Лекция 5

Реляционная алгебра

Третьим аспектом реляционной модели данных является обработка данных, осуществляемая с помощью операторов реляционной алгебры. В основном операторы имеют на входе отношения и возвращают отношения в качестве результата.

Реляционная алгебра состоит из восьми операторов: четырех традиционных операций над множествами (теоретико-множественных операций) и четырех специальных реляционных операций. К традиционным операциям относятся операции:

* объединение
* возвращает отношение, содержащее все кортежи, принадлежащие или одному из двух

определенных отношений, или обоим

* пересечение
* возвращает отношение, содержащее все кортежи, принадлежащие одновременно двум

определенным отношениям

* вычитание
* возвращает отношение, содержащее все кортежи, которые принадлежат первому из двух

определенных отношений и не принадлежат второму

* расширенное декартово произведение
* возвращает отношение, содержащее всевозможные кортежи, являющиеся сочетанием двух

кортежей, принадлежащих соответственно двум определенным отношениям К специальным операциям относятся:

* выборка (ограничение)
* возвращает отношение, содержащее все кортежи из определенного отношения,

удовлетворяющие определенным условиям

* проекция
* возвращает отношение, содержащее все кортежи (называемые как подкортежи)

определенного отношения после исключения из него некоторых атрибутов

* соединение (естественное)
* возвращает отношение, кортежи которого - это сочетание двух кортежей (принадлежащих

соответственно двум определенным отношениям), имеющих общее значение для одного или нескольких атрибутов этих двух отношений (и такие общие значения в результирующем кортеже появляются только один раз)

* деление
* для двух отношений, бинарного и унарного, возвращает отношение, содержащее все

значения одного атрибута бинарного отношения, соответствующее (в другом атрибуте) всем значениям в унарном отношении

Замкнутость

Как уже отмечалось, результат каждой операции над отношением также является отношением. Это реляционное свойство называется свойством замкнутости. Отсюда можно сделать вывод: поскольку результат любой операции имеет тот же тип, что и исходные объекты (отношения), то результат одной операции может использоваться в качестве исходных данных для другой. Другими словами, можно записывать вложенные выражения, т.е. выражения, в которых операнды сами представлены выражениями вместо простых имен отношений.

Совместимость по типу

Операции объединения, пересечения и вычитания требуют от операндов совместимости по типу. Будет говорить, что два отношения совместимы по типу, если у них эквивалентные схемы, а точнее:

1. если каждое их них имеет одно и то же множество атрибутов (а значит и одинаковую степень)
2. если возможно такое упорядочение атрибутов в схемах, что на одинаковых местах будут находиться сравнимые атрибуты, т.е. атрибуты, определенные на одном и том же домене

Пример: имеются следующие отношения (Рис. 1)

Отношение Продукты1 содержит продукты, имеющиеся в магазине Отношение Продукты2 содержит продукты, поставляемые поставщиком Р2 Отношение Поставщики содержит поставщиков продуктов Отношение ВидПродукта содержит виды продуктов

Первые три отношения имеют одинаковую степень, т.е. выполняется первое условие совместимости по типу. Второе условие выполняется только для отношений Продукты1 и Продукты2, т.е. только эти отношения совместимы по типу, а значит с ними можно выполнять операции объединения, пересечения и вычитания.

Продукты1

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| КодПродукта | Продукт | Ко дПо с т авщик а |
| 1 | Сахар | Pi |
| 2 | Соль | Pi |
| 13 | Мука | Pi |
| 26 | Рис | Р2 |
| 58 | Гречка | Р2 |
| 130 | Крупа манная | Р2 |
| 162 | Пшено | Р2 |
| 474 | Молоко | Рз |
| 891 | Кефир | Рз |

Продукты2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| КодПродукта | Продукт | КодПо с т авщик а |
| 26 | Рис | Р2 |
| 35 | Перловка | Р2 |
| 58 | Гречка | Рз |
| 130 | Крупа манная | Рз |
| 162 | Пшено | Рз |
| 200 | Крупа ячневая | Рз |

