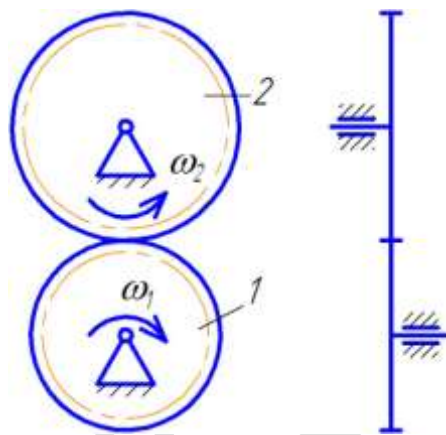


## Описание к лабораторной работе «Кинематика зубчатых механизмов»

Зубчатым называется механизм, служащий для передачи вращения между валами с заданным изменением угловой скорости и крутящего момента. Движение передается за счет последовательно зацепляющихся зубьев.

Схематично зубчатые механизмы изображаются следующим образом:

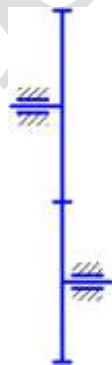


### Классификация зубчатых механизмов

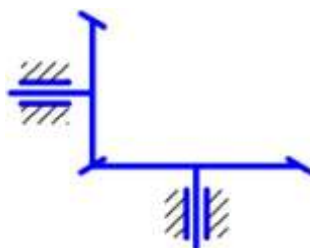
Существуют разные признаки классификации:

1) По расположению осей колес бывают механизмы

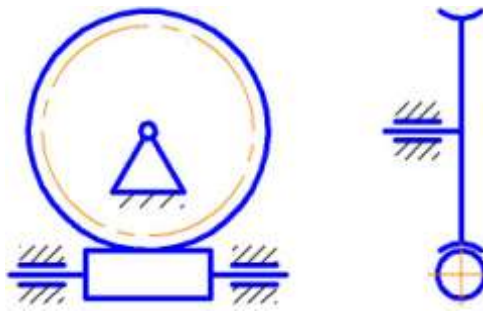
а) с параллельными осями – цилиндрическими зубчатыми колесами



б) с пересекающимися осями – коническими зубчатыми колесами

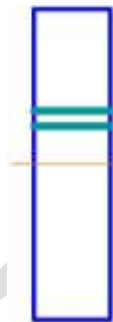


в) с перекрещивающимися осями – червячные механизмы (зубчато-винтовые)

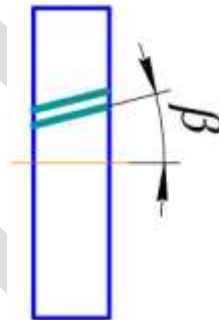


2) В зависимости от наклона линии зуба существуют механизмы

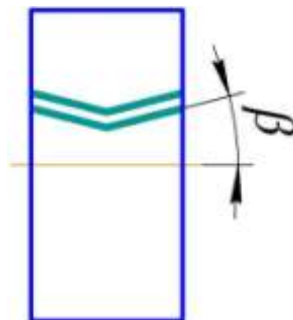
а) прямозубые (зуб направлен параллельно оси колеса)



б) косозубые (зуб наклонен относительно оси колеса на угол  $\beta$ ). Угол наклона зуба находится в пределах от  $8^\circ$  до  $20^\circ$ .

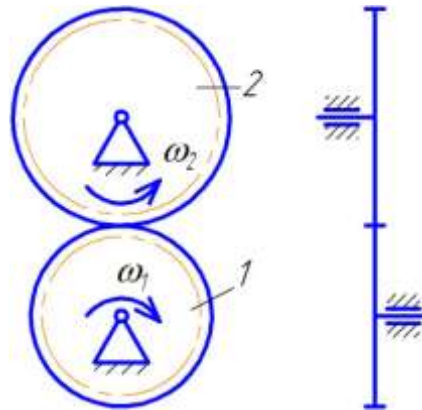


в) шевронные (зубья расположены симметрично относительно середины зубчатого венца). Угол наклона зуба  $\beta > 25^\circ$ .

