

**Задание 4.3.** Построить линии уровня функции и вычислить производную по заданному направлению. В решении указать к какому виду кривых (окружность, эллипс, гипербола, парабола) относятся линии уровня в задании.

**4.3.1.** Найти скорость изменения скалярного поля  $u = x^2 - 4x + y^2 + y$  в точке  $P_0 = (1; 1)$  в направлении вектора  $\vec{\omega} = -0,9\vec{i} + 4\vec{j}$  и в направлении наискорейшего роста поля. Построить несколько линий уровня скалярного поля, в том числе линию, проходящую через точку  $P_0$ . В точке  $P_0$  построить вектор  $\vec{\omega}$  и указать направление наискорейшего роста поля.

**4.3.2.** Найти скорость изменения скалярного поля  $u = x^2 + 2x + y^2$  в точке  $P_0 = (1; -1)$  в направлении вектора  $\vec{\omega} = 1,2\vec{i} + 0,5\vec{j}$  и в направлении наискорейшего роста поля. Построить несколько линий уровня скалярного поля, в том числе линию, проходящую через точку  $P_0$ . В точке  $P_0$  построить вектор  $\vec{\omega}$  и указать направление наискорейшего роста поля.

**4.3.3.** Найти скорость изменения скалярного поля  $u = 3y - x^2$  в точке  $P_0 = (-3; 0)$  в направлении наискорейшего роста поля и в направлении вектора  $\overrightarrow{P_0P_1}$ , где  $P_1 = (1, 2; 4)$ . Построить несколько линий уровня скалярного поля, в том числе линию, проходящую через точку  $P_0$ . В точке  $P_0$  построить вектор  $\overrightarrow{P_0P_1}$  и указать направление наискорейшего роста поля.

**4.3.4.** Найти скорость изменения скалярного поля  $u = 4x^2 + y^2 - 2y$  в точке  $P_0 = (1; 3)$  в направлении наискорейшего роста поля и в направлении вектора  $\vec{\omega}$ , образующего угол  $45^\circ$  с положительным направлением оси  $Ox$ . Построить несколько линий уровня скалярного поля, в том числе линию, проходящую через точку  $P_0$ . В точке  $P_0$  построить вектор  $\vec{\omega}$  и указать направление наискорейшего роста поля.

**4.3.5.** Найти скорость изменения скалярного поля  $u = x + y^2 + 2y$  в точке  $P_0 = (-2; 1)$  в направлении наискорейшего роста поля и в направлении вектора  $\overrightarrow{P_0P_1}$ , где  $P_1 = (0, 4; 1, 7)$ . Построить несколько линий уровня скалярного поля, в том числе линию, проходящую через точку  $P_0$ . В точке  $P_0$  построить вектор  $\overrightarrow{P_0P_1}$  и указать направление наискорейшего роста поля.

**4.3.6.** Найти скорость изменения скалярного поля  $u = x^2 - 3x + y^2$  в точке  $P_0 = (0; 2)$  в направлении вектора  $\vec{\omega} = -0,5\vec{i} + 1,2\vec{j}$  и в направлении наискорейшего роста поля. Построить несколько линий уровня скалярного поля, в том числе линию, проходящую через точку  $P_0$ . В точке  $P_0$  построить вектор  $\vec{\omega}$  и указать направление наискорейшего роста поля.

**4.3.7.** Найти скорость изменения скалярного поля  $u = y^2 - x^2$  в точке  $P_0 = (-2; 0,5)$  в направлении наискорейшего роста поля и в направлении вектора  $\overrightarrow{P_0P_1}$ , где  $P_1 = (2; -0,4)$ . Построить несколько линий уровня скалярного поля, в том числе линию, проходящую через точку  $P_0$ . В точке  $P_0$  построить вектор  $\overrightarrow{P_0P_1}$  и указать направление наискорейшего роста поля.

