

*Образец выполнения типового расчёта
по теории случайных процессов*

Задание 1

Случайный процесс описывается функцией

$$Y(t) = (X - t)^2 \quad (t > 0),$$

где X – распределённая по равномерному закону на $[a, b]$ случайная величина. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, корреляционную функцию и нормированную корреляционную функцию случайного процесса.

Решение. Математическое ожидание непрерывной случайной величины, распределённой по равномерному закону на $[a, b]$: $m_x = \frac{a+b}{2}$, её плотность вероятностей $f(x) = \frac{1}{b-a}$.

Тогда будем иметь:

$$\begin{aligned} m_y &= M(X - t)^2 = m_{x^2} - 2tm_x + t^2 = \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx - (a+b)t + t^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - (a+b)t + t^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{Y}(t) &= (X - t)^2 - t^2 + (a+b)t - \frac{a^2 + ab + b^2}{3} = \\ &= X^2 - 2Xt + (a+b)t - \frac{a^2 + ab + b^2}{3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_y(t_1, t_2) &= M \left(\left(X^2 - 2Xt_1 + (a+b)t_1 - \frac{a^2 + ab + b^2}{3} \right) \cdot \right. \\ &\left. \left(X^2 - 2Xt_2 + (a+b)t_2 - \frac{a^2 + ab + b^2}{3} \right) \right) = m_{x^4} - 2t_2 m_{x^3} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (a+b)t_2m_{x^2} - \frac{a^2+ab+b^2}{3}m_{x^2} - 2t_1m_{x^3} + \\
& + 4t_1t_2M(X^2) - 2t_1t_2(a+b)M(X) + \frac{2}{3}(a^2+ab+b^2)t_1M(X) + \\
& + (a+b)t_1m_{x^2} - 2(a+b)t_1t_2m_x + (a+b)^2t_1t_2 - \\
& - \frac{1}{3}(a+b)(a^2+ab+b^2)t_1 - \frac{(a^2+ab+b^2)}{3}m_{x^2} + \\
& + \frac{2}{3}(a^2+ab+b^2)t_2m_x - \frac{1}{3}(a+b)(a^2+ab+b^2)t_2 + \\
& + \frac{(a^2+ab+b^2)^2}{9} = m_{x^4} - 2(t_1+t_2)m_{x^3} + \\
& + \left((a+b)(t_1+t_2) + 4t_1t_2 - \frac{2}{3}(a^2+ab+b^2) \right) m_{x^2} + \\
& + \left(\frac{2}{3}(a^2+ab+b^2)(t_1+t_2) - 4(a+b)t_1t_2 \right) m_x + \\
& + (a+b)^2t_1t_2 - \frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)(t_1+t_2) + \frac{(a^2+ab+b^2)^2}{9}; \\
m_{x^3} &= \frac{1}{b-a} \int_a^b x^3 dx = \frac{(a+b)(a^2+b^2)}{4}; \\
m_{x^4} &= \frac{1}{b-a} \int_a^b x^4 dx = \frac{b^4+b^3a+b^2a^2+ba^3+a^4}{5}; \\
K_y(t_1, t_2) &= \frac{b^4+b^3a+b^2a^2+ba^3+a^4}{5} - \frac{(a+b)(a^2+b^2)(t_1+t_2)}{2} + \\
& + \left((a+b)(t_1+t_2) + 4t_1t_2 - \frac{2}{3}(a^2+ab+b^2) \right) \cdot \frac{a^2+ab+b^2}{3} + \\
& + \left(\frac{2}{3}(a^2+ab+b^2)(t_1+t_2) - 4(a+b)t_1t_2 \right) \cdot \frac{a+b}{2} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (a+b)^2 t_1 t_2 - \frac{1}{3} (a^2 + ab + b^2) (t_1 + t_2) + \frac{(a^2 + ab + b^2)^2}{9} = \\
& = \frac{1}{6} (a^3 + ab(5(a+b) - 2) - 2(a^2 - b^2) + b^3) (t_1 + t_2) - \frac{1}{3} (a-b)^2 t_1 t_2 + \\
& + \frac{4(a^4 + b^4) - ab(a^2 + b^2 + 6ab)}{45}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_y(t) &= K_y(t, t) = \\
&= \frac{1}{3} (a^3 + ab(5(a+b) - 2) - 2(a^2 - b^2) + b^3) t - \frac{1}{3} (a-b)^2 t^2 + \\
&+ \frac{4(a^4 + b^4) - ab(a^2 + b^2 + 6ab)}{45}.
\end{aligned}$$

