

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ им. Р.Е. АЛЕКСЕЕВА»**

**Б.Ю. АЛТУНИН, А.А. КРАЛИН, Н.Г. ПАНКОВА**

**ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА**  
**КОМПЛЕКС УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ**

**Часть 1**

Издание 2-е, исправленное

*Рекомендовано Ученым советом Нижегородского государственного  
технического университета им. Р.Е. Алексеева в качестве  
учебно-методического пособия для студентов очной, заочной и очно-заочной  
сокращенной форм обучения неэлектротехнических профилей*

**Нижний Новгород 2012**

**Алтунин Б.Ю., Кралин А.А., Панкова Н.Г. Электротехника и электроника:** комплекс учебно-методических материалов: Ч.1/ Б.Ю. Алтунин, А.А. Кралин, Н.Г. Панкова; НГТУ им. Р.Е. Алексеева. Н.Новгород, 2012.-95 с.

Учебно-методический комплекс по изучению дисциплины «Электротехника и электроника» состоит из двух частей. В первой части представлены опорный конспект лекций, в котором рассмотрены цепи постоянного и переменного тока, трехфазные цепи, переходные процессы в линейных электрических цепях, а также магнитные цепи. Даны методические указания и образцы выполнения контрольных работ по указанным темам.

Предназначен комплекс для студентов неэлектротехнических профилей очной, заочной и очно-заочной сокращенной форм обучения.

Редактор Е.В. Комарова

Подписано в печать 12.11.2012. Формат 60 x 84  $\frac{1}{16}$ .

Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,5.

Уч.-изд. л. 6,0. Тираж 300 экз. Заказ

---

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева  
Типография НГТУ  
603950, ГСП-41, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24.

© Нижегородский государственный  
технический университет  
им. Р.Е. Алексеева, 2012  
©Алтунин Б.Ю. Кралин А.А.,  
Панкова Н.Г. 2012

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Пояснительная записка.....</b>	<b>5</b>
<b>Опорный конспект лекций.....</b>	<b>6</b>
<b>1. Основные определения.....</b>	<b>6</b>
1.1. Основные пояснения и термины.....	6
1.2. Пассивные элементы схемы замещения.....	7
1.3. Активные элементы схемы замещения.....	9
1.4. Основные определения, относящиеся к схемам.....	10
1.5. Режимы работы электрических цепей.....	11
1.6. Основные законы электрических цепей.....	11
<b>2. Эквивалентные преобразования схем.....</b>	<b>14</b>
2.1. Последовательное соединение элементов электрических цепей.....	14
2.2. Параллельное соединение элементов электрических цепей.....	14
2.3. Преобразование треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду.....	17
2.4. Преобразование звезды сопротивлений в эквивалентный треугольник.....	18
<b>3. Анализ электрических цепей постоянного тока с одним источником энергии.....</b>	<b>19</b>
3.1. Расчет электрических цепей постоянного тока с одним источником методом свертывания.....	19
3.2. Расчет электрических цепей постоянного тока с одним источником методом подобия или методом пропорциональных величин.....	20
<b>4. Анализ сложных электрических цепей с несколькими источниками энергии.....</b>	<b>21</b>
4.1. Метод непосредственного применения законов Кирхгофа.....	21
4.2. Метод контурных токов.....	22
4.3. Метод узловых потенциалов.....	24
4.4. Метод двух узлов.....	26
4.5. Метод эквивалентного генератора.....	27
<b>5. Электрические цепи однофазного переменного тока.....</b>	<b>29</b>
5.1. Основные определения.....	29
5.2. Изображения синусоидальных функций времени в векторной форме.....	31
5.3. Изображение синусоидальных функций времени в комплексной форме.....	33
5.4. Активное сопротивление в цепи синусоидального тока.....	35
5.5. Индуктивная катушка в цепи синусоидального тока.....	36
5.6. Емкость в цепи синусоидального тока.....	37
5.7. Последовательно соединенные реальная индуктивная катушка и конденсатор в цепи синусоидального тока.....	38

5.8. Параллельно соединенные индуктивность, емкость и активное сопротивление в цепи синусоидального тока.....	41
5.9. Резонансный режим в цепи, состоящей из параллельно включенных реальной индуктивной катушки и конденсатора.....	43
5.10. Мощность в цепи синусоидального тока.....	44
5.11. Баланс мощностей .....	47
5.12. Согласованный режим работы электрической цепи. Согласование нагрузки с источником.....	48
<b>6. Трехфазные цепи.....</b>	<b>49</b>
6.1. Основные определения .....	49
6.2. Соединение в звезду .....	50
6.3. Соединение в треугольник .....	51
6.4. Расчет трехфазной цепи, соединенной звездой.....	53
6.5. Мощность в трехфазных цепях .....	57
<b>7. Переходные процессы в линейных электрических цепях.....</b>	<b>57</b>
7.1. Общая характеристика переходных процессов.....	57
7.2. Переходные процессы в цепях с одним реактивным элементом.....	59
7.3. Переходные процессы в цепях с двумя реактивными элементами.....	65
<b>8. Магнитные цепи.....</b>	<b>70</b>
8.1. Основные определения.....	70
8.2. Свойства ферромагнитных материалов.....	71
8.3. Расчет магнитных цепей.....	72
<b>9. Описание практических занятий.....</b>	<b>73</b>
9.1. Задача ЭЦ-1. Расчет линейной цепи постоянного тока.....	75
9.2. Задача ЭЦ-2. Расчет цепи синусоидального тока.....	83
9.3. Задача ЭЦ-3. Расчет трехфазной электрические цепи.....	89
<b>10. Контроль знаний.....</b>	<b>93</b>
<b>Список рекомендуемой литературы.....</b>	<b>95</b>