**4.3.8.** Найти скорость изменения скалярного поля  $u = x^2 + 4x + 4y^2 + 4y$  в точке  $P_0 = (-1; 1)$  в направлении наискорейшего роста поля и в направлении вектора  $\vec{\omega}$ , образующего угол  $120^\circ$  с положительным направлением оси  $Ox$ . Построить несколько линий уровня скалярного поля, в том числе линию, проходящую через точку  $P_0$ . В точке  $P_0$  построить вектор  $\vec{\omega}$  и указать направление наискорейшего роста поля.

**4.3.9.** Найти скорость изменения скалярного поля  $u = 3x - x^2 - y$  в точке  $P_0 = (1; -2)$  в направлении вектора  $\vec{\omega} = 0,7\vec{i} - 2,4\vec{j}$  и в направлении наискорейшего роста поля. Построить несколько линий уровня скалярного поля, в том числе линию, проходящую через точку  $P_0$ . В

точке  $P_0$  построить вектор  $\vec{\omega}$  и указать направление наискорейшего роста поля.

**4.3.10.** Найти скорость изменения скалярного поля  $u = 4y - y^2 - x^2$  в точке  $P_0 = (-2; 1)$  в направлении наискорейшего роста поля и в направлении вектора  $\overrightarrow{P_0P_1}$ , где  $P_1 = (2; -2)$ . Построить несколько линий уровня скалярного поля, в том числе линию, проходящую через точку  $P_0$ . В точке  $P_0$  построить вектор  $\overrightarrow{P_0P_1}$  и указать направление наискорейшего роста поля.

**4.3.11.** Найти скорость изменения скалярного поля  $u = x^2 - y^2 - 2y$  в точке  $P_0 = (2; 0)$  в направлении вектора  $\vec{\omega} = \vec{i} - 2,4\vec{j}$  и в направлении наискорейшего роста поля. Построить несколько линий уровня скалярного поля, в том числе линию, проходящую через точку  $P_0$ . В точке  $P_0$  построить вектор  $\vec{\omega}$  и указать направление наискорейшего роста поля.

**4.3.12.** Найти скорость изменения скалярного поля  $u = x^2 + y^2 - 4y$  в точке  $P_0 = (-1; 0)$  в направлении вектора  $\vec{\omega} = -2\vec{i} - 1,5\vec{j}$  и в направлении наискорейшего роста поля. Построить несколько линий уровня скалярного поля, в том числе линию, проходящую через точку  $P_0$ . В точке  $P_0$  построить вектор  $\vec{\omega}$  и указать направление наискорейшего роста поля.

**4.3.13.** Найти скорость изменения скалярного поля  $u = 4y + x^2$  в точке  $P_0 = (-2; 1)$  в направлении наискорейшего роста поля и в направлении вектора  $\overrightarrow{P_0P_1}$ , где  $P_1 = (-0, 2; -7)$ . Построить несколько линий уровня скалярного поля, в том числе линию, проходящую через точку  $P_0$ . В точке  $P_0$  построить вектор  $\overrightarrow{P_0P_1}$  и указать направление наискорейшего роста поля.

**4.3.14.** Найти скорость изменения скалярного поля  $u = x^2 + 4x + 2y^2$  в точке  $P_0 = (0; 2)$  в направлении наискорейшего роста поля и в направлении вектора  $\vec{\omega}$ , образующего угол  $30^\circ$  с положительным направлением оси  $Ox$ . Построить несколько линий уровня

скалярного поля, в том числе линию, проходящую через точку  $P_0$ . В точке  $P_0$  построить вектор  $\vec{\omega}$  и указать направление наискорейшего роста поля.

**4.3.15.** Найти скорость изменения скалярного поля  $u = 3xu$  в точке  $P_0 = (1; -3)$  в направлении наискорейшего роста поля и в направлении вектора  $\overrightarrow{P_0P_1}$ , где  $P_1 = (-3, 8; -1, 6)$ . Построить несколько линий уровня скалярного поля, в том числе линию, проходящую через точку  $P_0$ . В точке  $P_0$  построить вектор  $\overrightarrow{P_0P_1}$  и указать направление наискорейшего роста поля.