$$\rho_y(t_1, t_2) = \frac{K_y(t_1, t_2)}{\sigma_y(t_1) \sigma_y(t_2)},$$

где

$$\begin{aligned}
\sigma_y(t_1) &= \left(\frac{1}{3} (a^3 + ab(5(a+b) - 2) - 2(a^2 - b^2) + b^3) t_1 - \frac{1}{3} (a-b)^2 t_1^2 + \right. \\
&\left. + \frac{4(a^4 + b^4) - ab(a^2 + b^2 + 6ab)}{45} \right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_y(t_2) &= \left(\frac{1}{3} (a^3 + ab(5(a+b) - 2) - 2(a^2 - b^2) + b^3) t_2 - \frac{1}{3} (a-b)^2 t_2^2 + \right. \\
&\left. + \frac{4(a^4 + b^4) - ab(a^2 + b^2 + 6ab)}{45} \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Задание 2

В среднем за час магазин посещает n посетителей. Найти вероятность того, что за два часа магазин посетят не

менее k посетителей и вероятность того, что в течение как минимум T минут в магазине не будет ни одного посетителя, если поток посетителей считать пуассоновским. $n = 9$, $k = 16$, $T = 12$.

Решение. $\lambda = n = 9$. Вероятность того, что число заявок на временном интервале длительности t будет равно k , $k \in N$, для пуассоновского потока вычисляется по формуле

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

Поэтому получим следующие результаты.

$$t_1 = 2.$$

$$\begin{aligned} P_2(k \geq 16) &= 1 - P_2(k < 16) = 1 - e^{-18} \sum_{k=0}^{15} \frac{18^k}{k!} = \\ &= 1 - e^{-18} \left(1 + 18 + \frac{18^2}{2!} + \dots + \frac{18^{15}}{15!} \right) = 0,713347 \approx 0,713 \quad \text{или по таблице} \end{aligned}$$

значений функции $P(k; \lambda)$:

$$\begin{aligned} P_2(k \geq 16) &= 1 - P_2(k < 16) = 1 - \sum_{k=0}^{15} P(k; 18) = \\ &= 1 - (1,5 \cdot 10^{-8} + 2,7 \cdot 10^{-7} + 2,5 \cdot 10^{-6} + 0,00002 + 0,00007 + \\ &+ 0,00024 + 0,00072 + 0,00185 + 0,00416 + 0,00833 + 0,01499 + \\ &+ 0,02452 + 0,03678 + 0,05093 + 0,06548 + 0,07858) = 1 - 0,287 \\ &= 0,713. \end{aligned}$$

$$t_2 = \frac{12}{60} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

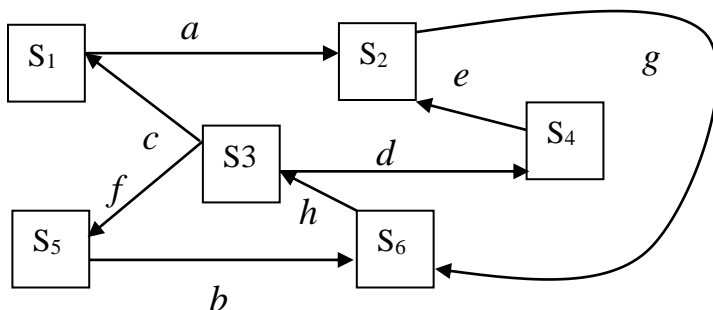
$$P_{0,2}(0) = \frac{(9 \cdot 0,2)^0}{0!} e^{-1,8} = e^{-1,8} = 0,165299 \approx 0,165 \quad \text{или по таблице}$$

значений функции $P(k; \lambda)$:

$$P_{0,2}(0) = P(0; 1,8) = 0,1653 \approx 0,165.$$

Задание 3

Дана марковская цепь, заданная графом. Найти наиболее вероятное состояние системы на четвёртом шаге и при бесконечно длительном функционировании, если в начальный момент времени система находилась в состоянии S_0 .