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

*Цель обучения* по дисциплине «Электротехника и электроника» - научить студентов неэлектрических специальностей:

- выбирать необходимые электротехнические, электронные и электроизмерительные устройства;
- правильно эксплуатировать и составлять совместно с инженерами - электриками технические задания на разработку электрических частей автоматизированных установок для управления производственными процессами.

В результате изучения дисциплины «Электротехника и электроника» студенты должны знать:

- основные электротехнические законы, методы анализа электрических, магнитных и электронных цепей;
- принципы действия, свойства, конструкцию и потенциальные возможности основных электротехнических, электронных устройств и измерительных приборов;
- терминологию и символику, применяемую в электротехнике и электронике, а также уметь:
- производить измерения основных электрических величин, связанных с профилем инженерной деятельности;
- включать электротехнические приборы, аппараты и машины, управлять ими и контролировать их эффективную и безопасную работу.

Дисциплина «Электротехника и электроника» базируется на разделах курса физики «Электричество и магнетизм», «Колебания и волны», «Физика твердого тела» и на ряде разделов курса высшей математики: «Комплексные числа», «Ряды» и т.д.

По курсу запланированы лекции и лабораторные практикумы. В соответствии с учебным планом курс лекций заканчивается экзаменом.

На лекциях рассматриваются основные темы курса. Некоторые вопросы программы, например, такие как устройство и принцип действия стрелочных электроизмерительных приборов, студенты изучают на лабораторных занятиях. Цель лабораторных занятий - обучить студентов собирать схемы, производить измерения и анализ на основе положений, изложенных в лекциях и учебных пособиях. В результате обучения студенты должны овладеть навыками решения электротехнических задач, лежащих в основе анализа функционирования электротехнических установок. Методы решения типовых задач представляют собой инструмент анализа, овладев которым студент может продолжить дальнейшее образование.

# ОПОРНЫЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

## 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

### 1.1. ОСНОВНЫЕ ПОЯСНЕНИЯ И ТЕРМИНЫ

*Электротехника* - это область науки и техники, изучающая электрические и магнитные явления и их использование в практических целях. Каждая наука имеет свою терминологию.

*Электрическая цепь* - это совокупность устройств, предназначенных для производства, передачи, преобразования и использования электрического тока. Все электротехнические устройства по назначению, принципу действия и конструктивному оформлению можно разделить на три большие группы: источники энергии, т.е. устройства, вырабатывающие электрический ток; приемники, или нагрузка, т.е. устройства, потребляющие электрический ток; проводники, а также различная коммутационная аппаратура.

Направленное движение электрических зарядов называют электрическим током. Электрический ток может возникать в замкнутой электрической цепи.

Электрический ток, направление и величина которого неизменны, называют *постоянным током* и обозначают прописной буквой *I*.

Электрический ток, величина и направление которого не остаются постоянными, называется *переменным током*. Значение переменного тока в рассматриваемый момент времени называют мгновенным и обозначают строчной буквой *i*.

Для работы электрической цепи необходимо наличие источников энергии. В любом источнике за счет сторонних сил неэлектрического происхождения создается электродвижущая сила. На зажимах источника возникает разность потенциалов или напряжение, под воздействием которого во внешней цепи, присоединенной к источнику, возникает электрический ток. Различают активные и пассивные цепи, участки и элементы цепей. Активными называют электрические цепи, содержащие источники энергии, пассивными - электрические цепи, не содержащие источников энергии.

Электрическую цепь называют линейной, если ни один параметр цепи не зависит от величины или направления тока, или напряжения.

Электрическая цепь является нелинейной, если она содержит хотя бы один нелинейный элемент. Параметры нелинейных элементов зависят от величины или направления тока, или напряжения.

Электрическая схема - это графическое изображение электрической цепи, включающее в себя условные обозначения устройств и показывающее соединение этих устройств. На рис. 1.1 изображена электрическая схема цепи, состоящей из источника энергии, электроламп 1 и 2, электродвигателя 3.

