

2. Задание. Расчет линейных электрических цепей синусоидального тока

Задача 2.1.

Электрическую цепь, схема которой изображена на рис. 2.1, рассчитать при частоте $f = 50 \text{ Гц}$ по данным табл. 2.1. Построить топографическую векторную диаграмму.

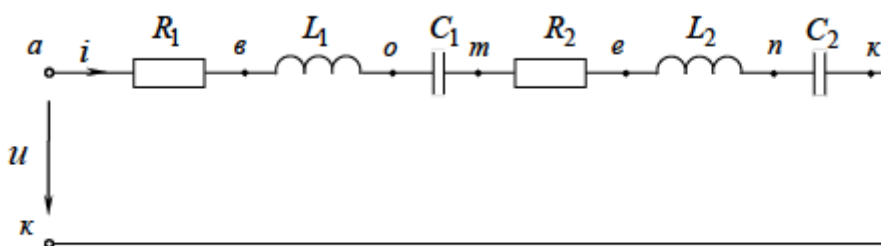
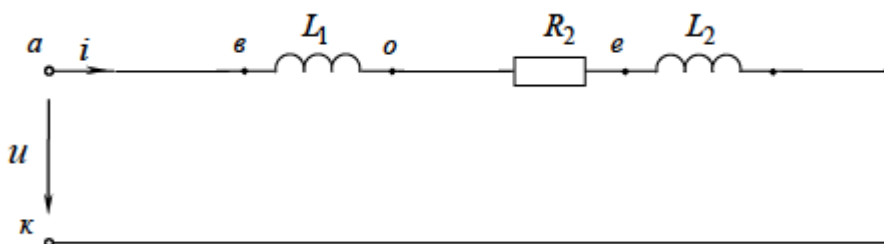


Рис. 2.1

Вариант	Данные для расчета								Определить					
	$R_1, \text{ Ом}$	$R_2, \text{ Ом}$	$L_1, \text{ мГн}$	$L_2, \text{ мГн}$	$C_1, \text{ мкФ}$	$C_2, \text{ мкФ}$		$\varphi_u, \text{ град}$	$\varphi_i, \text{ град}$					
99	—	6	6,36	6,36	—	—	$P = 600 \text{ Вт}$	60	—	i	u	$U_{\text{тк}}$	S	Q

Решение

Изобразим схему согласно варианта



Найдем угловую частоту:

$$\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3.14 \cdot 50 = 314 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

Найдем сопротивления реактивных элементов:

$$X_{L1} = \omega L_1 = 314 \cdot 6,36 \cdot 10^{-3} = 2 \text{ Ом};$$

$$X_{L2} = \omega L_2 = 314 \cdot 6,36 \cdot 10^{-3} = 2 \text{ Ом};$$

Полное сопротивление цепи:

$$Z = \sqrt{R_2^2 + (X_{L1} + X_{L2})^2} = \sqrt{6^2 + (2 + 2)^2} = 7,21 \text{ (Ом)}$$

Из определения активной мощности:

$$I = \sqrt{\frac{P}{R_2}} = \sqrt{\frac{600}{6}} = 10 \text{ А}$$

По закону Ома

$$U = IZ = 10 \cdot 7,21 = 72,1 \text{ В}$$

Мгновенное значение входного напряжения в общем виде

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u) = U \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_u), \text{ где}$$

$$U_m = U \sqrt{2} = 72,1 \sqrt{2} = 102 \text{ В}$$

Тогда

$$u = 102 \sin(314t + 60^\circ) = 102 \sin(314t + 60^\circ)$$

Угол сдвига фаз между напряжением и током в цепи:

$$\varphi = \arctg \frac{X_{L1} + X_{L2}}{R_2} = \arctg \frac{4}{6} = 33,7^\circ$$

Мгновенное значение тока в общем виде $i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i) = I \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_i)$, где


$$\varphi_i = \varphi_u - \varphi = 60 - 33,7^\circ = 26,3^\circ$$

В нашем случае: $i = 10 \sqrt{2} \sin(314t + 26,3^\circ) = 14,1 \sin(314t + 26,3^\circ) \text{ А}$