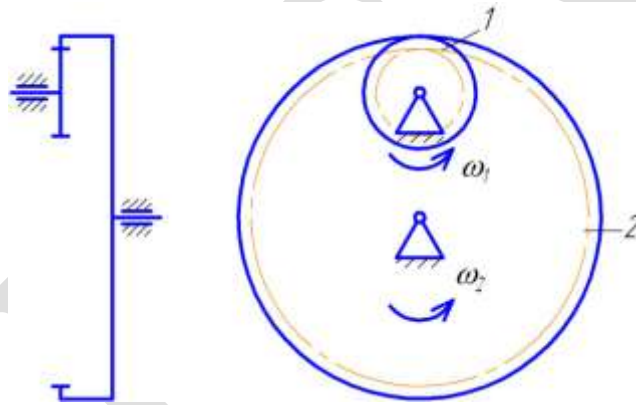


3) По виду зацепления различают механизмы

- а) с внешним зацеплением (зубчатые колеса вращаются в противоположные стороны)



- б) с внутренним зацеплением (колеса вращаются в одну и ту же сторону)



4) Механизмы с различными профилями зуба

- а) с эвольвентным профилем

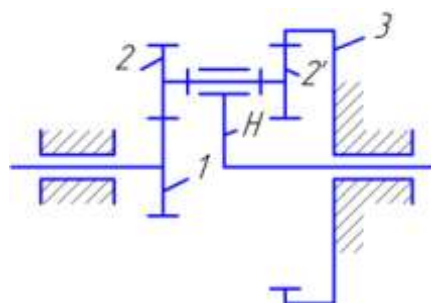
- б) с круговым профилем (зацеплением Новикова)

Механизмы с круговым профилем обладают большей нагрузочной способностью, но дороже в изготовлении и очень чувствительны к погрешностям изготовления и сборки, поэтому наиболее распространенными являются механизмы с эвольвентным зацеплением.

5) В зависимости от подвижности осей зубчатых колес различают

- а) механизмы с неподвижными осями (примеры рассмотрены выше)

- б) механизмы, в составе которых есть зубчатые колеса с подвижными осями – планетарные.



## Кинематика зубчатых механизмов

**Передаточное отношение** – это отношение угловых скоростей зубчатых колес, взятых с соответствующим знаком

$$U_{12} = \pm \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

Индексы в обозначении передаточного отношения определяют путь передачи движения (в примере – от первого колеса ко второму). Знак в формуле показывает, меняется или нет, направление вращения зубчатых колес. **Знак «+» относится к внутреннему зацеплению, знак «-» - к внешнему.**

Иными словами, **передаточное отношение** показывает, **во сколько раз** изменится угловая скорость при переходе через передачу.

В зубчатом механизме передаточное отношение также можно определить как отношение чисел зубьев зубчатых колес.

$$U_{12} = \pm \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{z_2}{z_1}.$$

**Передаточное отношение элементарного зубчатого механизма прямо пропорционально отношению угловых скоростей зубчатых колес и обратно пропорционально отношению их чисел зубьев.**

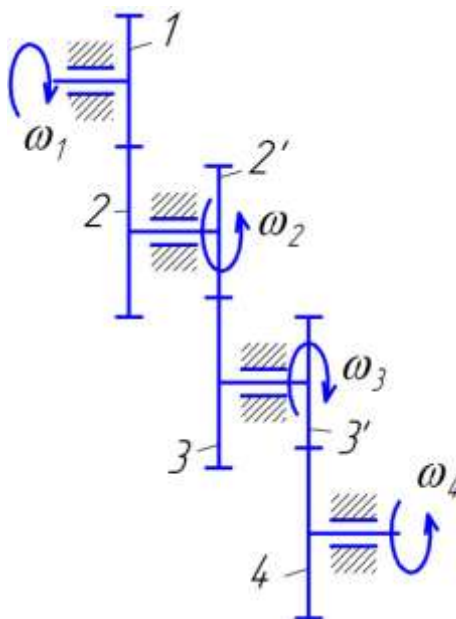
### Сложные зубчатые механизмы

Элементарные (одноступенчатые) зубчатые механизмы, состоящие из пары зубчатых колес, применяются при относительно небольших передаточных отношениях (до 8). Для получения больших значений передаточных отношений применяются сложные механизмы, представляющие собой различного рода комбинации элементарных зубчатых механизмов. Такие механизмы называются рядовыми или ступенчатыми.

**Общее передаточное отношение сложного (ступенчатого) зубчатого механизма определяется как произведение передаточных отношений простых механизмов, входящих в его состав (ступеней).**

$$U_{1n} = U_{12} \cdot U_{23} \cdot U_{34} \cdot \dots \cdot U_{(n-1)n}$$

Рассмотрим пример сложного механизма с неподвижными осями зубчатых колес:



В данном механизме **входят в зацепление три пары** зубчатых колес, т. е. он является **трехступенчатым**. Каждая ступень изменяет частоту вращения в соответствии с ее передаточным отношением.