**4.3.16.** Найти скорость изменения скалярного поля  $u = x^2 + 2x + y^2 - 2y$  в точке  $P_0 = (1; -1)$  в направлении вектора  $\vec{\omega} = 2\vec{i} - 4,8\vec{j}$  и в направлении наискорейшего роста поля. Построить несколько линий уровня скалярного поля, в том числе линию, проходящую через точку  $P_0$ . В точке  $P_0$  построить вектор  $\vec{\omega}$  и указать направление наискорейшего роста поля.

**4.3.17.** Найти скорость изменения скалярного поля  $u = 2x^2 - y^2$  в точке  $P_0 = (2; -5)$  в направлении наискорейшего роста поля и в направлении вектора  $\overrightarrow{P_0P_1}$ , где  $P_1 = (6; -2)$ . Построить несколько линий уровня скалярного поля, в том числе линию, проходящую через точку  $P_0$ . В точке  $P_0$  построить вектор  $\overrightarrow{P_0P_1}$  и указать направление наискорейшего роста поля.

**4.3.18.** Найти скорость изменения скалярного поля  $u = x^2 + 4y^2 - 4y$  в точке  $P_0 = (-2; 0)$  в направлении наискорейшего роста поля и в направлении вектора  $\vec{\omega}$ , образующего угол  $2\pi/3$  с положительным направлением оси  $Oy$ . Построить несколько линий уровня скалярного поля, в том числе линию, проходящую через точку  $P_0$ . В точке  $P_0$  построить вектор  $\vec{\omega}$  и указать направление наискорейшего роста поля.

**4.3.19.** Найти скорость изменения скалярного поля  $u = 3x + y^2 - 2y$  в точке  $P_0 = (-3; -1)$  в направлении вектора

$\vec{\omega} = 4,2\vec{i} - 4\vec{j}$  и в направлении наискорейшего роста поля. Построить несколько линий уровня скалярного поля, в том числе линию, проходящую через точку  $P_0$ . В точке  $P_0$  построить вектор  $\vec{\omega}$  и указать направление наискорейшего роста поля.

**4.3.20.** Найти скорость изменения скалярного поля  $u = 6x - x^2 - y^2$  в точке  $P_0 = (2; 2)$  в направлении наискорейшего роста поля и в направлении вектора  $\overrightarrow{P_0P_1}$ , где  $P_1 = (4; 0,5)$ . Построить несколько линий уровня скалярного поля, в том числе линию, проходящую через точку  $P_0$ . В точке  $P_0$  построить вектор  $\overrightarrow{P_0P_1}$  и указать направление наискорейшего роста поля.

**4.3.21.** Найти скорость изменения скалярного поля  $u = x^2 - y^2 + 2x$  в точке  $P_0 = (-3; 1)$  в направлении вектора  $\vec{\omega} = -7,2\vec{i} - 2,1\vec{j}$  и в направлении наискорейшего роста поля. Построить несколько линий уровня скалярного поля, в том числе линию, проходящую через точку  $P_0$ . В точке  $P_0$  построить вектор  $\vec{\omega}$  и указать направление наискорейшего роста поля.

**4.3.22.** Найти скорость изменения скалярного поля  $u = 6x - x^2 - y^2$  в точке  $P_0 = (2; 3)$  в направлении вектора  $\vec{\omega} = 5,1\vec{i} - 14\vec{j}$  и в направлении наискорейшего роста поля. Построить несколько линий уровня скалярного поля, в том числе линию, проходящую через точку  $P_0$ . В точке  $P_0$  построить вектор  $\vec{\omega}$  и указать направление наискорейшего роста поля.

**4.3.23.** Найти скорость изменения скалярного поля  $u = 4y^2 - x + 8y$  в точке  $P_0 = (2; 0)$  в направлении наискорейшего роста поля и в направлении вектора  $\overrightarrow{P_0P_1}$ , где  $P_1 = (6; 3)$ . Построить несколько линий уровня скалярного поля, в том числе линию, проходящую через точку  $P_0$ . В точке  $P_0$  построить вектор  $\overrightarrow{P_0P_1}$  и указать направление наискорейшего роста поля.