Полная и реактивная мощности цепи :

$$S = U \cdot I = 10 \cdot 72,1 = 721 \text{ В} \cdot \text{А};$$

$$Q = I^2 \cdot (X_{L1} + X_{L2}) = 10^2 \cdot 4 = 400 \text{ Вар}$$

Для построения топографической векторной диаграммы необходимо сначала рассчитать комплексные напряжения на каждом элементе схемы, а затем начать построение диаграммы с общей величины – вектора тока I , после чего построить последовательно друг за другом вектора напряжений, начиная с U 

В комплексной форме :

$$I = 9 + 4,4j \text{ A}$$

$$U = 36,1 + 62,4j \text{ B}$$

Определение падения напряжений на элементах цепи. U_{L1}

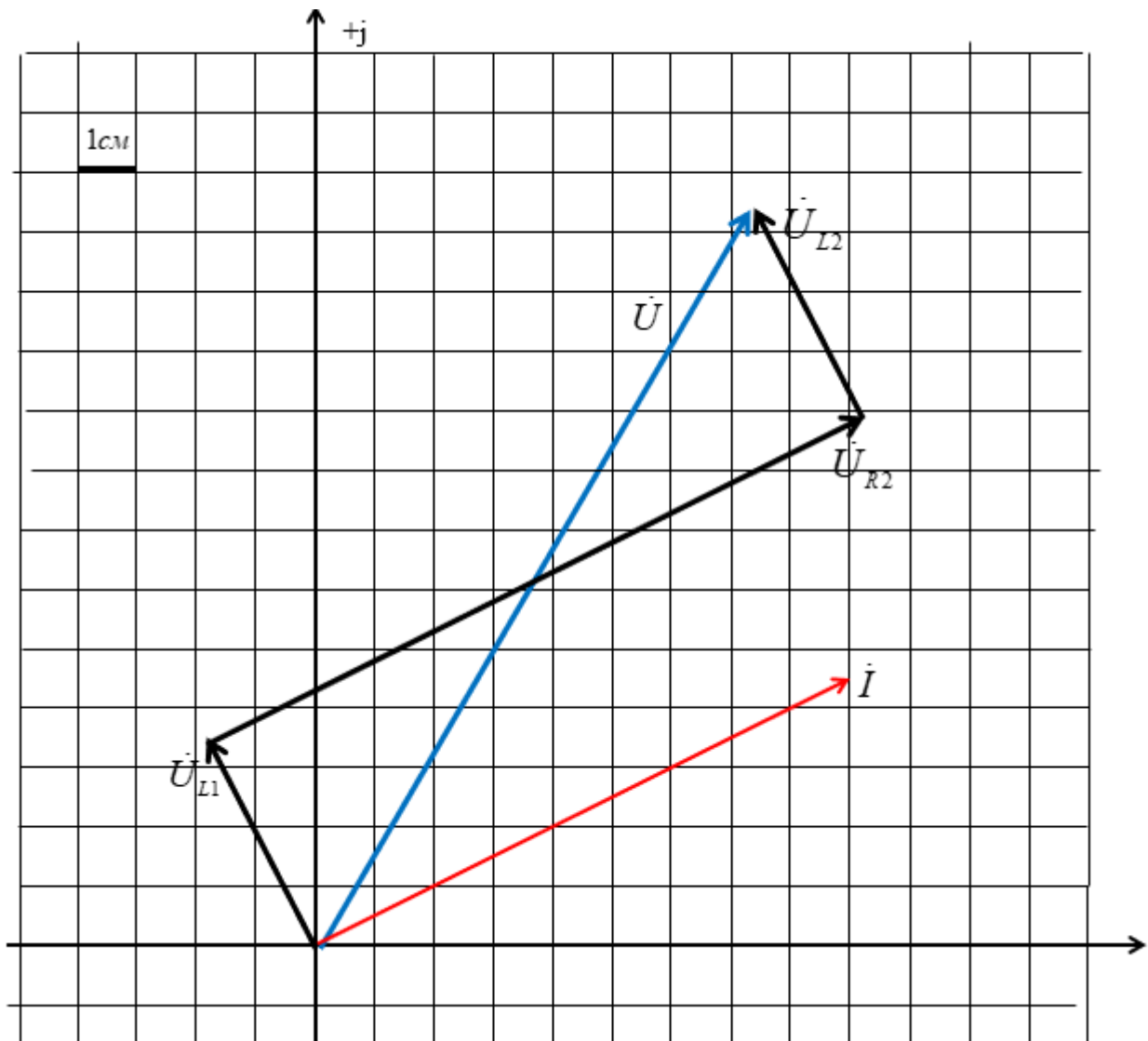
$$U_{L1} = 60 \cdot e^{j26,3^\circ} = 53,8 + 26,6j \text{ B}$$