В итоге общее передаточное отношение механизма -  $U_{14}$  (от первого к четвертому звену) будет рассчитываться следующим образом:

$$U_{14} = U_{12} \cdot U_{23} \cdot U_{34}$$

Если записать передаточные отношения ступеней как отношения чисел зубьев, получим следующую формулу:

$$U_{14} = (-1)^3 \frac{\omega_1}{\omega_4} = (-1)^3 \frac{z_2 \cdot z_3 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_2' \cdot z_3'}$$

Здесь  $(-1)^3$  учитывает, что каждое внешнее зацепление меняет направление вращения. В рассматриваемом механизме три внешних зацепления, поэтому степень третья.

Аналогично можно записать общую формулу для любого сложного механизма, состоящего из  $n$  звеньев:

$$U_{1n} = (-1)^k \frac{\omega_1}{\omega_n} = (-1)^k \frac{z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 \cdot \dots \cdot z_n}{z_1 \cdot z_2' \cdot z_3' \cdot \dots \cdot z_{n-1}'}$$

Здесь  $k$  – число **внешних** зацеплений на пути от первого колеса к  $n$ -му.

## Планетарные зубчатые механизмы

Планетарными называют зубчатые механизмы, в которых имеется хотя бы одно зубчатое колесо с подвижной осью вращения.

Такие колеса совершают сложное движение – вращаются вокруг собственной оси и одновременно оборачиваются вокруг других зубчатых колес, с которыми входят в зацепление, т. е. движутся как планеты в солнечной системе, за что механизм и получил свое название.

Планетарные механизмы делятся на три типа:

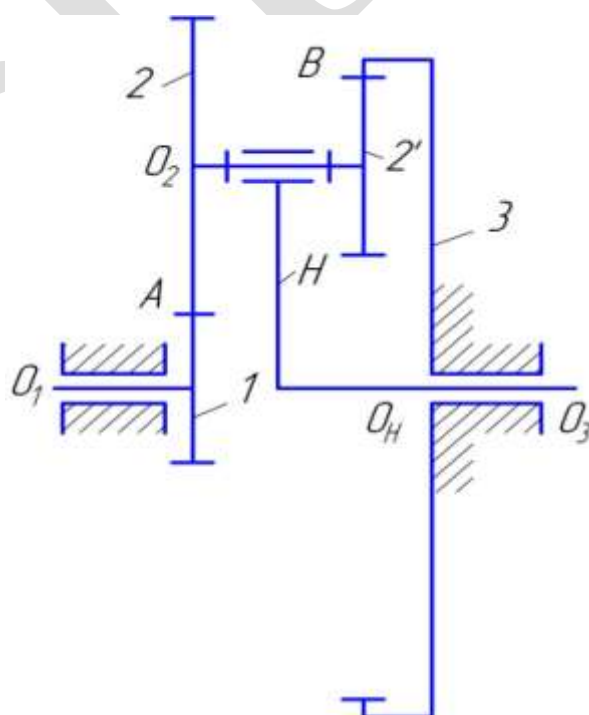
- 1) Планетарные передачи
- 2) Дифференциальные механизмы (дифференциалы)
- 3) Замкнутые дифференциалы.

### Планетарная передача

Основными признаками такого механизма являются:

- а) Наличие зубчатых колес с подвижной осью вращения (основной признак планетарного механизма)
- б) Равенство единице степени подвижности механизма ( $W = 1$ )
- в) Наличие в составе механизма неподвижного зубчатого колеса.

Пример планетарной передачи



Звенья планетарных механизмов имеют свои названия:

Зубчатые колеса с подвижными осями называют **сателлитами** (звено 2 - 2').

Звено, в котором установлены оси сателлитов, называют **водителем** и обозначают на схемах буквой Н. Ось вращения водителя – главная ось механизма.

Зубчатые колеса, **зацепляющиеся с сателлитами** и имеющие оси, совпадающие с главной осью, называют **центральными колесами** (колеса 1 и 3).

