функция Лапласа.}$$

Функции $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ табулированы (прил. 1, 2). При использовании таблиц следует помнить, что $\varphi(x)$ является четной ($\varphi(-x) = \varphi(x)$), а функция Лапласа – нечетной ($\Phi(-x) = -\Phi(x)$).

Пусть производится серия из n независимых испытаний, в результате каждого из которых может появиться одно из событий A_1, A_2, \dots, A_r с вероятностями p_1, p_2, \dots, p_r соответственно.

Вероятность того, что в серии из n испытаний событие A_1 наступит ровно k_1 раз, событие A_2 – k_2 раз, ..., событие A_r – k_r раз ($k_1 + \dots + k_r = n$) равна

$$P(n, k_1, \dots, k_r) = \frac{n!}{k_1! \dots k_r!} \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_r^{k_r}. \quad (5.5)$$

Наивероятнейшее число наступления события $A - m -$ вычисляется по формуле $n \cdot p - q \leq m \leq n \cdot p + p$.

Пример 5.1: В среднем 70 % студентов группы сдают зачет с первого раза. Определить вероятность того, что из 5 человек, сдававших зачет, с первого раза сдадут ровно 3 студента.

Решение. Воспользуемся формулой Бернулли:

$$P(n, k) = P(5, 3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^{5-3} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 0,7^3 \cdot 0,3^2 = 0,3087.$$

Пример 5.2: Банк выдал шесть кредитов. Вероятность того, что кредит не будет погашен в срок, равна 0,2. Определить вероятность того, что в срок не будут погашены четыре кредита.

Решение. Воспользуемся формулой Бернулли:

$$P(n, k) = P(6, 4) = C_6^4 \cdot p^4 \cdot q^{6-4} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^2 = 0,01536.$$

Задачи

5.1. Кубик бросается 5 раз. Найти вероятность, что шестерка выпадет 2 раза.

Ответ: $1250/7776 \approx 0,1608$.

5.2. Бросается 10 монет. Найти вероятность, что число выпавших гербов будет равно шести.

Ответ: $210/1024 \approx 0,2051$.

5.3. Бросается 12 монет. Найти вероятность, что гербов выпадет больше, чем решек.

Ответ: $1586/4096 \approx 0,3872$.

5.4. Монета бросается 100 раз. Найти вероятность, что количество выпавших гербов будет лежать в интервале: а) от 40 до 60; б) от 30 до 70.

Ответ: а) $\approx 0,96$ (по приближенной формуле Муавра – Лапласа: 0,9545; по точной формуле Бернулли: 0,9648); б) $\approx 0,9999$.

5.5. Вероятность попадания в мишень игроком за каждый бросок равна 0,6. Всего было совершено 5 бросков. Определить вероятность попадания в мишень: а) 3 раза; б) не менее половины бросков; в) не более 2 раз.

Ответ: а) 0,3456; б) 0,6825; в) 0,31744.

5.6. На автовокзале есть 10 автобусов. Для каждого из них вероятность поломки за день составляет 30 %. Определить вероятность того, что за день: а) выйдет из строя 7 автобусов; б) останется рабочим хотя бы один из них.

Ответ: а) 0,009; б) 0,999994.

5.7. Врач ставит верный диагноз с вероятностью 85 %. Найти вероятность того, что из 6 диагнозов верный будет поставлен большей части пациентов.

Ответ: 0,9526.

5.8. Из школы с вероятностью 40 % выпускаются двоечники. На одну и ту же специальность пытаются поступить 7 выпускников этой школы. Найти наивероятнейшее число двоечников среди них и определить вероятность того, что именно столько двоечников будет поступать на эту специальность.

Ответ: 3; 0,29.

5.9. Найти вероятность 4 точных из 7 независимых измерений, если вероятность точного измерения равна 0,3.

Ответ: 0,097.

5.10. Мимо пункта наблюдения пробегают ежи. Наблюдатель обнаруживает пробегающего ежа с вероятностью 0,1. Сколько ежей должно пробежать, чтобы с вероятностью 0,99 наблюдатель зафиксировал бы не менее 5 ежей?

Ответ: 113.

5.11. Два стрелка стреляют по очереди до первого попадания по мишени. Для Ивана вероятность попадания при одном выстреле равна 0,2, для Петра – 0,3. Найти вероятность того, что Иван сделает больше выстрелов, чем Петр (первый выстрел разыгрывается по жребию).

Ответ: 0,45.

5.12. Сколько раз надо подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее число выпадений пятерки было равно 55?

Ответ: $329 \leq n \leq 335$.

5.13. Пара игральных костей бросается 7 раз. Какова вероятность событий: $A =$ (сумма очков, равная 7, выпадет дважды); $B =$ (сумма очков, равная 7, выпадет по крайней мере один раз)?

Ответ: а) 0,23; б) 0,72.

5.14. Студент выполняет тестовую работу, состоящую из трех задач. Для получения положительной отметки достаточно решить две. Для каждой задачи предлагается 5 вариантов ответа, из которых только один правильный. Студент плохо знает материал и поэтому выбирает ответы для каждой задачи наудачу. Какова вероятность, что он получит положительную оценку?

Ответ: 0,104.

6. Случайная величина. Закон распределения и числовые характеристики

Под *случайной величиной* (СВ) понимается величина, которая в результате опыта со случайным исходом принимает то или иное значение, причем, заранее, до опыта, неизвестно, какое именно. Случайные величины в зависимости от вида множества значений могут быть *дискретными* (ДСВ) или *непрерывными* (НСВ).

Закон распределения случайной величины – это любая функция, таблица, правило и т. п., устанавливающая соответствие между значениями случайной величины и вероятностями ее наступления.

Функцией распределения случайной величины X называется вероятность того, что она примет значение меньше, чем аргумент функции x :

$$F(x) = p\{X < x\}. \quad (6.1)$$

Свойства функции распределения:

$$\begin{array}{ll} 1. F(-\infty) = 0. & 3. F(x_1) \leq F(x_2), \text{ при } x_1 < x_2. \\ 2. F(+\infty) = 1. & 4. p(a \leq X < b) = F(b) - F(a). \end{array} \quad (6.2)$$

Рядом распределения дискретной СВ X называется таблица, в верхней строке которой перечислены все возможные значения СВ x_1, x_2, \dots, x_n ($x_{i-1} < x_i$), а в нижней – вероятности их появления p_1, p_2, \dots, p_n , где $p_i = p\{X = x_i\}$.

x_i	x_1	x_2	\dots	x_n
p_i	p_1	p_2	\dots	p_n

Так как события $\{X = x_1\}, \dots, \{X = x_n\}$ несовместны и образуют полную группу, то справедливо контрольное соотношение

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1. \quad (6.3)$$

Функция распределения любой дискретной СВ есть разрывная ступенчатая функция, скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины, и равны вероятностям этих значений:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p(X = x_i). \quad (6.4)$$

Плотностью распределения (плотностью вероятности) $f(x)$ непрерывной случайной величины X называется производная ее функции распределения:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P\{x \leq X < x + \Delta x\}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x). \quad (6.5)$$

Основные свойства плотности распределения:

1. Плотность распределения неотрицательна: $f(x) \geq 0$.