$a = 0,26$; $b = 0$; $c = 0,27$; $d = 0,03$; $e = 0,04$; $f = 0,34$;
 $g = 0,19$; $h = 0,26$; $S_0 = S_1$.

Решение. Матрица переходных вероятностей, которая соответствует графу состояний марковской цепи, будет иметь вид:

$$\|p_{ij}\| = \begin{matrix} & \begin{matrix} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{matrix} & \left\| \begin{array}{cccccc} 0,74 & 0,26 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,81 & 0 & 0 & 0 & 0,19 \\ 0,27 & 0 & 0,36 & 0,03 & 0,34 & 0 \\ 0 & 0,04 & 0 & 0,96 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,26 & 0 & 0 & 0,74 \end{array} \right\| \end{matrix}, i, j = \overline{1, 6}.$$

Вероятности задержки на размеченном графе не проставляются, а просто получаются дополнением до единицы суммы вероятностей, стоящих у всех стрелок, ведущих из данного состояния $S_i, i = \overline{1, 6}$.

Так как в начальный момент ($t_0 = 0$) марковская цепь заведомо находится в состоянии $S_0 = S_1$, то

$$p_1(0) = 1, \quad p_i(0) = 0, \quad i = \overline{2, 6}.$$

Умножая полученную строку вероятностей

$$1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

поочерёдно на все столбцы матрицы переходных вероятностей, находим вероятности состояний на первом шаге:

$$p_1(1) = 0,74; \quad p_2(1) = 0,26; \quad p_i(1) = 0 \quad \text{для } i = \overline{3, 6}.$$

Умножая полученную строку вероятностей

$$0,74 \quad 0,26 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

поочерёдно на все столбцы матрицы переходных вероятностей, находим вероятности состояний на втором шаге:

$$p_1(2) = 0,74 \cdot 0,74 = 0,5476;$$

$$p_2(2) = 0,74 \cdot 0,26 + 0,26 \cdot 0,81 = 0,26 \cdot 1,55 = 0,403;$$

$$p_i(2) = 0 \quad \text{для } i = \overline{3, 5}; \quad p_6(2) = 1 - (0,5476 + 0,403) = 0,0494.$$

Умножая полученную строку вероятностей

$$0,5476 \quad 0,403 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0,0494$$

поочерёдно на все столбцы матрицы переходных вероятностей, находим вероятности состояний на третьем шаге:

$$p_1(3) = 0,5476 \cdot 0,74 = 0,405224;$$

$$p_2(3) = 0,5476 \cdot 0,26 + 0,403 \cdot 0,81 = 0,468806;$$

$$p_3(3) = 0,0494 \cdot 0,26 = 0,012844;$$

$$p_i(3) = 0 \quad \text{для } i = 4, 5;$$

$$p_6(3) = 1 - (0,468806 + 0,405224 + 0,012844) = 0,113126.$$

Умножая полученную строку вероятностей

$$0,405224 \quad 0,468806 \quad 0,012844 \quad 0 \quad 0 \quad 0,113126$$

поочерёдно на все столбцы матрицы переходных вероятностей, находим вероятности состояний на четвёртом шаге:

$$\begin{aligned}
p_1(4) &= 0,405224 \cdot 0,74 + 0,012844 \cdot 0,27 = 0,303334; \\
p_2(4) &= 0,405224 \cdot 0,26 + 0,468806 \cdot 0,81 = 0,485091; \\
p_3(4) &= 0,012844 \cdot 0,36 + 0,113126 \cdot 0,26 = 0,034037; \\
p_4(4) &= 0,012844 \cdot 0,03 = 0,000385; \\
p_5(4) &= 0,012844 \cdot 0,34 = 0,004367; \\
p_6(4) &= 1 - \\
&-(0,303334 + 0,485091 + 0,034037 + 0,000385 + 0,004367) = \\
&= 0,172786.
\end{aligned}$$

Наиболее вероятное состояние системы на четвёртом шаге – S_2 .