Поставщики

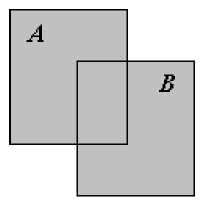
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| КодП | Наименование | Город |
| Pi | ООО «Восток» | Владивосток |
| Рз | ОАО «Приморье» | Уссурийск |
| Рз | ПБОЮЛ Сидоров А.С. | Находка |
|  | ОАО «Владхлеб» | Владивосток |

Б ид Продукта

|  |  |
| --- | --- |
| КодВида | Вид |
| 1 | Молочная |
| 2 | Мясная |
| 3 | Хлебопродукция |

Рисунок 1. База данных продуктов и поставщиков (значения для примера)

Теоретико-множественные операции реляционной алгебры



Объединением двух совместимых по типу отношений А и В называется отношение с тем же заголовком, как в исходных отношениях, и с телом, состоящим из множества всех кортежей, принадлежащих А или В или обоим отношением (за исключением повторяющихся).

Пусть заданы два отношения A={a}, B={b}, где а и b -

соответственно кортежи отношений A и B, то объединение

A U B = {c | с∈ A v с∈B},

Здесь c - кортеж нового отношения, v - операция логического сложения «ИЛИ».

Пример: Объединим, приведенные на Рис.1, отношения Продукты 1 (содержащее продукты, имеющиеся в магазине) и Продукты2 (содержащее продукты, поставляемые поставщиком Р2). Результатом объединения станет отношение R1 (Рис. 2), содержащее продукты, которые или имеются в магазине или поставляются поставщиком Р2 (либо и то и другое).

Обратите внимание, что дублирующие кортежи исключены из результирующего отношения

R1.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| КодПродукта | Продукт | КодПо с т авщик а |
| 1 | Сахар | Pi |
| 2 | Соль | Pi |
| 13 | Мука | Pi |
| 26 | Рис | ъ |
| 58 | Гречка | ъ |
| 130 | Крупа манная | ъ |
| 162 | Пшено | ъ |
| 474 | Молоко | Рз |
| 891 | Кефир | Рз |
| 35 | Перловка | Рз |
| 200 | Крупа ячневая | Рз |

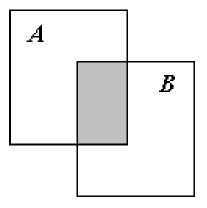


Рисунок 2. Пример объединения

Пересечением двух совместимых по типу отношений А и В называется отношение с тем же заголовком, как в исходных отношениях, и с телом, состоящим из множества всех кортежей, принадлежащих одновременно обоим отношением А и В.

A∩B = {c | c∈A ∧ c∈B}

Здесь ∧ - операция логического умножения (логическое «И»).

Пример: Пересечением отношений Продукты1 и Продукты2 (Рис. 1) станет отношение R2 (Рис. 3), содержащее продукты, имеющиеся в магазине и поставляемые поставщиком P2.

R2 = Продукты1 П Продукты2 R2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| КодПродукта | Продукт | КодПо с т авщик а |
| 26 | Рис | Рз |
| 58 | Гречка | Рз |
| 130 | Крупа манная | Рз |
| 162 | Пшено | Рз |

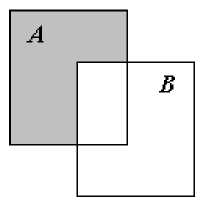


Рисунок 3. Пример пересечения

Вычитанием двух совместимых по типу отношений А и В называется отношение с тем же заголовком, как в исходных отношениях, и с телом, состоящим из множества всех кортежей, принадлежащих отношению А и не принадлежащих отношению В.

A \ B = {c | с∈A ∧ c∈B}

Отметим, что операции объединения и пересечения являются коммутативными операциями, т.е. результат операции не зависит от порядка аргументов в операции. Операция вычитания является несимметричной операцией, т.е. результат операции будет различным для разного порядка аргументов.

Пример: При вычитании отношения Продукты2 из отношения Продукты1 (Рис. 1) получится отношение R3 (Рис. 4), содержащее продукты, имеющиеся в магазине, кроме тех продуктов, которые поставляет поставщик P2.