2. Условие нормировки: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$ (6.6)

3. Вероятность попадания случайной величины X на произвольный участок $[a, b]$ равна

$$p\{a \leq X < b\} = \int_a^b f(x)dx. \quad (6.7)$$

4. Функция распределения $F(x)$ случайной величины X выражается через ее плотность:

$$F(x) = p\{X < x\} = p\{-\infty < X < x\} = \int_{-\infty}^x f(x)dx. \quad (6.8)$$

Математическое ожидание характеризует среднее значение СВ и определяется по формуле:

$$m_X = M[X] = \begin{cases} \sum_{i=1}^N x_i \cdot p_i & \text{для ДСВ,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx & \text{для НСВ.} \end{cases} \quad (6.9)$$

Свойства математического ожидания:

1. $M[c] = c$.
2. $M[X+c] = M[X] + c$.
3. $M[c \cdot X] = c \cdot M[X]$.

Начальный момент k -го порядка СВ X есть математическое ожидание k -й степени этой случайной величины:

$$\alpha_k(x) = M[X^k] = \begin{cases} \sum_{i=1}^N x_i^k \cdot p_i & \text{для ДСВ,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x)dx & \text{для НСВ.} \end{cases} \quad (6.10)$$

Центрированной случайной величиной $\overset{\circ}{X}$ называется СВ, математическое ожидание которой находится в начале координат (в центре числовой оси) $M[\overset{\circ}{X}] = 0$.

Операция центрирования (переход от нецентрированной величины X к центрированной $\overset{\circ}{X}$) имеет вид $\overset{\circ}{X} = X - m_X$.

Центральный момент порядка k СВ X есть математическое ожидание k -й степени центрированной случайной величины $\overset{\circ}{X}$:

$$\mu_k(x) = M[\overset{\circ}{X}^k] = \begin{cases} \sum_{i=1}^N (x_i - m_X)^k \cdot p_i & \text{для ДСВ,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^k \cdot f(x)dx & \text{для НСВ.} \end{cases} \quad (6.11)$$

Дисперсия случайной величины характеризует степень рассеивания (разброса) значений случайной величины относительно ее математического ожидания и определяется по формуле:

$$D_x = D[X] = \mu_2(x) = \alpha_2(x) - m_X^2 = \begin{cases} \sum_{i=1}^N (x_i - m_X)^2 p_i = \sum_{i=1}^N x_i^2 p_i - m_X^2 & \text{для ДСВ,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - m_X^2 & \text{для НСВ.} \end{cases} \quad (6.12)$$

Свойства дисперсии:

1. $D[c] = 0$.
2. $D[X + c] = D[X]$.
3. $D[c \cdot X] = c^2 \cdot D[X]$.

Средним квадратическим отклонением (СКО) СВ X называется характеристика

$$\sigma_X = \sigma[X] = \sqrt{D[X]}. \quad (6.13)$$

СКО измеряется в тех же физических единицах, что и СВ, и характеризует ширину диапазона значений СВ.

Правило 3σ. Практически все значения СВ находятся в интервале

$$[m_X - 3\sigma_X; m_X + 3\sigma_X]. \quad (6.14)$$

Модой (Мо) случайной величины называется ее наиболее вероятное значение, т. е. то значение, для которого вероятность p_i (для дискретной СВ) или $f(x)$ (для непрерывных СВ) достигает максимума.

Медианой (Ме) случайной величины X называется такое ее значение, для которого выполняется условие $p\{X < Me\} = p\{X \geq Me\}$. Медиана, как правило, существует только для непрерывных случайных величин.

Пример 6.1: В коробке 7 шаров, из которых 4 красные. Из этой коробки наудачу извлекают 3 шара. Найти закон распределения случайной величины X , равной числу красных шаров в выборке.

Решение. В выборке из трех шаров может не оказаться ни одного красного шара, может появиться один, два или три красных шара. Следовательно, случайная величина X может принимать только четыре значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$.

Найдем вероятности этих значений.

Первый способ.

$$p_0 = \frac{C_4^0 C_3^3}{C_7^4} = \frac{1}{35}; \quad p_1 = \frac{C_4^1 C_3^2}{C_7^4} = \frac{12}{35} \quad p_2 = \frac{C_4^2 C_3^1}{C_7^4} = \frac{18}{35} \quad p_3 = \frac{C_4^3 C_3^0}{C_7^4} = \frac{4}{35}.$$

Второй способ.

Обозначим событие A – появление красного шара, следовательно \bar{A} – появление не красного.

$$p_0(\bar{A}\bar{A}\bar{A}) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{35};$$

$$p_1(A\bar{A}\bar{A} + \bar{A}A\bar{A} + \bar{A}\bar{A}A) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{35};$$

$$p_2(AA\bar{A} + \bar{A}AA + A\bar{A}A) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{18}{35};$$

$$p_3(AAA) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{35}.$$

Следовательно, данная случайная величина X имеет следующий закон распределения:

x	0	1	2	3
p	1/35	12/35	18/35	4/35

Проверка: $\frac{1}{35} + \frac{12}{35} + \frac{18}{35} + \frac{4}{35} = 1.$

Пример 6.2: Вероятность того, что в магазине будет в наличии необходимая студенту книга, равна 0,3. Составить закон распределения числа посещенных магазинов, которые последовательно посетит студент, чтобы купить книгу, если в городе 3 магазина. Найти числовые характеристики случайной величины.

Решение. В качестве случайной величины X выступает количество магазинов, которые посетит студент, чтобы купить книгу. Возможные значения, которые примет случайная величина X : 1, 2, 3.

Обозначим через событие A_1 – в первом магазине есть книга, A_2 – книга есть во второй, A_3 – в третьей. Тогда $p(A_1) = p(A_2) = p(A_3) = 0,3$. Вероятность противоположного события, что книга занята $p(\bar{A}_1) = p(\bar{A}_2) = p(\bar{A}_3) = 1 - 0,3 = 0,7$.