Для того, чтобы найти наиболее вероятное состояние системы при бесконечно длительном функционировании, рассмотрим состояние S_1 на графе. В это состояние направлена одна стрелка, следовательно, в левой части балансового уравнения для $j=1$ (состояние S_1) будет одно слагаемое. Из этого состояния выходит одна стрелка, следовательно, в правой части этого уравнения также будет одно слагаемое. Таким образом, используя балансовое условие, получаем первое уравнение:

$$p_3 \cdot c = p_1 \cdot a.$$

Аналогично запишем ещё пять уравнений:

$$\begin{aligned}
p_1 \cdot a + p_4 \cdot e &= p_2 \cdot g, \quad p_6 \cdot h = p_3 \cdot (c + d + f), \quad p_3 \cdot d = p_4 \cdot e, \\
p_3 \cdot f &= p_5 \cdot b, \quad p_2 \cdot g + p_5 \cdot b = p_6 \cdot h.
\end{aligned}$$

В качестве седьмого уравнения возьмём нормировочное условие $\sum_{i=1}^6 p_i = 1$.

Перепишем полученную систему уравнений в таком виде:

$$\begin{cases} 0,27p_3 = 0,26p_1 \\ 0,26p_1 + 0,04p_4 = 0,19p_2 \\ 0,26p_6 = 0,64p_3 \\ 0,03p_3 = 0,04p_4 \\ 0,34p_3 = 0 \\ 0,19p_2 = 0,26p_6 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1 \end{cases}.$$

Исключим из системы, например, второе уравнение, найдём её решение: $p_i = 0, i = \overline{1, 4, 6}, p_5 = 1$. Наиболее вероятное состояние системы при бесконечно длительном функционировании — S_5 . В данном случае оно единственно возможно.

Задание 4

Марковская случайная цепь с дискретным временем описывается матрицей переходных вероятностей $\|p_{ij}\|$. Найти распределение вероятностей состояний для первых пяти шагов системы и найти финальные вероятности системы, если в начальный момент времени система могла находиться с равной вероятностью в любом состоянии.

$$\|p_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}, i, j = \overline{1, 3}.$$

Решение. Поскольку в начальный момент времени система могла находиться с равной вероятностью в любом состоянии, то распределение вероятностей состояний для первых пяти шагов системы находится по формуле: $P(n) = P^n, n = \overline{1, 5}$.

Получим:

$$P(1) = P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} P(2) = P^2 &= \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0,21 & 0,06 & 0,73 \\ 0,19 & 0,1 & 0,71 \\ 0,18 & 0,04 & 0,78 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

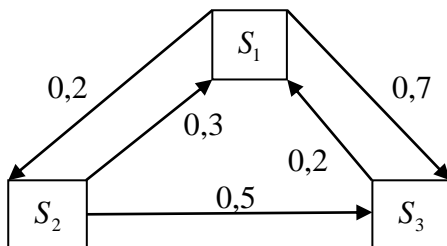
$$\begin{aligned} P(3) = P^3 &= \begin{pmatrix} 0,21 & 0,06 & 0,73 \\ 0,19 & 0,1 & 0,71 \\ 0,18 & 0,04 & 0,78 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0,185 & 0,054 & 0,761 \\ 0,191 & 0,058 & 0,751 \\ 0,186 & 0,044 & 0,77 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(4) = P^4 &= \begin{pmatrix} 0,185 & 0,054 & 0,761 \\ 0,191 & 0,058 & 0,751 \\ 0,186 & 0,044 & 0,77 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0,1869 & 0,0478 & 0,7653 \\ 0,1867 & 0,0498 & 0,7635 \\ 0,1858 & 0,046 & 0,7682 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$P(5) = P^5 = \begin{pmatrix} 0,1869 & 0,0478 & 0,7653 \\ 0,1867 & 0,0498 & 0,7635 \\ 0,1858 & 0,046 & 0,7682 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,18609 & 0,04694 & 0,76697 \\ 0,18631 & 0,0473 & 0,76639 \\ 0,18602 & 0,04636 & 0,76762 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения финальных вероятностей системы составим размеченный граф состояний марковской случайной цепи с дискретным временем, соответствующий матрице переходных вероятностей.