**4.3.24.** Найти скорость изменения скалярного поля  $u = 2x - x^2 + 4y - 4y^2$  в точке  $P_0 = (-1; 1)$  в направлении наискорейшего роста поля и в направлении вектора  $\vec{\omega}$ , образующего угол  $30^\circ$  с

положительным направлением оси  $Ox$ . Построить несколько линий уровня скалярного поля, в том числе линию, проходящую через точку  $P_0$ . В точке  $P_0$  построить вектор  $\vec{\omega}$  и указать направление наискорейшего роста поля.

**4.3.25.** Найти скорость изменения скалярного поля  $u = xy - 2x$  в точке  $P_0 = (-2; 0)$  в направлении наискорейшего роста поля и в направлении вектора  $\overrightarrow{P_0P_1}$ , где  $P_1 = (-1, 5; -1, 2)$ . Построить несколько линий уровня скалярного поля, в том числе линию, проходящую через точку  $P_0$ . В точке  $P_0$  построить вектор  $\overrightarrow{P_0P_1}$  и указать направление наискорейшего роста поля.

**4.3.26.** Найти скорость изменения скалярного поля  $u = x^2 - y^2$  в точке  $P_0 = (-1; 2)$  в направлении вектора  $\vec{\omega} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$  и в направлении наискорейшего роста поля. Построить несколько линий уровня скалярного поля, в том числе линию, проходящую через точку  $P_0$ . В точке  $P_0$  построить вектор  $\vec{\omega}$  и указать направление наискорейшего роста поля.

**4.3.27.** Найти скорость изменения скалярного поля  $u = 2y^2 - x^2$  в точке  $P_0 = (1; -2)$  в направлении наискорейшего роста поля и в направлении вектора  $\overrightarrow{P_0P_1}$ , где  $P_1 = (-7; -8)$ . Построить несколько линий уровня скалярного поля, в том числе линию, проходящую через точку  $P_0$ . В точке  $P_0$  построить вектор  $\overrightarrow{P_0P_1}$  и указать направление наискорейшего роста поля.

**4.3.28.** Найти скорость изменения скалярного поля  $u = 6x^2 + 2y^2$  в точке  $P_0 = (2; 3)$  в направлении наискорейшего роста поля и в направлении вектора  $\vec{\omega}$ , образующего угол  $\pi/4$  с положительным направлением оси  $Oy$ . Построить несколько линий уровня скалярного поля, в том числе линию, проходящую через точку  $P_0$ . В точке  $P_0$  построить вектор  $\vec{\omega}$  и указать направление наискорейшего роста поля.

**4.3.29.** Найти скорость изменения скалярного поля  $u = x + y^2 + y$  в точке  $P_0 = (0; 4)$  в направлении вектора  $\vec{\omega} = 2\vec{i} + 4,8\vec{j}$  и в направлении наискорейшего роста поля. Построить несколько линий уровня скаляр-

ного поля, в том числе линию, проходящую через точку  $P_0$ . В точке  $P_0$  построить вектор  $\vec{\omega}$  и указать направление наискорейшего роста поля.

**4.3.30.** Найти скорость изменения скалярного поля  $u = 8y - x^2 - y^2$  в точке  $P_0 = (-2; 1)$  в направлении наискорейшего роста поля и в направлении вектора  $\overrightarrow{P_0P_1}$ , где  $P_1 = (6, 4; 9)$ . Построить несколько линий уровня скалярного поля, в том числе линию, проходящую через точку  $P_0$ . В точке  $P_0$  построить вектор  $\overrightarrow{P_0P_1}$  и указать направление наискорейшего роста поля.