Для составления закона распределения рассчитаем соответствующие вероятности:

$$p_1(A) = 0,3;$$

$$p_1(\bar{A}A) = 0,7 \cdot 0,3 = 0,21;$$

$$p_1(\bar{A}\bar{A}A + \bar{A}\bar{A}\bar{A}) = 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,3 + 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 = 0,49.$$

Проверка: $0,3 + 0,21 + 0,49 = 1.$

Запишем закон распределения в виде таблицы.

x	1	2	3
p	0,3	0,21	0,49

Вычислим математическое ожидание случайной величины и ее дисперсию:

$$M(X) = m_x = \sum_{i=1}^n x_i p_i = 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,21 + 3 \cdot 0,49 = 2,19;$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - m_x^2 = 1^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,21 + 3^2 \cdot 0,49 - 2,19^2 = 0,7539.$$

Пример 6.3: Случайная величина X распределена по закону, определяемому плотностью вероятности вида

$$f(x) = \begin{cases} c|x+1|, & -3 \leq x \leq 3, \\ 0, & |x| > 3. \end{cases}$$

Определить константу c , функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание, дисперсию величины X , а также вероятность ее попадания в интервал $[-0,5; 1,5)$.

Решение. Вначале вычислим значение константы c из условия нормировки. Для этого определим значение интеграла в левой части условия нормировки. Так как $|x+1|$ в точке -1 обращается в нуль, то на интервале $[-3; -1)$ функция раскрывается со знаком «-», а на $[-1; 3]$ – со знаком «+».

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^{-1} c|x+1| dx + \int_{-1}^3 c|x+1| dx = -c \int_{-3}^{-1} (x+1) dx + c \int_{-1}^3 (x+1) dx = -c \int_{-3}^{-1} (x+1) d(x+1) + \\ &+ c \int_{-1}^3 (x+1) d(x+1) = \left. \frac{-c(x+1)^2}{2} \right|_{-3}^{-1} + \left. \frac{c(x+1)^2}{2} \right|_{-1}^3 = 2c + 8c = 10c = 1 \end{aligned}$$

Из условия нормировки следует, что $10c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{10}$.

Плотность вероятности примет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -3, \\ \frac{1}{10}|x+1|, & -3 \leq x \leq 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Определим функцию распределения $F(x)$. Так как плотность вероятности задана различными формулами на разных интервалах, то и ее первообразную – функцию распределения – для каждого интервала определим в отдельности.

$$1. \ x < -3: F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

$$\begin{aligned} 2. \ -3 \leq x < -1: F(x) &= \int_{-\infty}^{-3} 0 dt - \frac{1}{10} \int_{-3}^x (t+1) dt = 0 - \frac{1}{10} \int_{-3}^x (t+1) d(t+1) = \\ &= -\frac{1}{10} \left. \frac{(t+1)^2}{2} \right|_{-3}^x = \frac{4 - (x+1)^2}{20}. \end{aligned}$$

$$3. \ -1 \leq x \leq 3: F(x) = \int_{-\infty}^{-3} 0 dt - \frac{1}{10} \int_{-3}^{-1} (t+1) dt + \frac{1}{10} \int_{-1}^x (t+1) dt = 0 + \frac{4 - (-1+1)^2}{20} +$$

$$+\frac{1}{10} \int_{-1}^x (t+1)d(t+1) = \frac{4}{20} + \frac{(t+1)^2}{20} \Big|_{-1}^x = \frac{4+(x+1)^2}{20}.$$

$$4. \quad x > 3: F(x) = F(x) = \int_{-\infty}^{-3} 0dt - \frac{1}{10} \int_{-3}^{-1} (t+1)dt + \frac{1}{10} \int_{-1}^3 (t+1)dt + \int_3^x 0dt =$$

$$= 0 + \frac{4 - (-1+1)^2}{20} + \frac{(3+1)^2}{20} + 0 = 0 + 1 + 0 = 1.$$

Окончательно имеем

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -3, \\ \frac{4 - (x+1)^2}{20}, & -3 \leq x \leq -1, \\ \frac{4 + (x+1)^2}{20}, & -1 \leq x \leq 3 \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

График функции распределения имеет вид, приведенный на рис. 6.1:

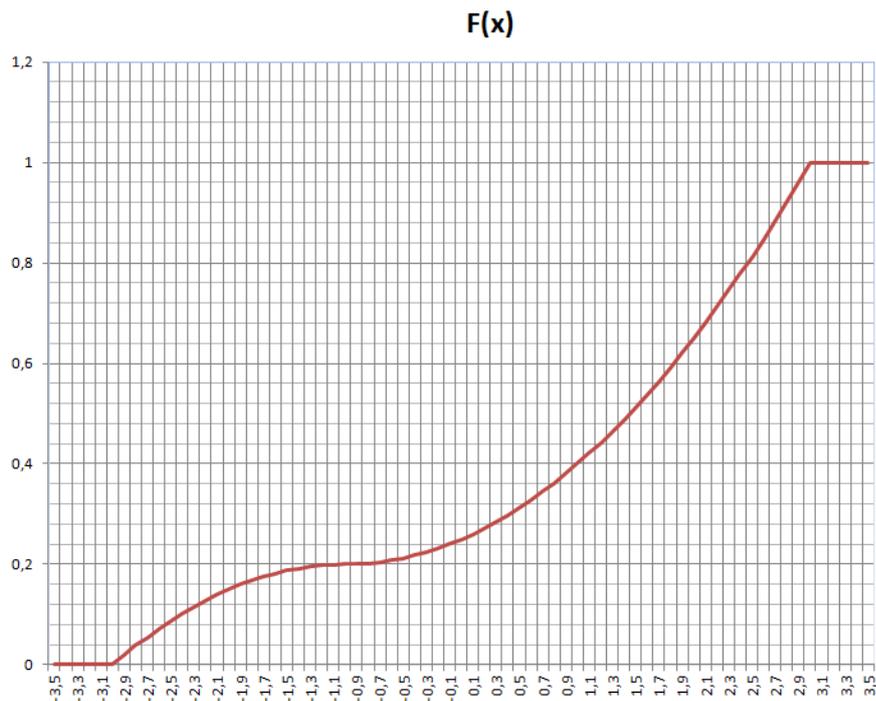


Рис. 6.1. График функции распределения

Вычислим вероятность $p(-0,5 \leq X < 1,5)$:

$$p\{-0,5 \leq X < 1,5\} = F(1,5) - F(0,5) = \frac{4 + (1,5+1)^2}{20} - \frac{4 + (-0,5+1)^2}{20} = \frac{3}{10}.$$

Вычислим математическое ожидание случайной величины:

$$m_X = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \frac{1}{10} \int_{-3}^3 x \cdot |x+1|dx = -\frac{1}{10} \int_{-3}^{-1} x \cdot (x+1)dx + \frac{1}{10} \int_{-1}^3 x \cdot (x+1)dx =$$

$$= -\frac{14}{30} + \frac{4}{3} = \frac{13}{15}.$$

Вычислим дисперсию случайной величины:

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - m_x^2 = \frac{1}{10} \int_{-3}^3 x^2 \cdot |x+1| dx - \left(\frac{13}{15}\right)^2 = -\frac{1}{10} \int_{-3}^{-1} x^2 \cdot (x+1) dx + \\ + \frac{1}{10} \int_{-1}^3 x^2 \cdot (x+1) dx - \left(\frac{13}{15}\right)^2 = \frac{61}{15} - \left(\frac{13}{15}\right)^2 = 0,8667.$$

Задачи

6.1. Бросается игральный кубик. Обозначим через N число выпавших очков. Рассматривая N как случайную величину, построить ее ряд распределения и функцию распределения. Найти вероятность того, что $N < 5$.