Рассмотрим состояние S_1 на графе. В это состояние направлены две стрелки, следовательно, в левой части балансового уравнения для $j=1$ (состояние S_1) будет два слагаемых. Из этого состояния выходит также две стрелки, следовательно, в правой части этого уравнения тоже будет два слагаемых. Таким образом, используя балансовое условие, получаем первое уравнение:

$$0,3p_2 + 0,2p_3 = 0,9p_1.$$

Аналогично запишем ещё два уравнения:

$$0,2p_1 = 0,8p_2, \quad 0,7p_1 + 0,5p_2 = 0,2p_3.$$

В качестве четвёртого уравнения возьмём нормировочное условие $\sum_{i=1}^3 p_i = 1$. Перепишем полученную систему уравнений в таком виде:

$$\begin{cases} 3p_2 + 2p_3 = 9p_1 \\ p_1 = 4p_2 \\ 7p_1 + 5p_2 = 2p_3 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}.$$

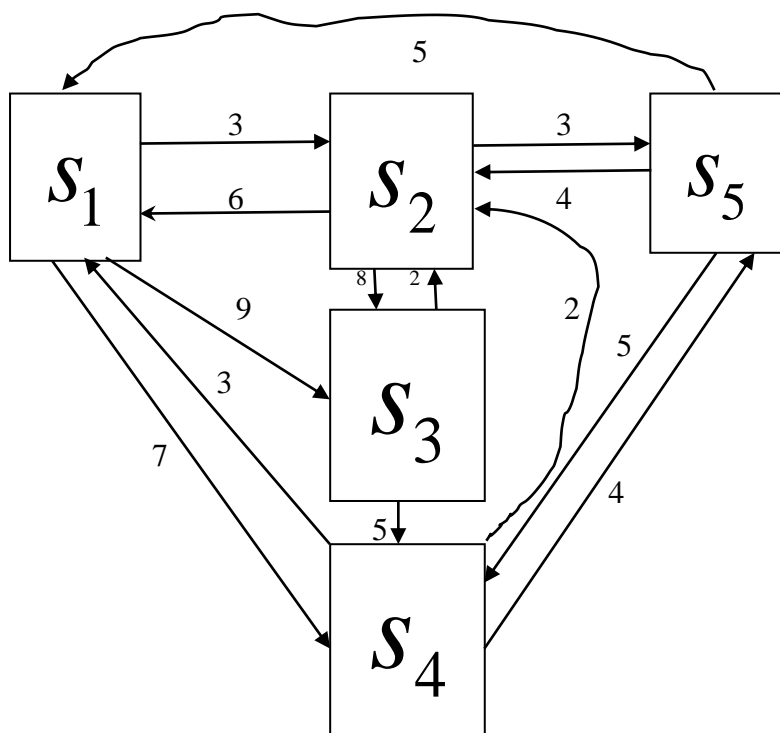
Исключим из системы, например, первое уравнение, найдём её решение: $33p_2 = 2p_3$; $p_3 = \frac{33}{2}p_2$; $\frac{43}{2}p_2 = 1$;
 $p_2 = \frac{2}{43} \approx 0,04651$; $p_1 = \frac{8}{43} \approx 0,18605$; $p_3 = \frac{33}{43} \approx 0,76744$.

Задание 5

Дана матрица переходных потоков событий $\|\lambda_{ij}\|$ марковского случайного процесса с непрерывным временем. Составить размеченный граф состояний, уравнения Колмогорова и найти финальные вероятности состояний, если система в начальный момент времени может находиться с равной вероятностью в любом состоянии.

$$\|\lambda_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 & 7 & 0 \\ 6 & 0 & 8 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. Составим размеченный граф состояний марковского случайного процесса с непрерывным временем, соответствующий матрице переходных потоков событий.