$$U_{R2} = 20 \cdot e^{-j26,3^\circ} = -8,9 + 17,9j \text{ B}$$

$$U_{L2} = 20 \cdot e^{j26,3^\circ} = -8,9 + 17,9j \text{ B}$$

Построим векторную диаграмму тока и напряжений

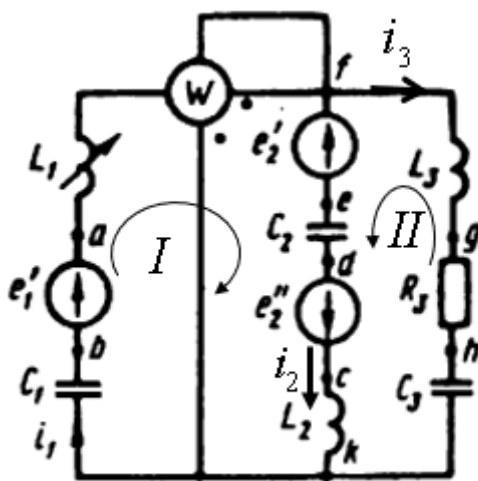
Масштаб : 1 см=5 В, 1 см=1 А



1. ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

1.1. Контрольное задание

- 1) На основании законов Кирхгофа составить в общем виде систему уравнений для расчета токов во всех ветвях, записав ее в двух формах: а) дифференциальной, б) символической.
- 2) Определить комплексы действующих значений токов, воспользовавшись одним из методов расчета линейных цепей
- 3) По результатам пункта 2 определить показания ваттметра
- 4) Построить топографическую диаграмму, совмещенную с векторной диаграммой токов, потенциал точки а принять равным нулю
- 5) Используя данные расчета п 2-4 записать выражение для мгновенного значения тока или напряжения. Построить график зависимости этой величины от ωt .



ДАНО:

$$R_3 = 70 \text{ Ом}; \quad L_1 = 32 \text{ мГн}; \quad C_1 = 4 \text{ мкФ} \quad C_2 = 2 \text{ мкФ}$$

$$L_2 = 36 \text{ мГн}; \quad L_3 = 27,9 \text{ мГн}; \quad C_3 = 5,69 \text{ мкФ}$$

$$f = 400 \text{ Гц};$$

$$e_1' = 141 \cos(\omega t + 330^\circ) \text{ В};$$

$$e_2'' = 30 \sin \omega t \text{ В};$$

$$e_2' = 171 \cos(\omega t + 270^\circ) \text{ В};$$

РЕШЕНИЕ

2. На основании законов Кирхгофа составляем в общем виде систему уравнений для расчета токов во всех ветвях цепи в двух формах. В нашей схеме 3 неизвестных токов (условно–положительное направление которых выбрали произвольно), поэтому система уравнений будет состоять из 3 независимых уравнений.

В схеме 3 ветви ($v=3$), 2 узла ($y=2$).