Ответ: $P(N < 5) = 2/3$.

6.2. Карлсон решил продолжить знакомство с Малышом, но забыл, в какое из пяти раскрытых окон он влетал накануне. X – число исследованных Карлсоном комнат. Выписать закон распределения дискретной случайной величины X ; Найти $M[x]$, $D[x]$. Построить график функции распределения $F(x)$.

Ответ: $M[X] = 3$; $D[x] = 2$.

6.3. Бросаются две монеты. Случайная величина X – число выпавших гербов. Найти математическое ожидание $M[X]$ и среднеквадратичное отклонение $\sigma[x]$.

Ответ: $M[X] = 1$; $\sigma[x] \approx 0,7071$.

6.4. В конверте 18 марок, среди которых 7 чистых, остальные пропелелованные. Наудачу достают 3 марки. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа чистых марок среди отобранных. Построить функцию распределения. Определить вероятность того, что среди отобранных имеется хотя бы одна чистая марка.

Ответ: $m_x = 7/6$, $D_x = 385/612$, $p(X \geq 1) = 217/272$.

6.5. В кармане имеется 4 монеты по 5 копеек, 2 монеты по 50 копеек. Пассажир извлекает из кармана по одной монете до появления 5 копеек без возвращения. Построить ряд распределения случайной величины X (число попыток). Найти математическое ожидание и дисперсию. Найти функцию распределения.

Ответ: $m_x = 1,4$; $D_x = 1,037$;

X	1	2	3
P	2/3	4/15	1/15

X	$x \leq 1$	$1 < x \leq 2$	$2 < x \leq 3$	$x > 3$
$F(x)$	0	2/3	14/15	1

6.6. Случайная величина X задана рядом распределения:

X	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,3	0,4

Найти математическое ожидание $M[X]$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[x]$.

Ответ: $M[X] = 1$; $\sigma[x] = 1$.

6.7. Найти распределение случайной величины X , если она может принимать только одно из двух значений x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$). Известно, что $p_1 = 0,1$; $m_x = 1,9$; $D_x = 0,09$.

Ответ:

X	1	2
P	0,1	0,9

6.8. Случайная величина Y задана рядом распределения:

Y	1	3	4	7
P	0,4	0,2	0,1	0,3

Построить график функции распределения $F(y)$. Найти вероятность того, что $2 < Y < 6$.

Ответ: $P(2 < Y < 6) = 0,3$.

6.9. Случайная величина X задана плотностью вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ e^{-x}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание $M[X]$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[x]$.

Ответ: $M[X] = 1$; $\sigma[x] = 1$.

6.10. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ C \cdot x, & \text{если } 0 \leq x \leq 20, \\ 1, & \text{если } x \geq 20. \end{cases}$$

Найти коэффициент C и плотность вероятности $f(x)$. Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

$$\text{Ответ: } C = 0,05; f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ 0,05, & \text{если } 0 < x < 20, \\ 0, & \text{если } x > 20. \end{cases}$$

6.11. Случайная величина X задана плотностью вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, x > 3, \\ C \cdot (3x - x^2), & \text{если } 0 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Найти коэффициент C и функцию распределения $F(x)$. Определить математические ожидание и дисперсию случайной величины X .

$$\text{Ответ: } C = 2/9; m_x = 1,5; D_x = 9/20.$$

6.12. Случайная величина X равномерно распределена в интервале $[1,5; 2,5]$.

Найти математическое ожидание $M[X]$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[x]$.

$$\text{Ответ: } M[X] = 2; \sigma[x] = \sqrt{3}/6 \approx 0,2887.$$

6.13. Случайная величина X равномерно распределена в интервале $-1 \leq X \leq 0,5$. Найти ее плотность вероятности $f(x)$ и функцию распределения $F(x)$. Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

$$\text{Ответ: } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < -1, \\ 2/3, & \text{если } -1 < x < 0,5, \\ 0, & \text{если } x > 0,5. \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq -1, \\ 2/3x + 2/3, & \text{если } -1 \leq x \leq 0,5, \\ 1, & \text{если } x \geq 0,5. \end{cases}$$

6.14. Случайная величина X задана плотностью вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ 1/3, & \text{если } 0 < x < 3, \\ 0, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание $M[X]$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[x]$.

$$\text{Ответ: } M[X] = 1,5; \sigma[x] = \sqrt{3}/2 \approx 0,866.$$

6.15. Случайная величина X принимает два возможных значения: 2 и 5,2, образующие полную функцию. Известно математическое задание, равное 3,7. Найти вероятности p_1 и p_2 и дисперсию случайной величины.

$$\text{Ответ: } p_1 = 15/32, p_2 = 17/32, D_x = 2,55.$$

7. Типовые законы распределения

Дискретная СВ X имеет *геометрическое* распределение, если она принимает значения $0, 1, \dots, \infty$ с вероятностями

$$p(X=i) = p_i = q^i p \text{ или } p(X=i) = p_i = q^{i-1} p, \quad (7.1)$$

где p – параметр распределения ($0 \leq p \leq 1$), $q = 1 - p$.

Числовые характеристики геометрического распределения:

$$m_X = (q/p \text{ или } 1/p), D_X = q/p^2.$$

Дискретная СВ X имеет *биномиальное* распределение, если она принимает значения $0, 1, \dots, n$ со следующими вероятностями:

$$p(X=i) = p_i = \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i q^{n-i}, \quad (7.2)$$

где n, p – параметры распределения ($0 \leq p \leq 1$), $q = 1 - p$.

Числовые характеристики биномиального распределения:

$$m_X = np, D_X = npq.$$

Дискретная СВ X имеет *распределение Пуассона*, если она принимает значения $0, 1, \dots, \infty$ со следующими вероятностями:

$$p(X=i) = p_i = \frac{a^i}{i!} e^{-a}, \quad (7.3)$$

где a – параметр распределения ($a = n \times p, a > 0$).

Числовые характеристики пуассоновской СВ: $m_X = a, D_X = a$.

Непрерывная СВ X имеет *равномерное* распределение, если ее плотность вероятности в некотором интервале $[a; b]$ постоянна, т. е. если все значения X в этом интервале равновероятны:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & x > b. \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases} \quad (7.4)$$

Числовые характеристики равномерно распределенной СВ:

$$m_X = \frac{a+b}{2}, D_X = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Непрерывная СВ T , принимающая только положительные значения, имеет *экспоненциальное* распределение, если ее плотность вероятности и функция распределения равны:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (7.5)$$

где λ – параметр распределения ($\lambda > 0$).