При вычитании отношения Продукты1 из отношения Продукты2 получится другое отношение R4 (поскольку операция вычитания не коммутативная). Отношение R4 (Рис. 4) будет содержать продукты, поставляемые поставщиком P2, кроме тех продуктов, которые имеются в магазине.

***R4***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| КодПродукта | Продукт | КодПо с т авщик а |
| 35 | Перловка | ъ |
| 200 | Крупа ячневая | Рз |

***R3***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| КодПродукта | Продукт | КодПо с т авщик а |
| 1 | Сахар | Pi |
| 2 | Соль | Pi |
| 13 | Мука | Pi |
| 474 | Молоко | Рз |
| 891 | Кефир | Рз |

Рисунок 4. Примеры вычитания

Расширенное декартово произведение

Эта операция не накладывает никаких дополнительных условий на схемы исходных отношений, поэтому операция расширенного декартова произведения допустима для любых двух отношений.

Прежде чем определить саму операцию, введем дополнительно понятие конкатенации, или сцепления, кортежей.

Сцеплением, или конкатенацией, кортежей c = <ci,c2,...,cn> и q = <qbq2,...,qm> называется кортеж, полученный добавлением значений второго в конец первого. Сцепление кортежей c и q обозначается как (c,q).

(c,q) = <c1,c2,.,cn,q1 ,q2,.,qm>

здесь n - число элементов в первом кортеже c, m - число элементов во втором кортеже q.

Все предыдущие операция не меняли степени или арности отношений - это следует из определения эквивалентности схем отношений. Операция расширенного декартова произведения меняет степень результирующего отношения.

Расширенное декартово произведение двух отношений А и В, где А и В не имеют общих атрибутов, определяется как отношение с заголовком, который представляет собой сцепление двух заголовков исходных отношений А и В, и телом, состоящим из множества всех кортежей c, таких, что c представляет собой сцепление кортежа а, принадлежащего отношению A, и кортежа b,



принадлежащего отношению В.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а |  | X |
| Ь |  | У |
| с |  |  |

|  |  |
| --- | --- |
| а | X |
| а | У |
| Ь | X |
| Ь | У |
| с | X |
| с | У |

Т.е. если A={a}, B={b}, то расширенное декартово произведение

A ® B = {(a,b) | a∈A ∧ b∈B}

Обратите внимание, что кардинальное число результата равно произведению кардинальных чисел исходных отношений А и В, а степень равна сумме их степеней.

Операция декартова произведения довольно редко используется как самостоятельная операция, чаще результат этой операции подвергается дальнейшей обработке.

Пример: Декартовым произведением отношений Поставщики и ВидПродукта (Рис. 1) будет отношение R5 (Рис. 5). Отношение R5 соответствует ситуации, когда все поставщики поставляют все виды продуктов.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| КодП | Наименование | Город | КодВида | Вид |
| Pi | ООО «Восток» | Владивосток | 1 | Молочная |
| Pi | ООО «Восток» | Владивосток | 2 | Мясная |
| Pi | ООО «Восток» | Владивосток | 3 | Хлебопродукция |
| Рз | ОАО «Приморье» | Уссурийск | 1 | Молочная |
| Рз | ОАО «Приморье» | Уссурийск | 2 | Мясная |
| Рз | ОАО «Приморье» | Уссурийск | 3 | Хлебопродукция |
| Рз | ПБОЮЛ Сидоров А.С. | Находка | 1 | Молочная |
| Рз | ПБОЮЛ Сидоров А.С. | Находка | 2 | Мясная |
| Рз | ПБОЮЛ Сидоров А.С. | Находка | 3 | Хлебопродукция |
| Р4 | ОАО «Владилеб» | Владивосток | 1 | Молочная |
|  | ОАО «Влад ил еб» | Владивосток | 2 | Мясная |
| ?4 | ОАО «Влад ил еб» | Владивосток | 3 | Хлебопродукция |

Рисунок 5. Пример расширенного декартова произведения

Специальные реляционные операции

Выборка (ограничение, горизонтальное подмножество)

Для определения этой операции необходимо ввести дополнительные обозначения.