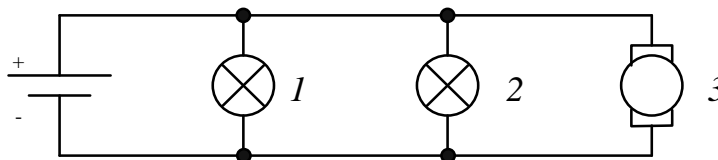


Рис. 1.1

Для облегчения анализа электрическую цепь заменяют схемой замещения.

Схема замещения - это графическое изображение электрической цепи с помощью идеальных элементов, параметрами которых являются параметры замещаемых элементов. На рис 1.2 показана схема замещения.

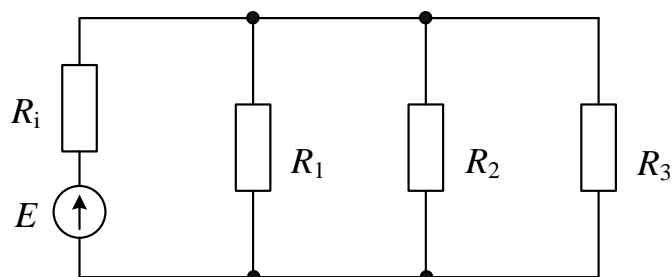


Рис. 1.2

## 1.2. ПАССИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ

Простейшими пассивными элементами схемы замещения являются сопротивление, индуктивность и емкость.

В реальной цепи электрическим сопротивлением обладают не только реостат или резистор, но и проводники, катушки, конденсаторы и т.д. Общим свойством всех устройств, обладающих сопротивлением, является необратимое преобразование электрической энергии в тепловую. Тепловая энергия, выделяемая в сопротивлении, полезно используется или рассеивается в пространстве. В схеме замещения во всех случаях, когда надо учесть необратимое преобразование энергии, включается сопротивление. Сопротивление проводника определяется по формуле

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

где  $l$  - длина проводника;  $S$  - сечение;  $\rho$  - удельное сопротивление.

Величина, обратная сопротивлению, называется проводимостью:

$$g = \frac{1}{R}.$$

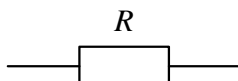
Сопротивление измеряется в омах (Ом), а проводимость - в сименсах (См).

Сопротивление пассивного участка цепи в общем случае определяется по формуле

$$R = \frac{P}{I^2},$$

где  $P$  - потребляемая мощность;  $I$  - ток.

Сопротивление в схеме замещения изображается следующим образом:



Индуктивностью называется идеальный элемент схемы замещения, характеризующий способность цепи накапливать магнитное поле. Полагают, что индуктивностью обладают только индуктивные катушки. Индуктивностью других элементов электрической цепи пренебрегают.

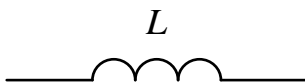
Индуктивность катушки, измеряемая в генри [Гн], определяется по формуле

$$L = \frac{W\Phi}{i},$$

где  $W$  - число витков катушки;

$\Phi$  - магнитный поток катушки, возбуждаемый током  $i$ .

Далее показано изображение индуктивности в схеме замещения:



Емкостью называется идеальный элемент схемы замещения, характеризующий способность участка электрической цепи накапливать электрическое поле. Полагают, что емкостью обладают только конденсаторы. Емкостью остальных элементов цепи пренебрегают.

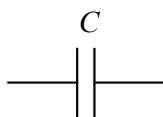
Емкость конденсатора, измеряемая в фарадах (Ф), определяется по формуле:

$$C = \frac{q}{U_c},$$

где  $q$  - заряд на обкладках конденсатора;

$U_c$  - напряжение на конденсаторе.

Емкость в схеме замещения изображается следующим образом:





### 1.3. АКТИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ

Любой источник энергии можно представить в виде источника ЭДС или источника тока. Источник ЭДС - это источник, характеризующийся электродвижущей силой и внутренним сопротивлением. Идеальным называется источник ЭДС, внутреннее сопротивление которого равно нулю.

На рис. 1.3 изображен источник ЭДС, к зажимам которого подключено сопротивление  $R$ ,  $R_i$  - внутреннее сопротивление источника ЭДС. Стрелка ЭДС направлена от точки низшего потенциала к точке высшего потенциала, стрелка напряжения на зажимах источника  $U_{12}$  направлена в противоположную сторону от точки с большим потенциалом к точке с меньшим потенциалом.

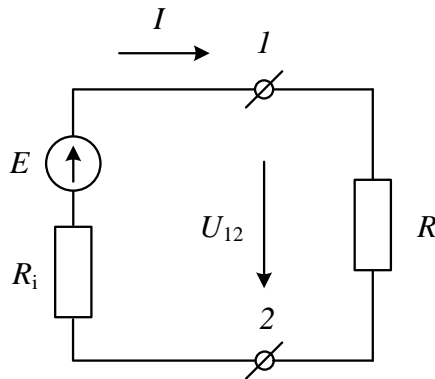


Рис. 1.3

Рассмотрим уравнения, описывающие работу данной схемы:

$$I = \frac{E}{R_i + R}, \quad (1.1)$$

$$E = R_i I + IR = R_i I + U_{12}, \quad (1.2)$$

$$U_{12} = IR = E - IR_i \quad (1.3)$$

У идеального источника ЭДС внутреннее сопротивление  $R_i = 0$ ,  $U_{12} = E$ . Из формулы видно, что напряжение на зажимах реального источника ЭДС уменьшается с увеличением тока. У идеального источника напряжение на зажимах не зависит от тока и равно электродвижущей силе.