Тогда система дифференциальных уравнений Колмогорова будет иметь вид:

$$\begin{cases} p_1'(t) = 6p_2(t) + 3p_4(t) + 5p_5(t) - (3+9+7)p_1(t) \\ p_2'(t) = 3p_1(t) + 2p_3(t) + 2p_4(t) + 4p_5(t) - (6+8+3)p_2(t) \\ p_3'(t) = 9p_1(t) + 8p_2(t) - (2+5)p_3(t) \\ p_4'(t) = 7p_1(t) + 5p_3(t) + p_5(t) - (3+2+4)p_4(t) \\ p_5'(t) = 3p_2(t) + 4p_4(t) - (5+4+5)p_5(t) \end{cases}.$$

Нормировочное условие

$$p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) + p_4(t) + p_5(t) = 1.$$

Для нахождения финальных вероятностей в уравнениях Колмогорова полагают все производные $p'_i(t), i = \overline{1, 5}$, равными 0 и решают систему алгебраических уравнений (с учётом нормировки $\sum_{i=1}^5 p_i(t) = 1$). Тогда соответствующая система алгебраических уравнений принимает вид

$$\begin{cases} 6p_2 + 3p_4 + 5p_5 - 19p_1 = 0 \\ 3p_1 + 2p_3 + 2p_4 + 4p_5 - 17p_2 = 0 \\ 9p_1 + 8p_2 - 7p_3 = 0 \\ 7p_1 + 5p_3 + p_5 - 9p_4 = 0 \\ 3p_2 + 4p_4 - 14p_5 = 0 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1 \end{cases}.$$

Исключив одно из уравнений, например, второе, и учитывая условие нормировки, находим решение системы

$$\begin{cases} -19p_1 + 6p_2 + 3p_4 + 5p_5 = 0 \\ 9p_1 + 8p_2 - 7p_3 = 0 \\ 7p_1 + 5p_3 - 9p_4 + p_5 = 0 \\ 3p_2 + 4p_4 - 14p_5 = 0 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1 \end{cases}.$$

$$p_1 = \frac{9797}{77522} \approx 0,126; \quad p_2 = \frac{5526}{38761} \approx 0,143; \quad p_3 = \frac{25227}{77522} \approx 0,325;$$

$$p_4 = \frac{11308}{38761} \approx 0,292; \quad p_5 = \frac{4415}{38761} \approx 0,114 \quad (\text{решение получено с}$$

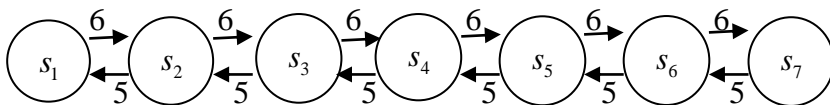
помощью интернет-ресурса Метод Гаусса онлайн – Мир Математики).

Задание 6

Найти финальные вероятности состояний для процесса гибели и размножения с непрерывным временем, если число его состояний n , интенсивности потоков гибели и размноже-

ния постоянны и равны соответственно μ и λ . $n=7$; $\mu=5$; $\lambda=6$.

Решение. Размеченный граф состояний имеет следующий вид:



Согласно этому графу состояний, имеем:

$$\| \lambda_{ij} \| = \begin{matrix} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 \\ \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}, i, j = \overline{1, 7},$$

и приходим к системе балансовых условий:

$$\begin{cases} 5p_2 = 6p_1 \\ 6p_1 + 5p_3 = 11p_2 \\ 6p_2 + 5p_4 = 11p_3 \\ 6p_3 + 5p_5 = 11p_4 \\ 6p_4 + 5p_6 = 11p_5 \\ 6p_5 + 5p_7 = 11p_6 \\ 6p_6 = 5p_7 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 = 1 \end{cases}.$$

Отбросив, например, шестое уравнение, и учитывая условие нормировки, находим решение системы

$$\begin{cases} -6p_1 + 5p_2 = 0 \\ 6p_1 - 11p_2 + 5p_3 = 0 \\ 6p_2 - 11p_3 + 5p_4 = 0 \\ 6p_3 - 11p_4 + 5p_5 = 0 \\ 6p_4 - 11p_5 + 5p_6 = 0 \\ 6p_6 - 5p_7 = 0 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 = 1 \end{cases} .$$

$$p_1 = \frac{15625}{201811} \approx 0,077; \quad p_2 = \frac{18750}{201811} \approx 0,093;$$

$$p_3 = \frac{22500}{201811} \approx 0,111; \quad p_4 = \frac{27000}{201811} \approx 0,134;$$

$$p_5 = \frac{32400}{201811} \approx 0,161; \quad p_6 = \frac{38880}{201811} \approx 0,193;$$