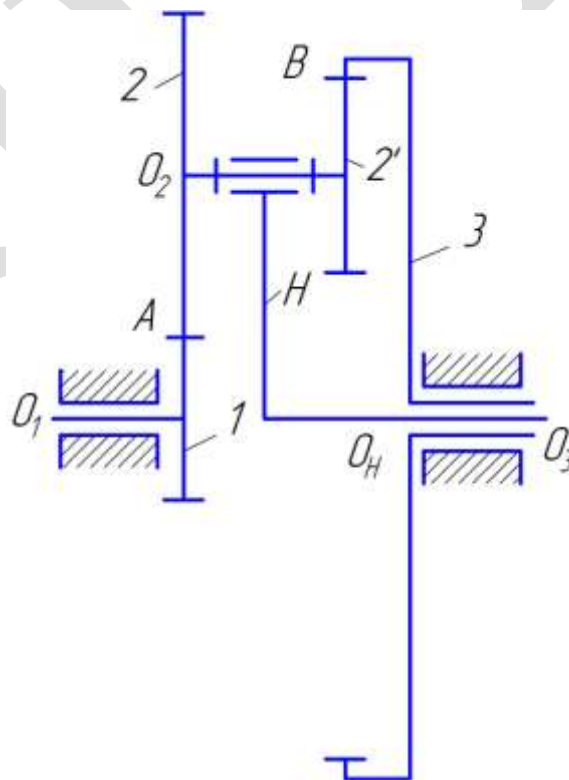
**Неподвижное** центральное колесо (звено 3) называется **опорным** или **солнечным**.

### Дифференциальный механизм (дифференциал)

Основные признаки:

- а) Наличие сателлита
- б) Степень подвижности механизма равна двум ( $W = 2$ )
- в) Неподвижных центральных колес в механизме нет.

Пример:

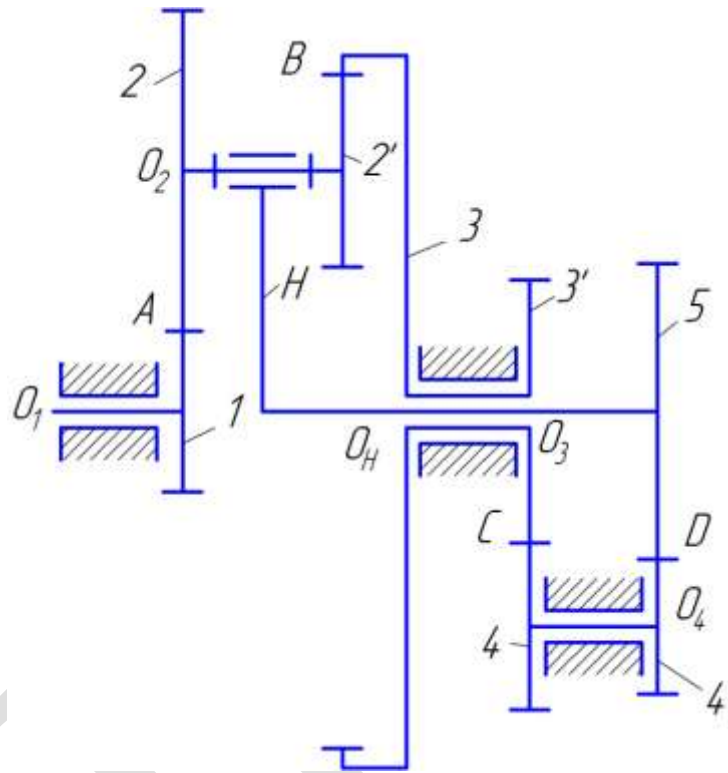


## Замкнутый дифференциал

Основные признаки:

- а) Наличие сателлита
- б) Степень подвижности механизма равна единице ( $W = 1$ )
- в) Неподвижных центральных колес в механизме нет.

Пример:



## Кинематика планетарных зубчатых механизмов

### Аналитическая кинематика

Сложность кинематического анализа планетарных зубчатых механизмов заключается в том, что в их состав входят зубчатые колеса с подвижными осями вращения (сателлиты). Эти колеса совершают сложное движение: вращаются вокруг собственной оси и одновременно обкатываются вокруг центральных зубчатых колес.

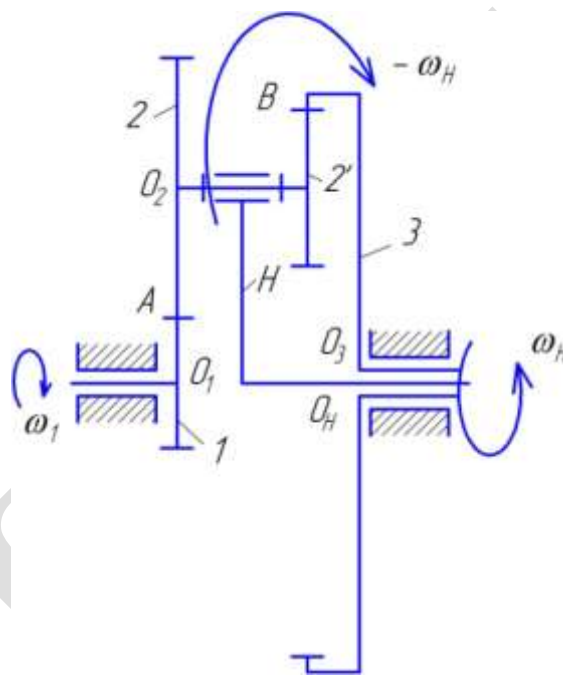
Аналитическое определение кинематических параметров таких механизмов выполняют на основе метода обращения движения, предложенного Виллисом.