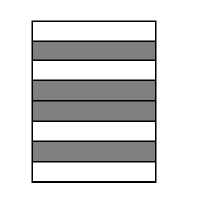
Пусть а - булевское выражение, составленное из термов сравнения с помощью связок И (л), ИЛИ (v), НЕ (-) и, возможно, скобок. В качестве термов сравнения допускаются:

1. терм А θ а,

где А - имя некоторого атрибута, принимающего значения из домена D; а - константа, взятая из того же домена D, а ∈ D; 0 - одна из допустимых для данного домена D операций сравнения (=, ≠, < ^, >, ^);

1. терм А θ В,

где А, В - имена некоторых 0-сравнимых атрибутов, то есть атрибутов, принимающих значение из одного и того же домена D.



Тогда выборкой (Q-выборкой), заданной на отношении А в виде булевского выражения, определенного на атрибутах отношения А, называется отношение, имеющее тот же заголовок, что и отношение А, и тело, содержащее множество всех кортежей отношения А, для которых истинно условие выбора или ограничения:

**A**[**ɑ**(t)] = {t | t **∈** А **^ ɑ**(t) = “**Истина**”}

Операция ограничения является одной из основных при работе с реляционной моделью данных. Условие а может быть сколь угодно сложным.

*Пример*:

» Результатом выборки продуктов, поставляемых поставщиком P3, из отношения Продукты1 (Рис. 1) будет отношение R6 (Рис. 6, а)

» Результатом выборки Владивостокских поставщиков из отношения Поставщики (Рис. 1) будет отношение R7 (Рис. 6, b)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| КодП | Наименование | Город |
| Pi | ООО «Восток» | Владивосток |
| Р4 | ОАО «Владхлеб» | Владивосток |

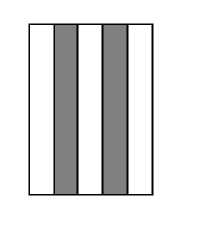
а) Е.6 = Пр од у кты.1 [К од По став щика = “Рз ” ] R6

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| КодПродукта | Продукт | КодПо с т авщик а |
| 474 | Молоко | Рз |
| 891 | Кефир | Рз |

Рисунок 6. Примеры операций выборки

Проекцией отношения A по атрибутам X, Y,……Z, где каждый из атрибутов принадлежит

отношению A(A[X, Y,……Z]), называется отношение с заголовком {X, Y,….Z} и телом,



содержащим множество всех кортежей {X:x, Y:y, Z:z}, таких, для которых в отношении A значение атрибута X равно х, атрибута Y равно у, атрибута Z равно z. Таким образом, с помощью оператора проекции получено «вертикальное» подмножество данного отношения, т.е. подмножество, получаемое исключением всех атрибутов, не указанных в списке атрибутов, и последующим исключением дублирующих кортежей (подкортежей) из того, что осталось.

Никакой атрибут не может быть указан в списке атрибутов более одного раза.

*Пример*:

Проекцией отношения *Продукты1* (Рис. 2-17) по атрибуту *КодПоставщика* будет отношение *R8* (Рис. 7, а). Обратите внимание, что дублирующие кортежи исключены из отношения *R8*

Проекцией отношения Поставщики (Рис. 1) по атрибуту Город будет отношение R9 (Рис. 7, b)

Довольно часто операция проекции используется в сочетании с другими операциями. Например, нужно выбрать названия поставщиков из Владивостока (на основе отношения Поставщики - Рис. 1). Сначала выполняется операция выборки, а затем – проекции



Рисунок 6. Примеры операций проекции

Соединение (естественное, условное)

Операция соединения имеет несколько разновидностей. Однако наиболее важным является естественное соединение, поэтому часто для обозначения именно естественного соединения используют общий термин «соединение».