**Задание 4.5.** Найти точки экстремума функции двух переменных  $F(x, y) = x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2$  (исходные данные к заданию 4.5). **Для решения системы уравнений можно использовать математические программы.**

*Исходные данные к заданию 4.5*

Номер варианта	Значения коэффициентов					
	$a_{21}$	$a_{12}$	$a_{03}$	$a_{20}$	$a_{11}$	$a_{02}$
4.5.1	2	1	-4	1	2	3
4.5.2	2	1	-4	2	4	6
4.5.3	4	4	-4	1	4	6
4.5.4	4	4	-4	2	8	12
4.5.5	6	9	4	1	6	3
4.5.6	6	9	4	2	12	6
4.5.7	6	9	4	1	6	6
4.5.8	6	9	4	2	12	12
4.5.9	4	4	-4	1	4	6
4.5.10	4	4	-4	3	12	18
4.5.11	6	9	4	3	18	9
4.5.12	6	9	4	3	18	18
4.5.13	8	16	8	1	8	4
4.5.14	8	16	8	2	16	8
4.5.15	8	16	8	3	24	12
4.5.16	8	16	8	4	32	16
4.5.17	8	16	8	1	8	12
4.5.18	8	16	8	2	16	24

4.5.19	8	16	8	3	24	36
4.5.20	8	16	8	4	32	48
4.5.21	2	1	-8	1	2	4
4.5.22	2	1	-8	2	4	8
4.5.23	2	1	-8	3	6	12
4.5.24	2	1	-8	4	8	16
4.5.25	6	9	-8	1	6	12
4.5.26	6	9	-8	2	12	24
4.5.27	6	9	-8	3	18	36
4.5.28	6	9	-8	4	24	48
4.5.29	10	25	20	1	10	10
4.5.30	10	25	20	2	20	20

**Задание 4.6.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $z = Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey$  в области  $\Omega$  (исходные данные к заданию 4.6). Сделать два рисунка, отметить на каждом область  $\Omega$ . На первом рисунке построить линию уровня функции  $z$ , проходящую через найденную точку, в которой функция имеет наибольшее значение, на втором – линию уровня функции  $z$ , проходящую через найденную точку, в которой функция имеет наименьшее значение. **Для построения кривых можно использовать программы построения графиков. В решении указать к какому виду кривых (окружность, эллипс, гипербола, парабола) относятся линии уровня в задании.**

а)  $\Omega$  – трапеция, ограниченная прямыми  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $y=2$ ,  $x+y=4$ .

*Исходные данные к заданию 4.6*

Номер варианта	Значения коэффициентов			
	$A$	$C$	$D$	$E$
4.6.1	2	-2	4	16
4.6.2	1	3	-2	-6
4.6.3	1	-1	-4	8
4.6.4	-1	2	2	12

<b>4.6.5</b>	-1	-1	6	4
<b>4.6.6</b>	2	1	-4	-6
<b>4.6.7</b>	2	-5	8	30
<b>4.6.8</b>	-2	3	4	12
<b>4.6.9</b>	-1	-2	10	4
<b>4.6.10</b>	-1	4	-10	-8

б)  $\Omega$  – трапеция, ограниченная прямыми  $y=x$ ,  $y=0$ ,  $y=2$ ,  $x=4$ .

*Исходные данные к заданию 4.6*

Номер варианта	Значения коэффициентов			
	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
<b>4.6.11</b>	1	-2	2	-4
<b>4.6.12</b>	1	1	-4	2
<b>4.6.13</b>	1	0	-2	5
<b>4.6.14</b>	-2	2	-2	1
<b>4.6.15</b>	1	-4	-10	8
<b>4.6.16</b>	-1	2	8	-4
<b>4.6.17</b>	1	-3	4	-6

*Окончание*

Номер варианта	Значения коэффициентов			
	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
<b>4.6.18</b>	-2	-4	8	8
<b>4.6.19</b>	2	0	4	-1
<b>4.6.20</b>	1	-2	4	0

в)  $\Omega$  – треугольник, ограниченный прямыми  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $x+y=6$ .