**Суть этого метода:** мысленно сообщают всем звеньям механизма, включая стойку, угловую скорость, равную по величине и противоположную по направлению угловой скорости водила  $\omega_H$ . Тогда в обратном движении **водило становится неподвижным**, а механизм из планетарного превращается в **обращенный механизм с неподвижными осями колес**.

Формулы расчета передаточного отношения для **механизмов с неподвижными осями** нам известны. При этом из угловых скоростей всех звеньев необходимо вычесть угловую скорость водила  $\omega_H$  (угловые скорости в обратном движении).

Объясним смысл метода обратного движения на примере дифференциального механизма:



В таблице даны значения угловых скоростей звеньев в этом механизме для действительного движения и для обратного (при остановленном водиле). Индекс вверху в скобках указывает, какое звено условно остановлено.

№ звеньев	Исходная угловая скорость звеньев	Угловые скорости звеньев в обратном движении
Центральное колесо 1	$\omega_1$	$\omega_1^{(H)} = \omega_1 - \omega_H$
Сателлит 2-2'	$\omega_2$	$\omega_2^{(H)} = \omega_2 - \omega_H$
Центральное колесо 3	$\omega_3$	$\omega_3^{(H)} = \omega_3 - \omega_H$
Водило Н	$\omega_H$	$\omega_H - \omega_H = 0$

Тогда для рассматриваемого механизма можно записать:

$$U_{13}^{(H)} = (-1)^1 \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = (-1)^1 \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2'}$$

Здесь  $U_{13}^{(H)}$  читается как «передаточное отношение от первого к третьему звену при остановленном водиле».

Аналогично можно записать общую формулу передаточного отношения планетарных механизмов (формула Виллиса):

$$U_{1n}^{(H)} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_n - \omega_H} = (-1)^k \frac{z_2 \cdot z_3 \cdot \dots \cdot z_n}{z_1 \cdot z_2' \cdot \dots \cdot z_{n-1}'}$$

где  $k$  – число внешних зацеплений на пути от первого к  $n$ -му звену.

Для **планетарной передачи** полученные формулы упрощаются, так как, колесо 3 (опорное) является неподвижным ( $\omega_3 = 0$ ).

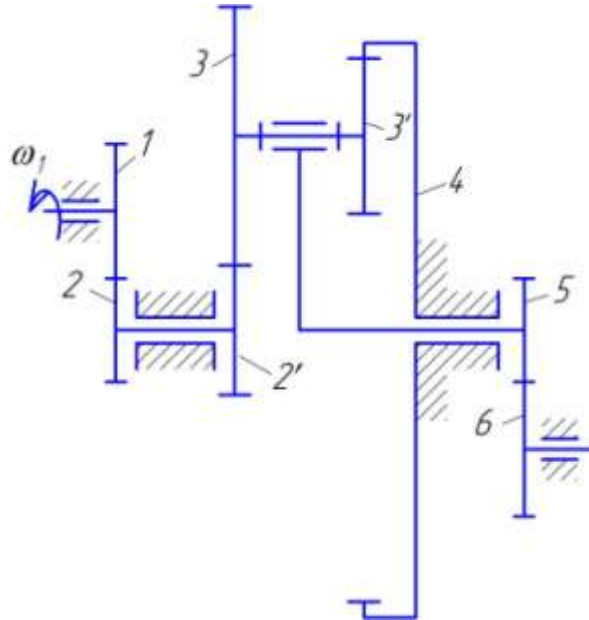
Исходя из этого, передаточное отношение от колеса 1 к водилу можно рассчитать по формуле:

$$U_{1H}^{(3)} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - U_{13}^{(H)}.$$

## Порядок выполнения работы

Рассмотрим порядок выполнения работы на следующем примере:

Провести кинематический анализ зубчатого механизма, представленного на схеме:



### Исходные данные:

Числа зубьев зубчатых колес:

$Z_1$	$Z_2$	$Z_2'$	$Z_3$	$Z_3'$	$Z_4$	$Z_5$	$Z_6$
17	34	20	40	20	80	20	60

Угловая скорость входного звена  $\omega_1 = 120 \text{ с}^{-1}$ .