Возможен другой путь идеализации источника: представление его в виде источника тока. Источником тока называется источник энергии, характеризующийся величиной тока и внутренней проводимостью. Идеальным называется источник тока, внутренняя проводимость которого равна нулю. Поделим левую и правую части уравнения (1.2) на  $R_i$  и получим

$$\frac{E}{R_i} = U_{12} \frac{1}{R_i} + I, \quad (1.4)$$

где  $\frac{1}{R_i} = g_i$  - внутренняя проводимость;  $J$ - ток источника тока, для которого можно записать:

$$J = U_{12} g_i + I. \quad (1.5)$$

У идеального источника тока  $g_i = 0$  и  $J = I$ . Ток идеального источника не зависит от сопротивления внешней части цепи. Он остается постоянным независимо от сопротивления нагрузки. Условное изображение источника тока показано на рис.1.4.

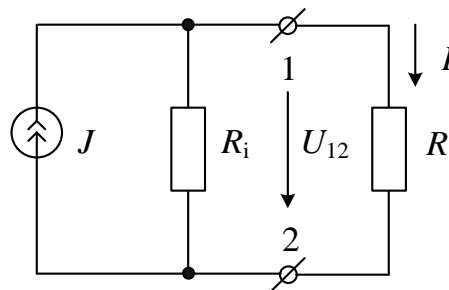


Рис. 1.4

Любой реальный источник ЭДС можно преобразовать в источник тока и наоборот. Источник энергии, внутреннее сопротивление которого мало по сравнению с сопротивлением нагрузки, приближается по своим свойствам к идеальному источнику ЭДС. Если внутреннее сопротивление источника велико по сравнению с сопротивлением внешней цепи, он приближается по своим свойствам к идеальному источнику тока.

#### 1.4. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К СХЕМАМ

Различают разветвленные и неразветвленные схемы. На рис. 1.5 изображена неразветвленная схема. На рис. 1.6 показана разветвленная схема, содержащая два источника ЭДС и пять сопротивлений. Сопротивления соединительных проводов принимают равными нулю.

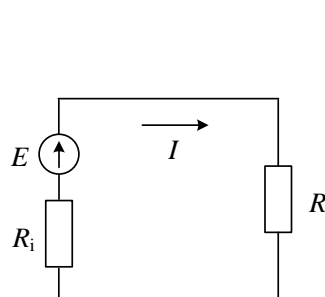


Рис.1.5

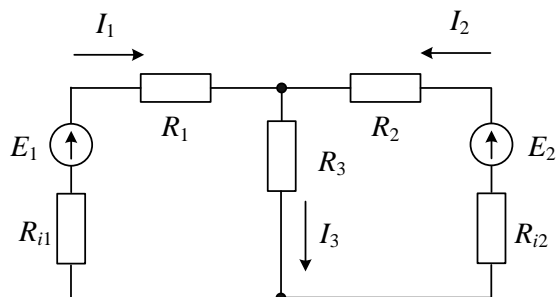


Рис. 1.6

Участок электрической цепи, расположенный между двумя узлами, называется ветвью. Место соединения трех и более ветвей электрической цепи называется узлом. Узел, в котором сходятся две ветви, называется устранимым. Узел является неустрашимым, если в нем соединены три и большее число ветвей. Узел в схеме обозначается точкой.

Последовательным называют такое соединение участков цепи, при котором через все участки проходит одинаковый ток. При параллельном соединении все участки цепи присоединяются к одной паре узлов, находятся под одним и тем же напряжением. Замкнутый путь, проходящий по нескольким ветвям, называется контуром электрической цепи.

## 1.5. РЕЖИМЫ РАБОТЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

В зависимости от нагрузки различают следующие режимы работы: номинальный, режим холостого хода, короткого замыкания, согласованный режим.

При номинальном режиме электротехнические устройства работают в условиях, указанных в паспортных данных завода-изготовителя. В нормальных условиях величины тока, напряжения, мощности не превышают указанных значений.

**Режим холостого хода** возникает при обрыве цепи или отключении сопротивления нагрузки.

**Режим короткого замыкания** получается при сопротивлении нагрузки, равном нулю. Ток короткого замыкания в несколько раз превышает номинальный ток. Режим короткого замыкания является аварийным.