Числовые характеристики экспоненциальной СВ: $m_T = 1/\lambda, D_T = 1/\lambda^2$.

Непрерывная СВ X имеет *нормальное* распределение, если ее плотность вероятности и функция распределения равны:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad F(x) = 0.5 + \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right), \quad (7.6)$$

где m, σ – параметры распределения ($\sigma > 0$), $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функция Лапласа.

Значения функции Лапласа приведены в прил. 2. При использовании таблицы значений функции Лапласа следует учитывать, что $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, $\Phi(0) = 0$, $\Phi(\infty) = 0,5$.

Числовые характеристики нормальной СВ:

$$m_X = m, D_X = \sigma^2, \alpha_k(x) = k! \sum_{i=0}^{I[k/2]} \frac{m^{k-2i} (\sigma/2)^i}{(k-2i)! i!},$$

$$\mu_k(x) = \begin{cases} 0, & k - \text{нечетное,} \\ \frac{k!}{(k/2)!} \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^{k/2}, & k - \text{четное.} \end{cases}$$

Задачи.

7.1. Две игральные кости одновременно бросают два раза. Написать закон распределения дискретной случайной величины X – числа выпадений четного числа очков на двух игровых костях, а также определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

Ответ:

X	0	1	2
p	9/16	6/16	1/16

$m_x = 0,5; D_x = 0,875.$

7.2. После ответа студента на вопросы экзаменационного билета экзаменатор задает студенту дополнительные вопросы. Преподаватель прекращает задавать дополнительные вопросы, как только студент обнаруживает незнание заданного вопроса. Вероятность того, что студент ответит на любой заданный дополнительный вопрос, равна 0,9. Требуется определить закон распределения случайной дискретной величины X – числа дополнительных вопросов, которые задаст преподаватель студенту, а также найти наиболее вероятное число (m) заданных студенту дополнительных вопросов.

Ответ: $m = 1.$

7.3. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени T равна 0,002. Найти вероятность того, что за время T откажут ровно 3 элемента.

Ответ: $P = 0,18.$

7.4. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего деления. Определить вероятность, что при отсчете будет сделана ошибка: а) меньшая 0,04; б) большая 0,05.

$$\text{Ответ: а) } P(0 < X < 0,04) + P(0 < X < 0,04) = 0,4;$$

$$\text{б) } P(0,05 < X < 0,15) = 0,5.$$

7.5. Минутная стрелка часов двигается скачкообразно в конце каждой минуты. Найти вероятность, что в данное мгновение часы покажут время, отличающееся от истинного не более, чем на 20 секунд.

$$\text{Ответ: } P(0 < X < 20) + P(40 < X < 60) = 2/3.$$

7.6. Автомат штампует детали. Контролируется длина детали X , которая распределена нормально с математическим ожиданием 50 мм. Фактически длина изготовленных деталей составляет не менее 32 мм и не более 68 мм. Найти вероятность, что длина наудачу взятой детали: а) больше 55 мм; б) меньше 40 мм.

$$\text{Ответ: а) } P(55 < X < 68) = 0,0823;$$

$$\text{б) } P(32 < X < 40) = 0,0027.$$

7.7. Автомат изготавливает шарики. Шарик считается годным, если отклонение X диаметра шарика от проектного размера по абсолютной величине меньше 0,7 мм. Считая, что случайная величина распределена нормально с параметром $\sigma = 0,4$ мм, определить сколько в среднем будет годных шариков среди 100 изготовленных.

$$\text{Ответ: } P = 0,92.$$

7.8. Среднее время работы каждого из 3 независимых элементов, входящих в техническое устройство равно 750 ч. Для безотказной работы устройства необходима безотказная работа хотя бы одного из трех этих элементов. Определить вероятность того, что устройство будет работать от 450 до 600 ч, если время работы каждого из трех элементов независимо и распределено по показательному закону.

$$\text{Ответ: } P = 0,279.$$

7.9. Время T обнаружения цели радиолокатором распределено по показательному закону. Найти вероятность того, что цель будет обнаружена за время от 5 до 15 с после начала поиска, если среднее время обнаружения цели равно 10 с.

$$\text{Ответ: } P = 0,383.$$

8. Функция одного случайного аргумента

Если X – непрерывная случайная величина, то плотность вероятности $g(y)$ величины Y определяется по формуле

$$g(y) = \sum_{j=1}^k f(\psi_j(y)) \cdot |\psi'_j(y)|, \quad (8.1)$$

где $f(x)$ – плотность вероятности величины X ;

$\psi_j(y)$ – функции, обратные функции $\varphi(x)$;

k – число обратных функций для данного y .

Числовые характеристики функции $Y = \varphi(X)$ одного случайного аргумента X определяются по следующим формулам:

– начальные моменты:

$$\alpha_k(y) = M[Y^k] = M[\varphi^k(x)] = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \varphi^k(x_i) p_i, & \text{для ДСВ,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^k(x) f(x) dx, & \text{для НСВ;} \end{cases} \quad (8.2)$$

– математическое ожидание:

$$m_y = M[Y] = M[\varphi(x)] = \alpha_1(x); \quad (8.3)$$

– центральные моменты:

$$\mu_k(y) = M[(Y - m_Y)^k] = \begin{cases} \sum_{i=1}^n (\varphi(x_i) - m_y)^k p_i, & \text{для ДСВ,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x) - m_y)^k f(x) dx, & \text{для НСВ;} \end{cases} \quad (8.4)$$

– дисперсия:

$$D_Y = \mu_2(y) = M[(Y - m_Y)^2] = \alpha_2(y) - m_Y^2. \quad (8.5)$$

Пример 8.1: Случайная величина X задана плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, x > 2, \\ x^2/2, & -1 < x \leq 2. \end{cases}$$

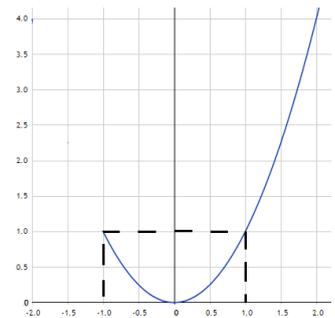
Определить плотность распределения случайной величины $Y = X^2$, математическое ожидание и дисперсию случайной величины Y .

Решение:

Определим плотность распределения, воспользовавшись формулой (8.1).

Для этого построим график $Y = X^2$ на интервале $(-1; 2)$ и определим количество обратных функций на интервалах.