### Задачи:

1. Оформить структурную схему механизма.
2. Рассчитать степень относительной подвижности.
3. Определить тип механизма.
4. Найти общее передаточное отношение механизма.
5. Определить угловые скорости всех звеньев механизма.

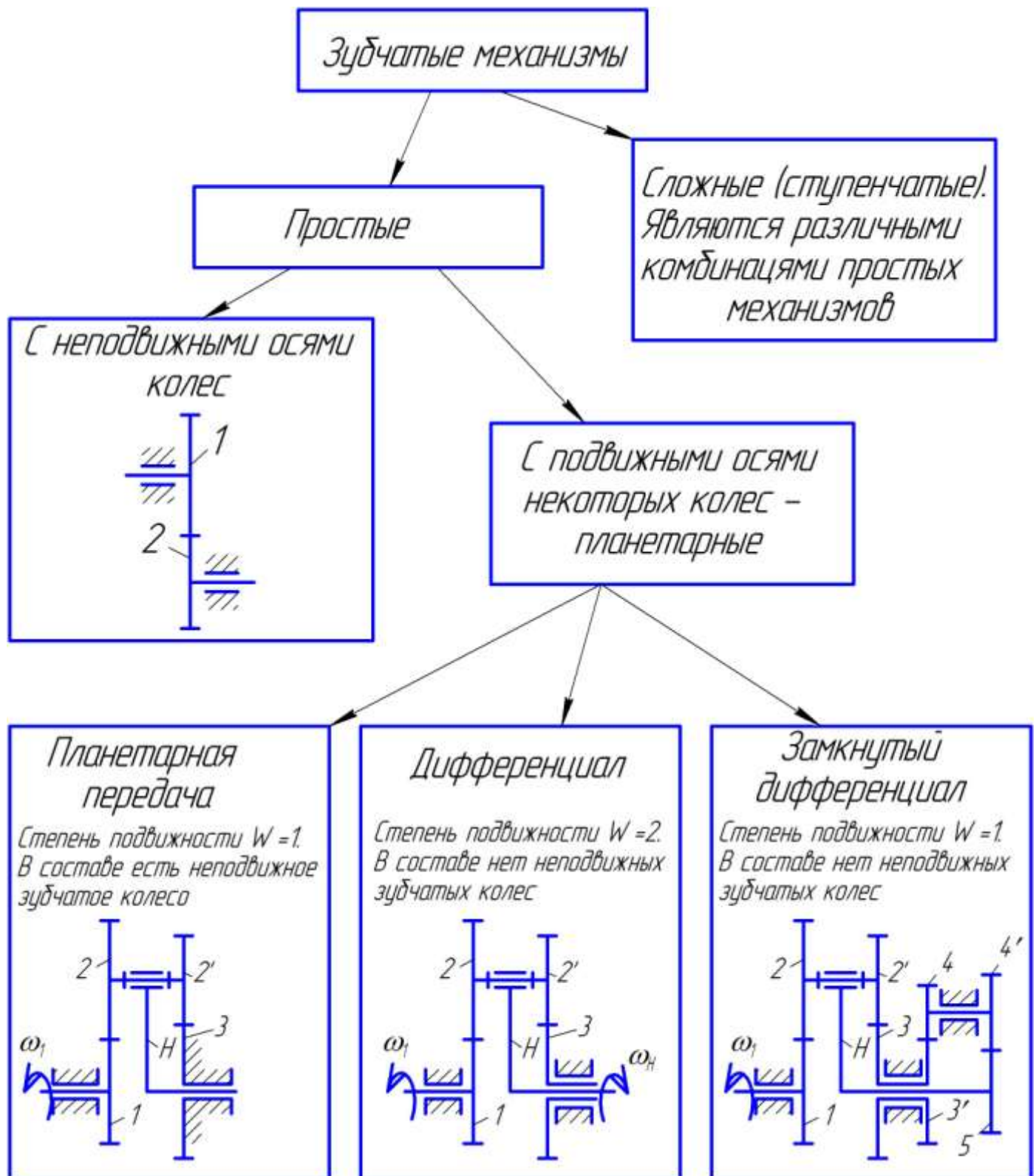
**1. Структурная схема** зубчатого механизма оформляется в соответствии со следующими правилами:

- а) Зубчатые колеса нумеруются арабскими цифрами. Если зубчатые колеса объединены в одно звено, второе колесо в блоке нумеруется той же цифрой со штрихом.