**Согласованный режим** - это режим передачи от источника к сопротивлению нагрузки наибольшей мощности. Согласованный режим наступает тогда, когда сопротивление нагрузки становится равным внутреннему сопротивлению источника. При этом в нагрузке выделяется максимальная мощность.

## 1.6. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

На рис. 1.7а изображен участок цепи с сопротивлением  $R$ . Ток, протекающий через сопротивление  $R$ , пропорционален падению напряжения на сопротивлении и обратно пропорционален величине этого сопротивления. Закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС иллюстрирует рис. 1.7б.

Падением напряжения на сопротивлении называется произведение тока, протекающего через сопротивление, на величину этого сопротивления.

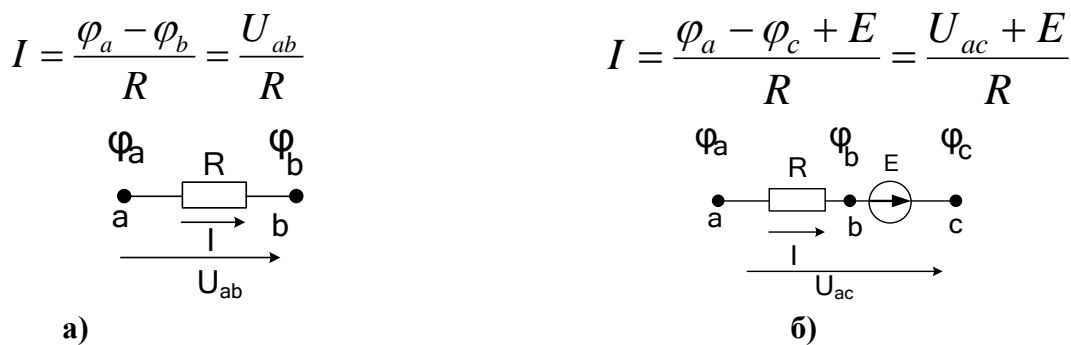


Рис. 1.7

Основными законами электрических цепей, наряду с законом Ома, являются законы баланса токов в разветвлениях (первый закон Кирхгофа) и баланса напряжений на замкнутых участках цепи (второй закон Кирхгофа). В соответствии с первым законом Кирхгофа, алгебраическая сумма токов в любом узле цепи равна нулю:

$$\sum I = 0.$$

Возьмем схему рис. 1.8 и запишем для нее уравнение по первому закону Кирхгофа.

$$I_1 - I_2 + I_3 - I_4 = 0 \text{ или } I_1 + I_3 = I_2 + I_4.$$

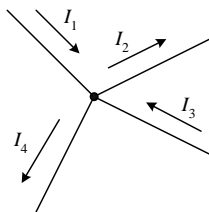


Рис. 1.8

Токам, направленным к узлу, присвоим знак "плюс", а токам, направленным от узла - знак "минус". Согласно второму закону Кирхгофа, алгебраическая сумма ЭДС вдоль любого замкнутого контура равна алгебраической сумме падений напряжений в этом контуре

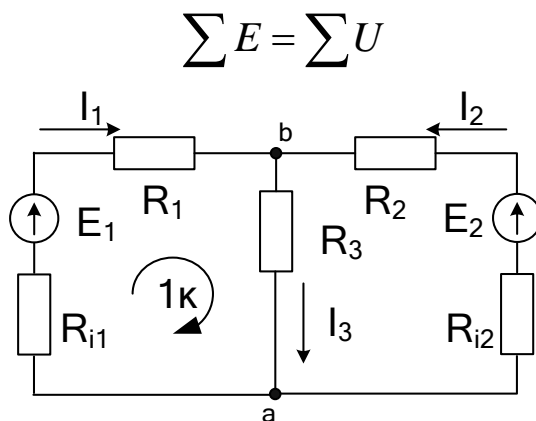
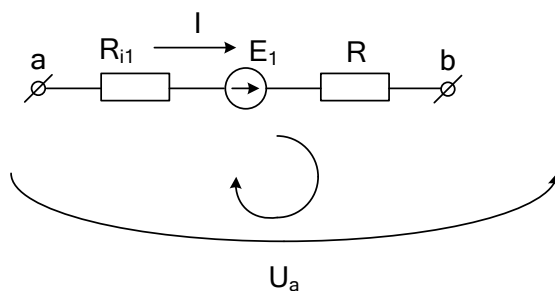


Рис. 1.9

Возьмем схему рис. 1.9 и запишем для контура 1к этой схемы уравнение по второму закону Кирхгофа. Для этого выберем произвольно направление обхода контура, например, по часовой стрелке. ЭДС и падения напряжений записываются в левую и правую части уравнения со знаком "плюс", если направления их совпадают с направлением обхода контура, и со знаком "минус", если не совпадают. При определении тока в ветви, содержащей источник ЭДС, используют закон Ома для активной ветви. Возьмем ветвь, содержащую сопротивления и источники ЭДС. Ветвь подключена к узлам  $a$ - $b$ , известно направление тока в ветви (рис. 1.10).