Из графика видно, что на интервале $(0; 1)$ у Y существует две обратные функции, на участке $(1; 4)$ – одна. На



оставшихся промежутках обратных функций не существует.

$$y \in (-\infty; 0] \cup y \in (4; \infty) \quad g(y) = 0;$$

$$y \in (0; 1] \quad \psi_1(y) = -\sqrt{y}, \quad \psi_2(y) = \sqrt{y}, \quad |\psi_{1,2}(y)| = \frac{1}{2\sqrt{y}} \Rightarrow g(y) = \frac{2(-\sqrt{y})^2}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}}{2};$$

$$y \in (1; 4] \quad \psi_3(y) = -\sqrt{y}, \quad |\psi_3(y)| = \frac{1}{2\sqrt{y}} \Rightarrow g(y) = \frac{(\sqrt{y})^2}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}}{4}.$$

Мы определили плотность распределения случайной величины Y :

$$g(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \cup y > 4, \\ \frac{1}{2} y^{1/2}, & 0 < y \leq 1, \\ \frac{1}{4} y^{1/2}, & 1 < y \leq 4. \end{cases}$$

Далее определим математическое ожидание, начальный момент второго порядка и дисперсию случайной величины Y :

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot g(y) dy = \int_0^1 y \cdot \frac{1}{3} y^{1/2} dy + \int_1^4 y \cdot \frac{1}{6} y^{1/2} dy = \frac{1}{3} \int_0^1 y^{3/2} dy + \frac{1}{6} \int_1^4 y^{3/2} dy =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5} y^{5/2} \right) \Big|_0^1 + \frac{1}{6} \left(\frac{2}{5} y^{5/2} \right) \Big|_1^4 = \frac{2}{15} (1-0) + \frac{1}{15} (32-1) = \frac{11}{5},$$

$$\alpha_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot g(y) dy = \int_0^1 y^2 \cdot \frac{1}{3} y^{1/2} dy + \int_1^4 y^2 \cdot \frac{1}{6} y^{1/2} dy = \frac{1}{3} \int_0^1 y^{5/2} dy + \frac{1}{6} \int_1^4 y^{5/2} dy =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{7} y^{7/2} \right) \Big|_0^1 + \frac{1}{6} \left(\frac{2}{7} y^{7/2} \right) \Big|_1^4 = \frac{2}{21} (1-0) + \frac{1}{21} (128-1) = \frac{43}{7},$$

$$D_y = \alpha_2(y) - m_y^2 = \frac{228}{175}.$$

Задачи

8.1. Случайная величина X равномерно распределена на интервале $(0; 2)$. Случайная величина $Y = X^2$. Определить функцию распределения случайной величины Y .

$$\text{Ответ: } F(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ 0,4\sqrt{y}, & 0 < y \leq 4, \\ \frac{\sqrt{y} + 2}{5}, & 4 < y \leq 9, \\ 1, & y > 9. \end{cases}$$

8.2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, x > \frac{\pi}{2}, \\ \frac{2}{\pi}, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Определить плотностью распределения случайной величины $Y = \sin(X)$.

$$\text{Ответ: } f(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, y > 1, \\ \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

8.3. Случайная величина X задана плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, x > \frac{\pi}{2}, \\ \cos x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Определить математическое ожидание случайной величины $Y = X^2$.

$$\text{Ответ: } m_y = \frac{(\pi^2 - 8)}{2}.$$

8.4. Ребро куба измерено приблизительно, причем $0 \leq x \leq 0,2$. Рассматривая ребро куба как случайную величину, равномерно распределенную в интервале $(0; 0,2)$ определить математическое ожидание объема куба.

$$\text{Ответ: } m_y = 0,002.$$

8.5. Случайная величина X равномерно распределена с числовыми характеристиками: $m_x = 1, \sigma = 3\sqrt{3}$. Определить закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = \text{sign}X$.

Ответ:

y	-1	1
p	4/9	5/9

$$m_y = 1/9, D_y = 80/81$$

8.6. Закон распределения ошибок при измерении радиуса r круга – нормальный с математическим ожиданием $m = 50$ и дисперсией $D = 0,25$. Определить закон распределения ошибок при вычислении площади круга.

$$\text{Ответ: } f(Y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ \frac{1}{\pi\sqrt{2y}} e^{-\frac{(\sqrt{y}-50\sqrt{\pi})^2}{\pi}}. \end{cases}$$

8.7. Случайная величина X распределена по нормальному закону распределения $m = 2$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = 1$. Определить закон распределения случайной величины $Y = |X|$.

$$\text{Ответ: } f(Y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ \frac{1}{\pi\sqrt{2y}} e^{-2\frac{(\sqrt{y}-50\sqrt{\pi})^2}{\pi}}, & 0 < y < 4, \\ 0, & y \geq 4. \end{cases}$$

8.8. Случайная величина X равномерна распределена в интервале $(0; 1)$. Определить закон распределения случайной величины $Y = 4X^3$, математическое ожидание и дисперсию случайной величины Y .

$$\text{Ответ: } f(Y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \text{ или } y > 4, \\ \frac{1}{3\sqrt[3]{4y^2}}, & 0 < y \leq 4, \end{cases}$$

$$m_y = 1, D_y = \frac{9}{7}.$$

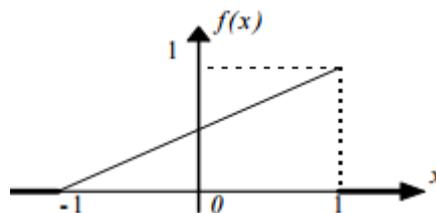
8.9. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 0,25x^2, & 0 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = 2X + 5$.

$$\text{Ответ: } m_y = \frac{23}{3}, D_y = \frac{8}{9}.$$

8.10. Случайная величина X имеет плотность распределения $f(x)$, заданную графиком:



Случайная величина Y связана с X зависимостью $Y = 1 - X^2$. Определить плотность распределения случайной величины Y .

$$\text{Ответ: } f(y) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-y}}\right), & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & y \notin [0;1]. \end{cases}$$

9. Векторные случайные величины

Функцией распределения двумерной случайной величины называется вероятность совместного выполнения двух событий $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$:

$$F(x, y) = p(\{X < x\} \cdot \{Y < y\}). \quad (9.1)$$

Свойства двумерной функции распределения:

1. $0 \leq F(x, y) \leq 1$.
2. $F(x, +\infty) = F_X(x)$; $F(+\infty, y) = F_Y(y)$; $F(+\infty, +\infty) = 1$.
3. $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0$.
4. $F(x_1, y) \leq F(x_2, y)$, если $x_2 > x_1$;
 $F(x, y_1) \leq F(x, y_2)$, если $y_2 > y_1$.

Функция распределения может задаваться для непрерывных и дискретных случайных величин.