Кинематические пары **второго класса** – места зацепления зубьев обозначаются заглавными буквами латинского алфавита.

Степень подвижности соответствует одному заданному входному звену, значит механизм работоспособен.

3. Тип механизма определим при помощи представленной ниже схемы:



**Алгоритм решения этой задачи может быть следующим:**

а) Определяем, есть ли в составе механизма планетарная ступень (по наличию зубчатых колес с подвижными осями вращения – сателлитов).

б) При наличии спутников выделяем непосредственно планетарную часть. В ее состав входят **спутники, водило и центральные зубчатые колеса, находящиеся в зацеплении с спутниками.**

в) Определяем тип планетарной ступени (планетарная передача, дифференциал, замкнутый дифференциал).

г) Если в составе механизма больше нет зубчатых колес, кроме планетарной ступени, значит механизм простой и его тип соответствует типу планетарного механизма.

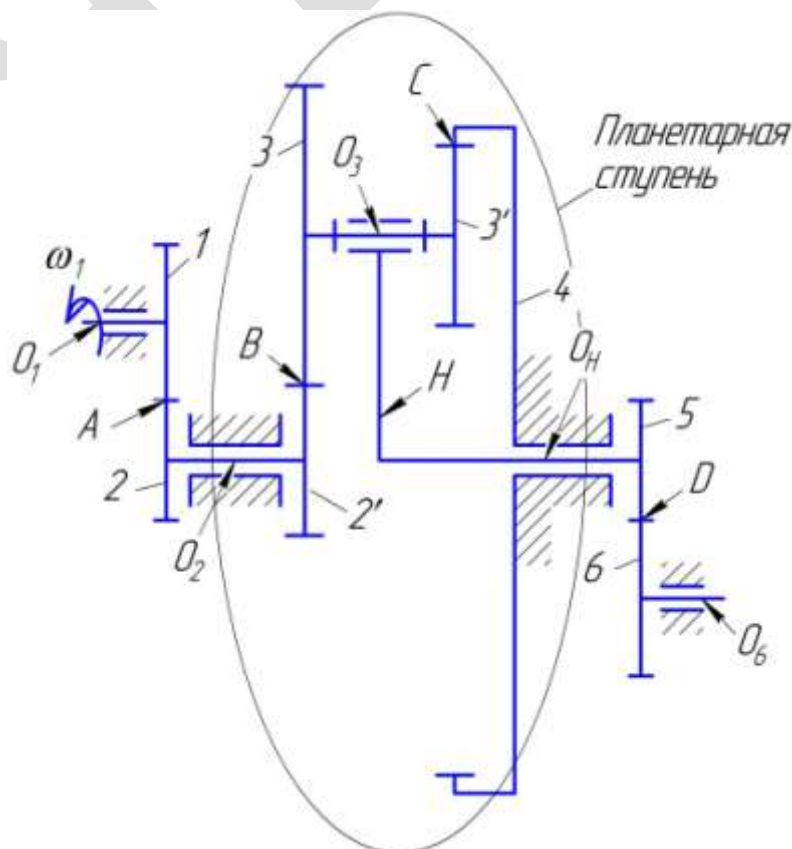
В противном случае механизм является сложным – ступенчатым. Тогда алгоритм действий нужно повторить.

Если планетарных механизмов в составе больше нет, число остальных ступеней определяем по числу пар зубчатых колес с неподвижными осями.

## Определим тип рассматриваемого механизма.

В его составе есть зубчатые колеса с подвижными осями (сателлиты) – это блок зубчатых колес 3-3'.

Выделим планетарную часть механизма. К ней относятся блок сателлитов 3-3', водило Н и центральные колеса 2' и 4, находящиеся в зацеплении с сателлитами.



Данная ступень является **планетарной передачей**, т. к. степень подвижности  $W = 1$ , и в ее составе есть **неподвижное** зубчатое колесо 4.

Кроме планетарной ступени в механизме есть еще зубчатые колеса, значит, механизм является сложным ступенчатым, при этом одна из ступеней является планетарной передачей.

В оставшейся части механизма сателлитов, а значит, и планетарных ступеней больше нет. Тогда будем иметь еще две ступени из зубчатых колес с неподвижными осями – из 1-го и 2-го, а также 5-го и 6-го.

Таким образом, рассматриваемый механизм является **сложным трехступенчатым**. Первая ступень передает вращение от первого колеса ко второму, вторая – планетарная передача, передает движение от колеса 2' к водилу Н, и третья – от 5-го колеса к 6-му.