*Исходные данные к заданию 4.6*

Номер варианта	Значения коэффициентов			
	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
<b>4.6.21</b>	0	1	4	2
<b>4.6.22</b>	1	1	-12	-2
<b>4.6.23</b>	1	2	0	-8
<b>4.6.24</b>	2	1	12	-4
<b>4.6.25</b>	2	4	-12	-16

Номер варианта	Значения коэффициентов			
	$A$	$C$	$D$	$E$
4.6.26	-1	2	2	-8
4.6.27	4	2	16	8
4.6.28	-1	1	0	6
4.6.29	1	3	-8	-6
4.6.30	2	0	-4	1

**Задание 4.7.** Исследовать функцию  $z = f(x, y)$  на условный экстремум методом Лагранжа. Дать геометрическую иллюстрацию, построив несколько линий уровня исследуемой функции, множество точек, удовлетворяющих уравнению связи, и отметив точки условного экстремума. **Для построения кривых можно использовать программы построения графиков.**

4.7.1.  $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  при условии  $x^2 + y^2 = 2$ .

4.7.2.  $z = y^2 \sqrt{x}$  при условии  $4x^2 + y^2 = 20$ .

4.7.3.  $z = x^3 + y^3$  при условии  $xy = 3$ .

4.7.4.  $z = x^2 + 4y^2$  при условии  $y = \frac{1}{1+x^2}$ .

4.7.5.  $z = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{y}$  при условии  $x + y = 2$ .

4.7.6.  $z = \ln(xy)$  при условии  $\frac{x^2}{4} + (y-1)^2 = 1$ .

4.7.7.  $z = x^2 + y^3$  при условии  $xy = 2$ .

4.7.8.  $z = x^2 + \frac{1}{y}$  при условии  $x^2 + y + \frac{1}{2} = 0$ .

4.7.9.  $z = \frac{1}{x^2 + y^3}$  при условии  $y = x + 4$ .

4.7.10.  $z = x^2 + y^2$  при условии  $x^2 + \frac{2}{y} + 1 = 0$ .

- 4.7.11.  $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  при условии  $2x + y = 1$ .
- 4.7.12.  $z = \frac{1}{3}x^3 + y^2$  при условии  $xy + 2 = 0$ .
- 4.7.13.  $z = x^3 + y^3$  при условии  $x^2 + y^2 = 1$ .
- 4.7.14.  $z = 9x^2 + y^2$  при условии  $y = -\frac{1}{1+x^2}$ .
- 4.7.15.  $z = \frac{1}{x^3} + \frac{4}{y}$  при условии  $y = \frac{1}{x^3}$ .
- 4.7.16.  $z = \ln(x/y)$  при условии  $x^2 + (y-2)^2 = 1$ .
- 4.7.17.  $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y^2}$  при условии  $x + y^2 = 8$ .
- 4.7.18.  $z = x^2 + 4y^2$  при условии  $x^2 + \frac{1}{y} + \frac{1}{2} = 0$ .
- 4.7.19.  $z = \frac{1}{x^3 + y^2}$  при условии  $x = 1 + 2y^2$ .
- 4.7.20.  $z = \frac{1}{2}x^4 + y^2$  при условии  $xy = 8$ .
- 4.7.21.  $z = 8x^2 + y^2$  при условии  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 2 = 0$ .
- 4.7.22.  $z = x^2 - y^2$  при условии  $y(1+x^2) = 2$ .
- 4.7.23.  $z = x^3 + y^3$  при условии  $xy = 9$ .
- 4.7.24.  $z = 2x + y^2$  при условии  $\frac{1}{x^2} + \frac{2}{y} = 3$ .
- 4.7.25.  $z = x^3 + y^2$  при условии  $x^2 + 4y^2 = 1$ .
- 4.7.26.  $z = xy^2$  при условии  $y = x^2 - 3$ .

**4.7.27.**  $z = \frac{4}{x} + \frac{1}{y^2}$  при условии  $x + y^2 = 3$ .

**4.7.28.**  $z = x\sqrt{y}$  при условии  $x = y^2 - 2$ .

**4.7.29.**  $z = \frac{1}{x^3 + 2y^2}$  при условии  $2x - y^2 = 4$ .

**4.7.30.**  $z = x^4 + 2y^2$  при условии  $xy + 27 = 0$ .