По I закону Кирхгофа составляется количество уравнений на единицу меньше числа узлов схемы, в нашей схеме 2 узла, значит составляем $y-1=1$ уравнение для любого узла. По II закону Кирхгофа составляем $v - (y-1) = 3 - (2-1)=2$ уравнения для независимых контуров I, II, для которых предварительно выбираем обход контура и указываем стрелкой на схеме :

а) дифференциальная форма :

для узла k: $i_2 - i_1 + i_3 = 0$;

Для контура I: $\frac{1}{C_2} \int i_2 dt + L_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt + L_1 \frac{di_1}{dt} = e'_1 + e''_2 - e'_2$;

Для контура II: $-\frac{1}{C_3} \int i_3 dt - L_3 \frac{di_3}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt - i_3 R_3 = -e'_2 + e''_2$

б) символическая форма:

для узла k: $\dot{I}_2 - \dot{I}_1 + \dot{I}_3 = 0$;

для контура I: $\dot{I}_2 j\omega L_2 + \dot{I}_2 \left(-\frac{j}{\omega C_2}\right) + \dot{I}_1 j\omega L_1 + \dot{I}_1 \left(-\frac{j}{\omega C_1}\right) = \dot{E}'_1 + \dot{E}''_2 - \dot{E}'_2$;

для контура II: $-\dot{I}_3 \left(-\frac{j}{\omega C_3}\right) + \dot{I}_2 j\omega L_2 - \dot{I}_3 j\omega L_3 + \dot{I}_2 \left(-\frac{j}{\omega C_2}\right) - R_3 \dot{I}_3 = -\dot{E}'_2 + \dot{E}''_2$.

3. Определим комплексы действующих значений токов во всех ветвях, воспользовавшись одним из методов расчета линейных электрических цепей, а именно методом **двух узлов**.

а) сделаем предварительные вычисления:

$$\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3,14 \cdot 400 = 2512 \text{ рад/с};$$

$$e'_1 = 141 \cos(2512t + 330^\circ) = 141 \sin(2512t + 60^\circ) \text{ В}$$

$$e'_2 = 171 \cos(2512t + 270^\circ) = 171 \sin 2512t \text{ В}$$

$$e''_2 = 30 \sin 2512t \text{ В}$$

В символической форме:

$$\dot{E}'_1 = \frac{E'_{m1}}{\sqrt{2}} e^{j\varphi'_1} = 100 e^{j60^\circ} = 50 + 86,6j \text{ В}$$

$$\dot{E}'_2 = \frac{E'_{m2}}{\sqrt{2}} e^{j\varphi'_2} = 120,9 e^{j0^\circ} = 120,9 \text{ В}$$

$$\dot{E}''_2 = \frac{E''_{m2}}{\sqrt{2}} e^{j\varphi''_2} = 21,2 e^{j0^\circ} = 21,2 \text{ В}$$

б) определим полное комплексное сопротивление для каждой ветви по формуле:

$$\underline{Z} = R + jX_L - jX_C = R + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L - \frac{j}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C},$$

где $jX_L = j\omega L = j2\pi fL$ – комплексное индуктивное сопротивление,

$$-jX_C = -\frac{j}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{2\pi fC} \text{ – комплексное емкостное сопротивление}$$

$$\underline{Z}_1 = j\omega L_1 - \frac{j}{\omega C_1} = 2512 \cdot 32 \cdot 10^{-3} j - \frac{j}{2512 \cdot 4 \cdot 10^{-6}} =$$

$$= 80,4j - 99,6j = -19,2j = 19,2e^{-90^\circ} j \quad \text{Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = j\omega L_2 - \frac{j}{\omega C_2} = 2512 \cdot 36 \cdot 10^{-3} j - \frac{j}{2512 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} =$$

$$= 90,4j - 199j = -108,6j = 108,6e^{-90^\circ} j \quad \text{Ом};$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + j\omega L_3 - \frac{j}{\omega C_3} = 70 + 2512 \cdot 27,9 \cdot 10^{-3} j - \frac{j}{2512 \cdot 5,69 \cdot 10^{-6}} =$$

$$= 70 + 70j - 70j = 70 = 70e^{0^\circ} j \quad \text{Ом};$$

в) согласно метода двух узлов :

$$\dot{U}_{fk} = \frac{\frac{\dot{E}'_2 - \dot{E}''_2}{Z_2} + \frac{\dot{E}'_1}{Z_1}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}} = \frac{\frac{99,7}{-108,6j} + \frac{50 + 86,6j}{-19,2j}}{\frac{1}{-108,6j} + \frac{1}{-19,2j} + \frac{1}{70}} = 38,24 + 82,5j = 90,93e^{j65,1^\circ} \text{ (В)}$$