**Рис.1.10**

Возьмем замкнутый контур, состоящий из активной ветви и стрелки напряжения  $U_{ab}$ , и запишем для него уравнение по второму закону Кирхгофа. Выберем направление обхода контура по часовой стрелке.

Получим

$$IR_{i1} + IR_1 - U_{ab} = E_1.$$

Из этого уравнения выведем формулу для тока

$$I = \frac{U_{ab} + E_1}{R_{i1} + R_1}.$$

В общем виде:

$$I = \frac{U_{ab} + \sum E}{\sum R},$$

где  $\sum R$  - сумма сопротивлений ветви;  $\sum E$  - алгебраическая сумма ЭДС.

В формуле ЭДС записывается со знаком "плюс", если направление ее совпадает с направлением тока, и со знаком "минус", если не совпадает.

## 2. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СХЕМ

Эквивалентным называется преобразование, при котором напряжения и токи в частях схемы, не подвергшихся преобразованию, не меняются.

### 2.1. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

На рис. 2.1 изображена электрическая цепь с последовательно соединенными сопротивлениями.

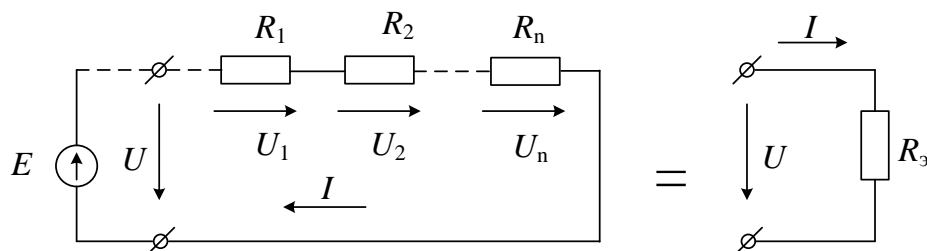


Рис. 2.1

Напряжение на зажимах источника ЭДС равно величине электродвижущей силы. Поэтому часто источник на схеме не изображают.

Падения напряжений на сопротивлениях определяются по формулам:

$$U_1 = IR_1, \quad U_2 = IR_2, \quad U_n = IR_n.$$

В соответствии со вторым законом Кирхгофа, напряжение на входе электрической цепи равно сумме падений напряжений на сопротивлениях цепи:

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 + \dots + U_n = IR_1 + IR_2 + \dots + IR_n = \\ &= I(R_1 + R_2 + \dots + R_n) = IR_{\text{э}}, \end{aligned}$$

где  $R_{\text{э}} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$  - эквивалентное сопротивление.

Эквивалентное сопротивление электрической цепи, состоящей из  $n$  последовательно включенных элементов, равно сумме сопротивлений этих элементов.

### 2.2. ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

На рис. 2.2 показана электрическая цепь с параллельным соединением сопротивлений.

Токи в параллельных ветвях определяются по формулам:

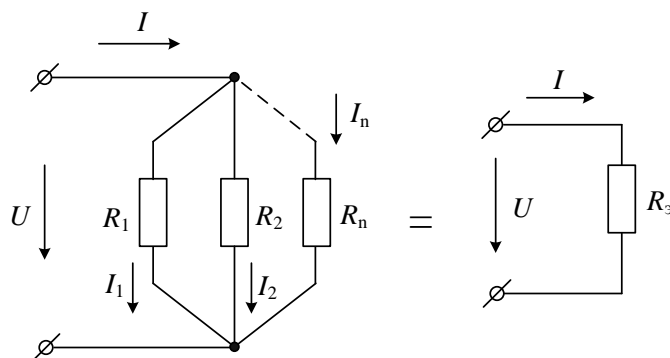
$$I_1 = \frac{U}{R_1} = Ug_1, \quad I_2 = \frac{U}{R_2} = Ug_2, \quad I_n = \frac{U}{R_n} = Ug_n,$$

где  $g_1 = \frac{1}{R_1}$ ,  $g_2 = \frac{1}{R_2}$ ,  $g_n = \frac{1}{R_n}$  - проводимости 1-й, 2-й и  $n$ -й ветвей.

В соответствии с первым законом Кирхгофа, ток в неразветвленной части схемы равен сумме токов в параллельных ветвях.

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n = Ug_1 + Ug_2 + \dots + Ug_n = U(g_1 + g_2 + \dots + g_n) = Ug_{\circ}$$

где  $g_{\circ} = g_1 + g_2 + \dots + g_n$



**Рис.2.2**

Эквивалентная проводимость электрической цепи, состоящей из  $n$  параллельно включенных элементов, равна сумме проводимостей параллельно включенных элементов.