Пусть отношения A и B имеют заголовки:

{X1, X2,..., Xm, Y1, Y2,..., Yn} и

{ Y1, Y2,..., Yn, Z1, Z2,..., Zp} соответственно;

т.е. атрибуты Y1, Y2,., Yn (и только они) - общие для двух отношений;

X1, X2,..., Xm - остальные атрибуты отношения A; Z1, Z2,..., Zp - остальные атрибуты отношения B. Предположим также, что соответствующие атрибуты (т.е. атрибуты с одинаковыми именами) определены на одном и том же домене. Будем рассматривать выражения {X1, X2,..., Xm}, {Y1, Y2,..., Yn}, {Z1, Z2,..., Zp} как три составных атрибута X, Y, Z соответственно.

Тогда естественным соединением отношений A и B называется отношение с заголовком {X,

Y, Z} и телом, содержащим множество всех кортежей {X:x, Y:y, Z:z}, таких, для которых в отношении A значение атрибута X равно х, а атрибута Y равно у, и в отношении B значение атрибута Y равно у, а атрибута Z равно z.

Естественное соединение обладает свойствами коммутативности и ассоциативности.

Отметим также, что если отношения A и B не имеют общих атрибутов, то естественное соединение превращается в декартово произведение.

Пример: Рассмотрим отношения Продукты1 и Поставщики (Рис. 1). Атрибуты

КодПоставщика и КодП определены на одном и том же домене кодов поставщиков. Поскольку при естественном соединении также требуется, чтобы общие атрибуты соединяемых отношений имели одинаковые имена, переименуем атрибут КодП отношения Поставщики в КодПоставщика. Тогда естественным соединением отношений Продукты1 и Поставщики по атрибуту КодПоставщика будет отношение R11 (Рис. 8).

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| R11 =Продукты1 [Продукты 1.КодПоставщика = Поставщики.КодПоставщика] Поставщики R11 | | | | |
| КодПродукта | Продукт | КодПоставщика | Наименование | Город |
| 1 | Сахар | Pi | ООО «В о стоки | Владивосток |
| 2 | Соль | Pi | ООО «Восток» | Владивосток |
| 13 | Мука | Pi | ООО «Восток» | Владивосток |
| 26 | Рис | Р2 | ОАО «Приморье» | Уссурийск |
| 58 | Гречка | Р2 | ОАО «Приморье» | Уссурийск |
| 130 | Крупа манная | Р2 | ОАО «Приморье» | Уссурийск |
| 162 | Пшено | Р2 | ОАО «Приморье» | Уссурийск |
| 474 | Молоко | Рз | ПБОЮЛ Сидоров А С. | Находка |
| 891 | Кефир | Рз | ПБОЮЛ Сидоров А. С. | Находка |

Рис. 8. Пример естественного соединения

Рассмотрим теперь условное соединение (или 0-соединение). Эта операция используется, когда необходимо соединить два отношения на основе некоторых условий, отличных от эквивалентности.

Пусть отношения A и B не имеют общих имен атрибутов, и 0 определяется как в операции выборки. Тогда условным соединением отношения A по атрибуту X с отношением B по атрибуту Y называется отношение с заголовком, который представляет собой сцепление двух заголовков исходных отношений А и В (как и при операции декартова произведения), и с телом, содержащим множество кортежей t, таких что t принадлежит этому декартову произведению и вычисление условия “X 0 Y” дает значение «истина» для этого кортежа. Атрибуты X и Y должны быть определены на одном и том же домене, а операция должна иметь смысл для этого домена.

Пример: Получить названия продуктов (отношение Продукты1 - Рис. 1), поставляемых поставщиками из Владивостока (отношение Поставщики - Рис. 1). По сути, в этом примере необходимо использовать две операции: условного соединения - для получения непосредственносписка продуктов, поставляемых Владивостокскими поставщиками (R12); и проекции - для получения только названий продуктов (R13) (Рис. 8).