г) найдем искомые токи в ветвях в комплексной форме (комплексные действующих значений токов в ветвях):

$$\dot{I}_1 = \frac{-\dot{U}_{fk} + \dot{E}'_1}{Z_1} = \frac{-38,24 - 82,5j + 50 + 86,6j}{-19,2j} = -0,21 + 0,61j = 0,65 \cdot e^{j109,2^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{fk} - \dot{E}'_2 + \dot{E}''_2}{Z_2} = \frac{38,24 + 82,5j - 99,7}{-108,6j} = -0,76 - 0,57j = 0,95 \cdot e^{j216,7^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{fk}}{Z_3} = \frac{38,24 + 82,5j}{70} = 0,55 + 1,18j = 1,3 \cdot e^{j65^\circ} \text{ А};$$

4. Определим показания ваттметра

а) согласно соединения начал токовой и обмотки напряжения, они равны:

$$W = \operatorname{Re}[-\dot{U}_{fk} \cdot (-\dot{I}_1^*)] = \operatorname{Re}[\dot{U}_{fk} \cdot \dot{I}_1^*] = \operatorname{Re}[90,93e^{j65,1^\circ} \cdot 0,65e^{-j109,2^\circ}] = \operatorname{Re}[59,1e^{-44,1^\circ}] = \\ = \operatorname{Re}[42,44 - 41,13j] = 42,44 \text{ Вт}$$

5. Построим топографическую диаграмму, совмещенную с векторной диаграммой токов. Приняв $\dot{\phi}_a = 0$, тогда

$$\dot{\phi}_b = \dot{\phi}_a - \dot{E}'_1 = -50 - 86,6j \text{ (В)};$$

$$\dot{\phi}_k = \dot{\phi}_b + \dot{I}_1(-jX_{C1}) = -50 - 86,6j - 99,6j(-0,21 + 0,61j) = 10,76 - 65,68j \text{ (В)};$$

$$\dot{\phi}_f = \dot{\phi}_a - \dot{I}_1 \cdot jX_{L1} = -80,4j(-0,21 + 0,61j) = 49,04 + 16,88j \text{ (В)};$$

$$\dot{\phi}_h = \dot{\phi}_k + \dot{I}_3(-jX_{C3}) = 10,76 - 65,68j - 70j(0,55 + 1,18j) = 93,26 - 104,18j \text{ (В)};$$