Для непрерывной двумерной случайной величины (X, Y) существует двумерная плотность распределения:

$$f(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{p(\{x \leq X < x + \Delta x\} \cap \{y \leq Y < y + \Delta y\})}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}. \quad (9.2)$$

Свойства двумерной плотности:

1. $f(x, y) \geq 0$.
2. $F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy. \quad (9.3)$

$$3. p\{(X, Y) \in D\} = \iint_{(D)} f(x, y) dx dy. \quad (9.4)$$

$$4. \text{Условие нормировки } \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1. \quad (9.5)$$

$$5. f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy; \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx. \quad (9.6)$$

Для дискретных случайных величин (X, Y) закон распределения задается матрицей распределения, содержащей вероятности p_{ij} появления всех возможных пар значений (x_i, y_j) :

$$p_{ij} = p(X = x_i, Y = y_j), \quad (9.7)$$

удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} = 1. \quad (9.8)$$

Одномерные ряды вероятностей, составляющих X, Y , определяются по формулам:

$$p_i = p(X = x_i) = \sum_{j=1}^m p_{ij}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (9.9)$$

$$p_j = p(Y = y_j) = \sum_{i=1}^n p_{ij}, j = 1, \dots, m. \quad (9.10)$$

Условным законом распределения называется распределение одной случайной величины, найденное при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение.

Условные плотности для непрерывных составляющих X и Y определяются по следующим формулам:

$$f(x/y) = f(x, y)/f_Y(y), \text{ для } f_Y(y) \neq 0; \quad (9.11)$$

$$f(y/x) = f(x, y)/f_X(x), \text{ для } f_X(x) \neq 0. \quad (9.12)$$

Условные ряды распределения для дискретных составляющих X и Y определяются по следующим формулам:

$$p_{i/j} = p(X = x_i/Y = y_j) = p_{ij}/p(Y = y_j), i = 1, \dots, N, \quad (9.13)$$

$$p_{j/i} = p(Y = y_j/X = x_i) = p_{ij}/p(X = x_i), j = 1, \dots, M. \quad (9.14)$$

Величина X *независима* от величины Y , если ее закон распределения не зависит от того, какое значение приняла величина Y . Для независимых величин выполняются следующие соотношения:

$$1) F(x, y) = p(X < x, Y < y) = p(X < x)p(Y < y) = F_X(x)F_Y(y), \forall x, y; \quad (9.15)$$

$$2) \text{ для непрерывных } - f(x, y) = f_X(x)f_Y(y), \forall x, y; \quad (9.16)$$

$$3) \text{ для дискретных } - p_{ij} = p_i p_j, \text{ для } \forall i, j. \quad (9.17)$$

Смешанный начальный момент порядка $k + s$ равен математическому ожиданию произведения X^k и Y^s :

$$\alpha_{k,s}(x, y) = M[X^k Y^s] = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i^k y_j^s p_{i,j} \text{ для ДСВ,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^k y^s f(x, y) dx dy \text{ для НСВ.} \end{cases} \quad (9.18)$$

Смешанный центральный момент порядка $k + s$ равен математическому ожиданию произведения центрированных величин $\overset{\circ}{X}^k$ и $\overset{\circ}{Y}^s$:

$$\mu_{k,s}(x, y) = M[(X - m_X)^k (Y - m_Y)^s] = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - m_x)^k (y_j - m_y)^s p_{i,j} \text{ для ДСВ,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k (y - m_y)^s f(x, y) dx dy \text{ для НСВ,} \end{cases} \quad (9.19)$$

где p_{ij} – элементы матрицы вероятностей дискретной величины (X, Y) ;

$f(x, y)$ – совместная плотность вероятности непрерывной величины (X, Y) .

Рассмотрим наиболее часто используемые начальные и центральные моменты:

$$m_X = \alpha_{1,0}(x, y), m_Y = \alpha_{0,1}(x, y), \quad (9.20)$$

$$D_X = \mu_{2,0}(x, y) = \alpha_{2,0}(x, y) - m_X^2, \quad D_Y = \mu_{0,2}(x, y) = \alpha_{0,2}(x, y) - m_Y^2. \quad (9.21)$$

Корреляционный момент K_{XY} характеризует степень тесноты линейной зависимости величин X и Y и рассеивание относительно точки (m_X, m_Y) :

$$K_{XY} = \mu_{1,1}(x, y) = \alpha_{1,1}(x, y) - m_X m_Y. \quad (9.22)$$

Коэффициент корреляции R_{XY} характеризует степень линейной зависимости величин:

$$R_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sqrt{D_X D_Y}} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}. \quad (9.23)$$

Для любых случайных величин $|R_{XY}| \leq 1$.

Если величины X и Y независимы, то $R_{XY} = 0$.

Пример 9.1: Плотность вероятности двумерной случайной величины (X, Y) равна:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, x > \frac{\pi}{2}, y \leq 0, y > \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\sin(x+y)}{2}, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, 0 < y \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Определить функцию распределения случайной величины (X, Y) и коэффициент корреляции случайных величин X и Y .

Решение:

Определим функцию распределения двумерной случайной величины (X, Y) по формуле (9.3):

$$1) \quad x \leq 0, y \leq 0, \quad F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y 0 dx dy = 0;$$

$$2) \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, 0 < y \leq \frac{\pi}{2} \quad F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy = \\ = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y 0 dx dy + \int_0^x \int_0^y \frac{\sin(x+y)}{2} dx dy = \frac{\sin x + \sin y - \sin(x+y)}{2};$$

$$3) \quad x > \frac{\pi}{2}, y > \frac{\pi}{2} \quad F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy = \\ = \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 0 dx dy + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x+y)}{2} dx dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^x \int_{\frac{\pi}{2}}^y 0 dx dy = 1.$$

Далее определим математические ожидания составляющих вектора случайных величин по формуле (9.18):

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \frac{\sin(x+y)}{2} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot (\sin x + \cos x) dx = \frac{\pi}{4}.$$

Математическое ожидание Y вычисляется аналогично, т. е. $m_x = m_y = \frac{\pi}{4}$.

Определим дисперсии составляющих вектора случайных величин по формуле (9.19):

$$\begin{aligned} \alpha_{2,0}(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot \frac{\sin(x+y)}{2} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot (\sin x + \cos x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left((2 \cos x + 2x \sin x - x^2 \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (x^2 \cos x - \cos x - x \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2} - 2. \end{aligned}$$

Таким образом, $D_x = \alpha_2(x) - m_x^2 = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2 = D_y$.

Далее определим смешенный начальный момент (1, 1) порядка по (9.18):

$$\begin{aligned} \alpha_{1,1}(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot y \cdot \frac{\sin(x+y)}{2} dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot y \cdot (\sin x + \cos x) dx = \pi - 2. \end{aligned}$$

По формуле (22) получим ковариацию:

$$K_{XY} = \mu_{1,1}(x, y) = \alpha_{1,1}(x, y) - m_x m_y = \frac{\pi - 2}{2} - \frac{\pi^2}{16}.$$

Отсюда по формуле (9.23) получим коэффициент корреляции двух случайных величин X и Y : $R_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sqrt{D_X D_Y}} = -0,245$.