R12 = Продукты! [(Продукты1.КодПоставщика = Поставщики.КодП) Л Поставщики.Город = “Владивосток”] Поставщики R13=R12 [Продукт] или

R13 = (Продукты! [(Продукты 1. К од По став щика = Поставщики. КодП) Л Поставщики.Город = “Владивосток”] Поставщики) [Продукт]

R12

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| КодПродукта | Продукт | КодПо с т авщик а | КодП | Наименов ание | Город |
| 1 | Сахар | Pi | Pi | ООО кВ о сток» | Владивосток |
| 2 | Соль | Pi | Pi | ООО «Восток» | Владивосток |
| 13 | Мука | Pi | Pi | ООО «Восток» | Владивосток |

R13

Продукт

Сахар

Соль

Мука

Рис. 8. Пример условного соединения

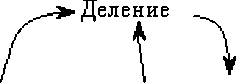
Деление

Пусть отношения A и B имеют заголовки:

{X1, X2,..., Xm, Y1, Y2,..., Yn} и

{ Y1, Y2,..., Yn } соответственно;

т.е. атрибуты Y1, Y2,., Yn - общие для двух отношений, и отношение A имеет дополнительные атрибуты X1, X2,..., Xm, а отношение B не имеет дополнительных атрибутов. (Отношения A и B представляют соответственно делимое и делитель). Предположим также, что соответствующие атрибуты (т.е. атрибуты с одинаковыми именами) определены на одном и том же домене. Пусть выражения {X1, X2,..., Xm^ {Y1, Y2,..., Yn}обозначают два составных атрибута X и Y соответственно.



— Тогда делением отношений А и В называется отношение

|  |  |
| --- | --- |
| а | х |
| а | У |
| а | Z |
| Ь | х |
| с | У |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| X |  | а |
| У |  | |

с заголовком {X} и телом, содержащим множество всех кортежей {Х:х} таких, что существует кортеж {Х:х, Y:y}, который принадлежит отношению А для всех кортежей {Y:y}, принадлежащих отношению В.

Нестрого это можно сформулировать так: результат содержит такие Х-значения из отношения А, для которых соответствующие Y-значения (из А) включают все Y-значения из отношения В.

Если запрос на естественном языке включает слово “все” (“получить поставщиков, поставляющих все виды продуктов”), то почти наверняка потребуется операция деления.

Пример: Пусть отношение R14 содержит поставщиков и виды поставляемых ими продуктов, а отношение ВидПродукта содержит виды продуктов (Рис. 9). Тогда, чтобы получить поставщиков поставляющих ВСЕ виды продуктов, необходимо отношение R14 разделить на отношение ВидПродукта по атрибуту КодВида (Рис. 9).

К.15 = R14 [КодВидаКодВида] ВидПродукта

R14 Б ид Продукта RJ5

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| КодП | Наименование | КодВида |
| Pi | ООО «Восток» | 1 |
| Pi | ООО «Восток» | 2 |
| Р2 | ОАО «Приморье» | 1 |
| Р2 | ОАО «Приморье» | 2 |
| Р2 | ОАО «Приморье» | 3 |
| Рз | ПБОЮЛ Сидоров А.С. | 3 |
| Р4 | ОАО «Владхлеб» | 1 |
| Р4 | ОАО «Владхлеб» | 2 |
| Р4 | ОАО «Владхлеб» | 3 |

|  |  |
| --- | --- |
| КодВида | Вид |
| 1 | Молочная |
| 2 | Мясная |
| 3 | Хлебопродукция |

|  |  |
| --- | --- |
| КодП | Наименование |
| ъ | ОАО «Приморье» |
| Р4 | ОАО «Владхлеб» |

Рисунок 9. Пример операции деления

Итак, мы рассмотрели операции реляционной алгебры. Эти восемь операций (объединение, пересечение, вычитание, декартово произведение, выборка, проекция, соединение, деление) не представляют собой минимальный набор операций. Т.е. некоторые операции можно выразить через другие операции, а именно - соединение, пересечение и деление. Например, соединение - это проекция выборки декартова произведения. Таким образом, примитивными операциями, т.е. которые нельзя выразить через другие операции, являются остальные пять операций: объединение, вычитание, выборка, проекция, декартово произведение. Эти пять примитивных операций будут составлять минимальный набор операций реляционной алгебры.

Однако на практике другие три операции (особенно соединение) настолько часто используются, что имеет смысл обеспечить их непосредственную поддержку, несмотря на то, что они не примитивны.