Эквивалентным сопротивлением цепи называется величина, обратная эквивалентной проводимости

$$R_{\circ} = \frac{1}{g_{\circ}}.$$

Пусть электрическая схема содержит три параллельно включенных сопротивления. Эквивалентная проводимость

$$g_{\circ} = g_1 + g_2 + g_3 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2}{R_1 R_2 R_3},$$

$$R_{\circ} = \frac{1}{g_{\circ}} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2}.$$

Эквивалентное сопротивление схемы, состоящей из  $n$  одинаковых элементов, в  $n$  раз меньше сопротивлений  $R$  одного элемента:

$$R_{\circ} = \frac{R}{n}.$$

Возьмем схему, состоящую из двух параллельно включенных сопротивлений (рис. 2.3). Известны величины сопротивлений и ток в неразветвленной части схемы. Необходимо определить токи в параллельных ветвях.

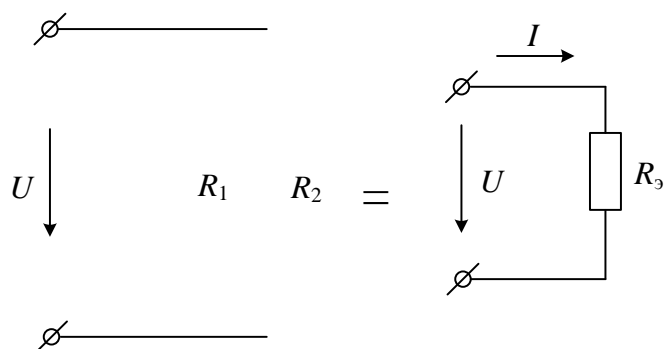


Рис. 2.3

Эквивалентная проводимость схемы

$$g_{\text{э}} = g_1 + g_2 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2},$$

эквивалентное сопротивление

$$R_{\text{э}} = \frac{1}{g_{\text{э}}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Напряжение на входе схемы

$$U = I R_{\text{э}}.$$

Токи в параллельных ветвях

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{I R_{\text{э}}}{R_1} = \frac{I R_1 R_2}{R_1 (R_1 + R_2)} = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Аналогично

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

Ток в параллельной ветви равен току в неразветвленной части схемы, умноженному на сопротивление противолежащей, чужой параллельной ветви и деленному на сумму сопротивлений чужой и своей параллельно включенных ветвей.



## 2.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА СОПРОТИВЛЕНИЙ В ЭКВИВАЛЕНТНУЮ ЗВЕЗДУ

Встречаются схемы, в которых отсутствуют сопротивления, включенные последовательно или параллельно, например, мостовая схема, изображенная на рис. 2.4. Определить эквивалентное сопротивление этой схемы относительно ветви с источником ЭДС описанными ранее методами нельзя. Если же заменить треугольник сопротивлений  $R_1$ - $R_2$ - $R_3$ , включенных между узлами 1-2-3, трехлучевой звездой сопротивлений, лучи которой расходятся из точки 0 в те же узлы 1-2-3, эквивалентное сопротивление полученной схемы легко определяется. Сопротивление луча эквивалентной звезды сопротивлений равно произведению сопротивлений прилегающих сторон треугольника, деленному на сумму сопротивлений всех сторон треугольника. В соответствии с указанным правилом, сопротивления лучей звезды определяются по формулам:

$$R_{Y1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}; \quad R_{Y2} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}; \quad R_{Y3} = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Эквивалентное соединение полученной схемы определяется по формуле

$$R_9 = R_0 + R_{Y1} + \frac{(R_{Y2} + R_4)(R_{Y3} + R_5)}{R_{Y2} + R_4 + R_{Y3} + R_5}.$$

Сопротивления  $R_0$  и  $R_{Y1}$  включены последовательно, а ветви с сопротивлениями  $R_{Y2} + R_4$  и  $R_{Y3} + R_5$  соединены параллельно.

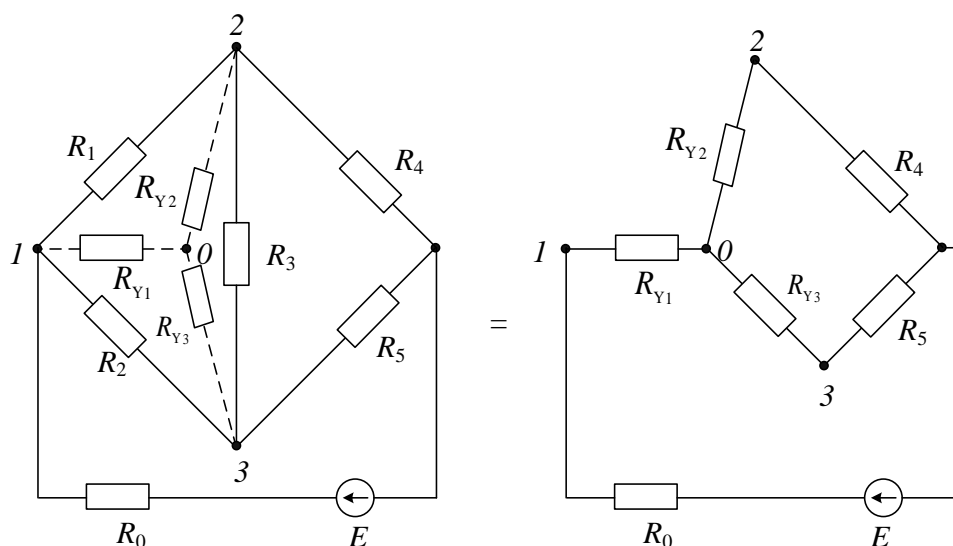


Рис. 2.4

## 2.4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЗВЕЗДЫ СОПРОТИВЛЕНИЙ В ЭКВИВАЛЕНТНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Иногда для упрощения схемы полезно преобразовать звезду сопротивлений в эквивалентный треугольник.