Задачи

9.1. Передаются два сообщения, каждое из которых может быть либо искажено, либо не искажено. Вероятность искажения при передаче первого сообщения составляет 0,1, вероятность искажения при передаче второго – 0,3. Случайная величина X принимает значение 1, если первое сообщение искажено, и 0 в обратном случае; случайная величина Y принимает значение 1, если второе сообщение искажено, и 0 в обратном случае (индикаторы событий). Составить одномерные ряды распределения, закон распределения случайных величин X , Y и исследовать их зависимость; описать закон распределения случайной величины (X, Y) .

Ответ: Одномерные ряды распределения:

y_i	$y_1 = 0$	$y_2 = 1$
p_i	0,7	0,3

x_i	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$
p_i	0,9	0,1

Случайные величины X, Y независимы.

	$y_1 = 0$	$y_2 = 1$
$x_1 = 0$	0,63	0,27
$x_2 = 1$	0,07	0,03

9.2. Два стрелка независимо друг от друга производят по одному выстрелу, каждый по своей мишени. Случайная величина X – число попаданий первого стрелка, случайная величина Y – второго стрелка. Вероятность попадания для первого стрелка составляет 60 %, а для второго – 85 %. Построить ряд распределения случайной величины (X, Y) .

Ответ:

	$y_1 = 0$	$y_2 = 1$
$x_1 = 0$	0,06	0,34
$x_2 = 1$	0,09	0,51

9.3. Двухмерная дискретная случайная величина задана законом распределения:

	$y_1 = 5$	$y_2 = 6$
$x_1 = 1$	0,1	0,4
$x_2 = 2$	0,2	0,3

Определить, являются ли случайные величины X, Y независимыми.

Ответ: Случайные величины X и Y являются зависимыми.

9.4. Две игральные кости бросают по одному разу. Обозначим через X количество очков, выпавшее на первой кости, а через Y – на второй. Определить, являются ли случайные величины X, Y зависимыми.

Ответ: Случайные величины X и Y являются независимыми.

9.5. По цели производится 2 независимых выстрела. Вероятность попадания в цель при первом выстреле равна 0,4, при втором – 0,7. X – число попаданий при первом выстреле, Y – при втором. Построить таблицу распределения системы (X, Y) ; найти функцию распределения системы; найти числовые характеристики системы.

Ответ: $m_x = 0,4; D_x = 0,24; m_y = 0,7; D_y = 0,21$.

	$x = 0$	$x = 1$
$y = 0$	0,18	0,12
$y = 1$	0,42	0,28

9.6. Положение случайной точки (X, Y) равномерно в любой точке круга радиусом 2, центр которого совпадает с началом координат. Определить

плотность распределения и функцию распределения каждой составляющей X и Y . Определить зависимость составляющих.

$$\text{Ответ: } f(x, y) = \begin{cases} 0, & x^2 + y^2 > 4, \\ \frac{1}{4\pi}, & x^2 + y^2 \leq 4, \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2}, \quad f(y) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - y^2}.$$

9.7. Есть две независимые случайные величины: X распределена по нормальному закону распределения с параметрами $m_x = 0$, $\sigma_x = 1/\sqrt{2}$. Случайная величина Y распределена равномерно на интервале $(0; 1)$. Описать плотность распределения $f(X, Y)$ и функцию распределения $F(X, Y)$ для системы (X, Y) .

$$\text{Ответ: } f(X, Y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, & \text{при } y \in (0, 1), \\ 0, & \text{при } y \notin (0, 1), \end{cases}$$

$$F(X, Y) = F_1(x) = F_2(y) = \begin{cases} 0, & \text{при } y \leq 0, \\ y\Phi(x\sqrt{2}), & \text{при } 0 < y \leq 1, \\ \Phi(x\sqrt{2}), & \text{при } y > 1. \end{cases}$$

9.8. Двухмерная случайная величина задана функцией распределения

$$F(X, Y) = \begin{cases} \sin x * \sin y, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$$

Определить вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0, x = \frac{\pi}{4}, y = \frac{\pi}{6}, y = \frac{\pi}{3}$.

Ответ: $p = 0,26$.

9.9. Плотность вероятности двухмерной случайной величины (X, Y) равна

$$f(x, y) = \begin{cases} C, & x > 0, y > 0, x + y < 2, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найти константу C и коэффициент корреляции X и Y .

Ответ: $C = 0,5; R_{XY} = -0,5$.

9.10. В первом квадранте задана функция распределения системы двух случайных величин:

$$F(X, Y) = 1 + 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y}.$$

Определить: а) двухмерную плотность системы; б) вероятность попадания случайной точки (X, Y) в треугольник с вершинами $A(1, 3), B(3, 3)$ и $C(2, 8)$.

$$\text{Ответ: а) } f(X, Y) = \begin{cases} \ln^2 2 \cdot 2^{-x-y}, & \text{в первом квадранте,} \\ 0, & \text{вне квадранта.} \end{cases}$$

$$\text{б) } p = 5/13 \cdot 2^{12}.$$

9.11. Задана плотность совместного распределения двумерной случайной величины (X, Y)

$$f(X, Y) = \begin{cases} 2xye^{-(x^2+y^2)}, & x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & x < 0, y < 0. \end{cases}$$

Определить плотности распределения составляющих X, Y , математические ожидания и дисперсии X, Y , а также определить коэффициент корреляции между случайными величинами X и Y .

$$\text{Ответ: } f(x) = \begin{cases} xe^{-x^2}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad f(y) = \begin{cases} ye^{-y^2}, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0, \end{cases}$$

$$m_x = m_y = \frac{\sqrt{\pi}}{4}, D_x = D_y = \frac{8-\pi}{16}, R_{xy} = 0.$$

9.12. Заданы плотности распределения независимых составляющих непрерывной двумерной случайной величины (X, Y) :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 5e^{-5x}, & x > 0, \end{cases} \quad f(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ 5e^{-2y}, & y > 0. \end{cases}$$

Определить плотность совместного распределения и функцию распределения системы.

$$\text{Ответ: } f(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0, y < 0, \\ 10e^{-(5x+2y)}, & x > 0, y > 0, \end{cases}$$

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0, y < 0, \\ (1 - e^{-5x})(1 - e^{-2y}), & x > 0, y > 0. \end{cases}$$

9.13. Две независимые случайные величины X и Y распределены по равномерному закону ($1 < X < 3$; $2 < Y < 6$). Найти вероятность, что $X > Y$.

$$\text{Ответ: } 1/16 = 0,0625.$$

9.14. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 0,25x^2, & 0 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Определить коэффициент корреляции случайных величин X и $Y = 2X + 5$.

$$\text{Ответ: } R_{xy} = 1.$$