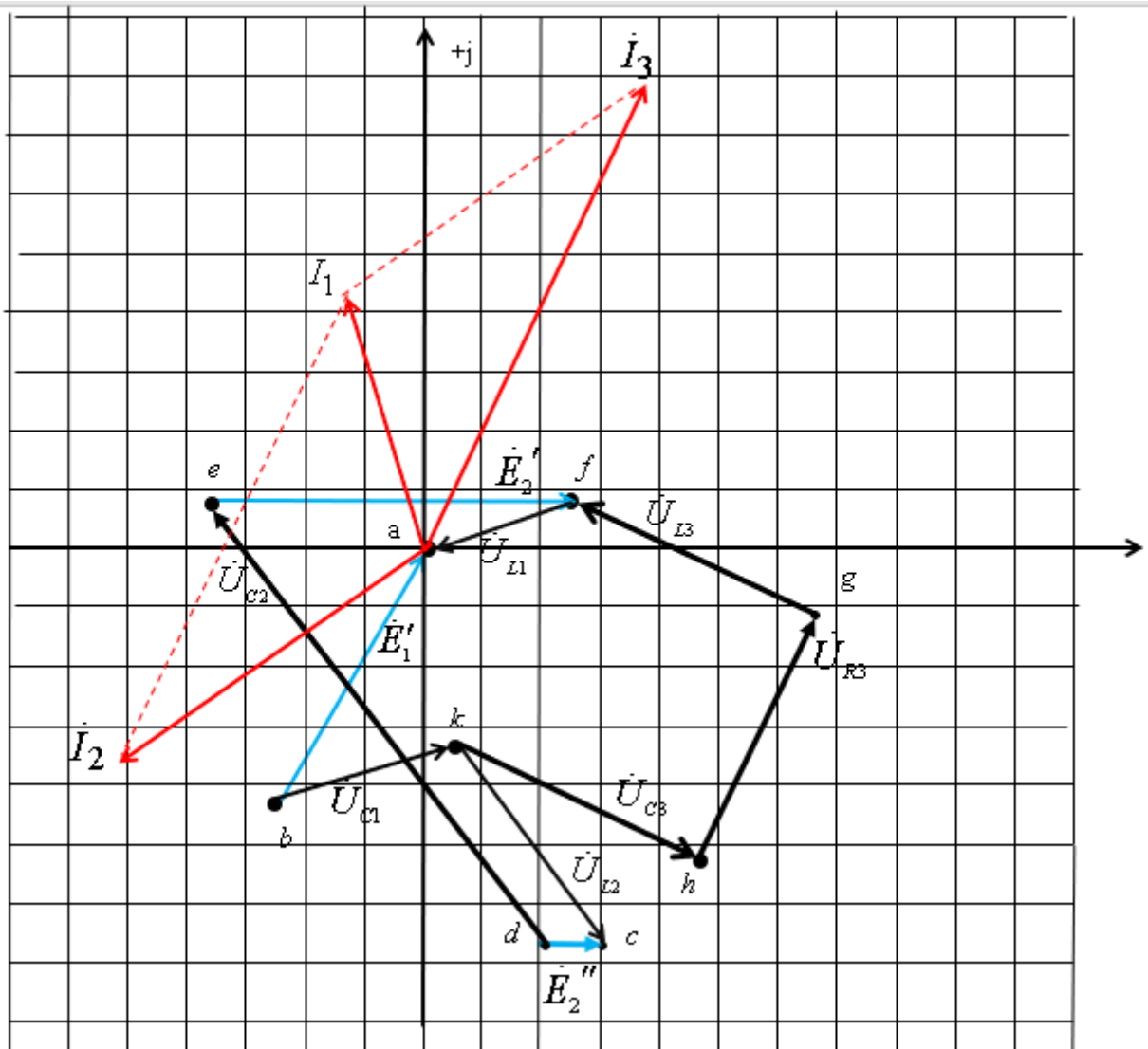
$$\dot{\phi}_g = \dot{\phi}_h + \dot{I}_3 \cdot R_3 = 93,26 - 104,18j + 70(0,55 + 1,18j) = 131,76 - 21,58j \text{ (В)};$$

$$\dot{\phi}_c = \dot{\phi}_k + \dot{I}_2 \cdot jX_{L2} = 10,76 - 65,68j + 90,4j(-0,76 - 0,57j) = 62,29 - 134,38j \text{ (В)};$$

$$\dot{\phi}_d = \dot{\phi}_c - \dot{E}''_2 = 62,29 - 134,38j - 21,2 = 41,09 - 134,38j \text{ (В)};$$

$$\dot{\phi}_e = \dot{\phi}_f - \dot{E}'_2 = 49,04 + 16,88j - 120,9 = -71,86 + 16,88j \text{ (В)};$$

Масштаб: 1 см = 20 В, 1 см = 0,15 А



6. Мгновенное значение тока i_3

$$i_3 = I_{m3} \sin(\omega t + \psi_{i_3}) = I_3 \sqrt{2} \sin(\omega t + \psi_{i_3}) = 1,3\sqrt{2} \sin(2512 + 65^\circ) \text{ A}$$