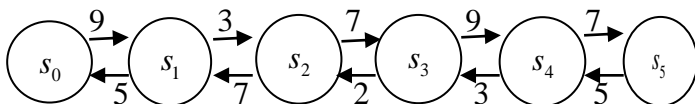
$$p_7 = \frac{46656}{201811} \approx 0,231$$

(решение получено с помощью интернет-ресурса Метод Гаусса онлайн – Мир Математики).

Задание 7

Найти финальные вероятности состояний для процесса гибели и размножения с непрерывным временем, если число его состояний 6, интенсивности потоков гибели μ_i и размножения $\lambda_i, i = \overline{0, 4}$: $\mu_0 = 5$; $\mu_1 = 7$; $\mu_2 = 2$; $\mu_3 = 3$; $\mu_4 = 5$; $\lambda_0 = 9$; $\lambda_1 = 3$; $\lambda_2 = 7$; $\lambda_3 = 9$; $\lambda_4 = 7$.

Решение. Размеченный граф состояний имеет следующий вид:



Согласно этому графу состояний, имеем:

$$\|\lambda_{ij}\| = \begin{matrix} & \begin{matrix} S_0 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}, i, j = \overline{0, 5},$$

и приходим к системе балансовых условий:

$$\begin{cases} 5p_1 = 9p_0 \\ 9p_0 + 7p_2 = 8p_1 \\ 3p_1 + 2p_3 = 14p_2 \\ 7p_2 + 3p_4 = 11p_3 \\ 9p_3 + 5p_5 = 10p_4 \\ 7p_4 = 5p_5 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1 \end{cases}.$$

Отбросив, например, пятое уравнение, и учитывая условие нормировки, находим решение системы

$$\begin{cases} -9p_0 + 5p_1 = 0 \\ 9p_0 - 8p_1 + 7p_2 = 0 \\ 3p_1 - 14p_2 + 2p_3 = 0 \\ 7p_2 - 11p_3 + 3p_4 = 0 \\ 9p_3 - 10p_4 + 5p_5 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1 \end{cases}.$$

$$p_1 = \frac{9}{5} p_0; \quad p_2 = \frac{1}{7} (8p_1 - 9p_0) = \frac{1}{7} \left(\frac{72}{5} p_0 - 9p_0 \right) = \frac{27}{35} p_0;$$

$$p_3 = \frac{1}{2} (14p_2 - 3p_1) = \frac{1}{2} \left(\frac{54}{5} p_0 - \frac{27}{5} p_0 \right) = \frac{27}{10} p_0;$$

$$p_4 = \frac{1}{3} (11p_3 - 7p_2) = \frac{1}{3} \left(\frac{297}{10} p_0 - \frac{27}{5} p_0 \right) = \frac{81}{10} p_0;$$

$$p_5 = \frac{7}{5} p_4 = \frac{7}{5} \cdot \frac{81}{10} p_0 = \frac{567}{10} p_0;$$

$$\begin{aligned} p_0 + \frac{9}{5} p_0 + \frac{27}{35} p_0 + \frac{54}{5} p_0 + \frac{567}{50} p_0 &= p_0 + \frac{63}{5} p_0 + \frac{27}{35} p_0 + \frac{567}{50} p_0 = \\ &= \frac{350 + 4410 + 270 + 3969}{350} p_0 = \frac{8999}{350} p_0 = 1; \end{aligned}$$

$$p_0 = \frac{350}{8999} \approx 0,039; \quad p_1 = \frac{630}{8999} \approx 0,07; \quad p_2 = \frac{270}{8999} \approx 0,03;$$

$$p_3 = \frac{945}{8999} \approx 0,105; \quad p_4 = \frac{2835}{8999} \approx 0,315; \quad p_5 = \frac{3969}{8999} \approx 0,441.$$