#### 4. Общее передаточное отношение механизма.

Т. к. механизм является сложным трехступенчатым, общее передаточное отношение будет рассчитываться как произведение передаточных отношений его ступеней:

$$U_{16} = \frac{\omega_1}{\omega_6} = U_{12} \cdot U_{2'H} \cdot U_{56}$$

Передаточные отношения первой и третьей ступени определяем через отношение чисел зубьев по формуле для механизмов с неподвижными осями колес:

$$U_{12} = -\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{z_2}{z_1} = -\frac{34}{17} = -2$$

Знак «-» ставим, т. к. зацепление внешнее.

$$U_{56} = -\frac{\omega_5}{\omega_6} = -\frac{z_6}{z_5} = -\frac{60}{20} = -3$$

Для второй ступени - планетарной передачи используем формулу Виллиса. Запишем ее в варианте определения передаточного отношения между центральными колесами 2' и 4 при остановленном водиле:

$$U_{2'4}^{(H)} = (-1)^1 \frac{\omega_2 - \omega_H}{\omega_4 - \omega_H} = (-1)^1 \frac{z_3 \cdot z_4}{z_2' \cdot z_3'} = -\frac{40 \cdot 80}{20 \cdot 20} = -8$$

Показатель степени равен 1, т. к. на пути от колеса 2' до водила Н одно внешнее зацепление.

Нам же необходимо знать передаточное отношение от колеса 2' к водилу Н ( $U_{2'H}$ ). Для его определения воспользуемся вариантом формулы Виллиса для планетарных передач:

$$U_{2'H}^{(4)} = \frac{\omega_2}{\omega_H} = 1 - U_{2'4}^{(H)} = 1 - (-8) = 9$$

В итоге общее передаточное отношение будет равно:

$$U_{16} = \frac{\omega_1}{\omega_6} = U_{12} \cdot U_{2'H} \cdot U_{56} = (-2) \cdot 9 \cdot (-3) = 54$$

**5. Определение угловых скоростей** звеньев при заданной угловой скорости входного звена  $\omega_1$ .

Зная передаточные отношения, легко рассчитать неизвестные угловые скорости.

Через общее передаточное отношение найдем угловую скорость выходного звена 6:

$$U_{16} = \frac{\omega_1}{\omega_6} = 54$$

Отсюда

$$\omega_6 = \frac{\omega_1}{U_{16}} = \frac{120}{54} = 2.22 \text{ с}^{-1}$$

Угловая скорость звена 2-2':

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{U_{12}} = \frac{120}{-2} = -60 \text{ с}^{-1}$$

Здесь знак «-» означает, что угловая скорость  $\omega_2$  направлена в противоположную сторону по отношению к  $\omega_1$ .

Угловую скорость водила Н определим, зная угловую скорость второго звена и передаточное отношение планетарной ступени:

$$\omega_H = \frac{\omega_2}{U_{2'H}} = \frac{-60}{9} = -6.67 \text{ с}^{-1}$$

Зубчатое колесо 5 выполнено заодно с водилом, поэтому его угловая скорость будет такой же.



Осталось рассчитать угловую скорость сателлита 3-3'.

Для этого запишем формулу Виллиса для определения передаточного отношения от колеса 2' к сателлиту 3 при остановленном водиле:

$$U_{2'3}^{(H)} = (-1)^1 \frac{\omega_2 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = (-1)^1 \frac{z_3}{z_2'} = -\frac{40}{20} = -2$$

Из полученного уравнения выражаем угловую скорость  $\omega_3$ :

$$\frac{\omega_2 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = -2$$

Перенесем знаменатель в правую часть уравнения:

$$\omega_2 - \omega_H = -2(\omega_3 - \omega_H)$$

Раскроем скобки:

$$\omega_2 - \omega_H = -2\omega_3 + 2\omega_H$$

В итоге получим:

$$\omega_3 = \frac{3\omega_H - \omega_2}{2}$$

Угловые скорости  $\omega_2$  и  $\omega_H$  найдены ранее, тогда угловая скорость  $\omega_3$  будет равна:

$$\omega_3 = \frac{3\omega_H - \omega_2}{2} = \frac{3 \cdot (-6.67) - (-60)}{2} = 19.995 \text{ c}^{-1}$$

Таким образом, найдены угловые скорости всех звеньев механизма:

$$\omega_2 = -60 \text{ c}^{-1}$$

$$\omega_3 = 19.995 \text{ c}^{-1}$$

$$\omega_H = \omega_5 = -6.67 \text{ c}^{-1}$$

$$\omega_6 = 2.22 \text{ c}^{-1}.$$

REF