Рассмотрим схему на рис. 2.5. Заменяем звезду сопротивлений  $R_1-R_2-R_3$  эквивалентным треугольником сопротивлений  $R_{\Delta 1}-R_{\Delta 2}-R_{\Delta 3}$ , включенных между узлами 1-2-3.

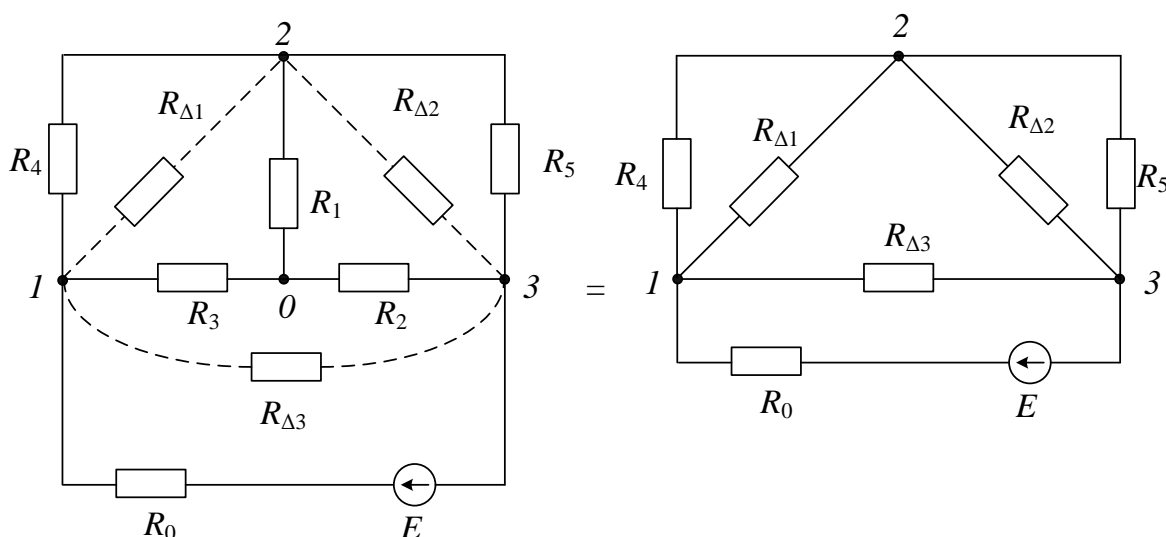


Рис. 2.5

Сопротивление стороны эквивалентного треугольника сопротивлений равно сумме сопротивлений двух прилегающих лучей звезды плюс произведение этих же сопротивлений, деленное на сопротивление оставшегося (противолежащего) луча. Сопротивления сторон треугольника определяются по формулам:

$$R_{\Delta 1} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_2}, \quad R_{\Delta 2} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3},$$

$$R_{\Delta 3} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}.$$

Эквивалентное сопротивление преобразованной схемы равно:

$$R_{\Sigma} = R_0 + \frac{\left( \frac{R_4 R_{\Delta 1}}{R_4 + R_{\Delta 1}} + \frac{R_5 R_{\Delta 2}}{R_5 + R_{\Delta 2}} \right) R_{\Delta 3}}{\frac{R_4 R_{\Delta 1}}{R_4 + R_{\Delta 1}} + \frac{R_5 R_{\Delta 2}}{R_5 + R_{\Delta 2}} + R_{\Delta 3}}.$$

### 3. АНАЛИЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА С ОДНИМ ИСТОЧНИКОМ ЭНЕРГИИ

#### 3.1. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА С ОДНИМ ИСТОЧНИКОМ МЕТОДОМ СВЕРТЫВАНИЯ

В соответствии с методом свертывания, отдельные участки схемы упрощают и постепенным преобразованием приводят схему к одному эквивалентному (входному) сопротивлению, включенному к зажимам источника. Схема упрощается с помощью замены группы последовательно или параллельно соединенных сопротивлений одним, эквивалентным по сопротивлению. Определяют ток в упрощенной схеме, затем возвращаются к исходной схеме и определяют в ней токи.

Рассмотрим схему на рис. 3.1. Пусть известны величины сопротивлений  $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$ , ЭДС  $E_1$ . Необходимо определить токи в ветвях схемы.

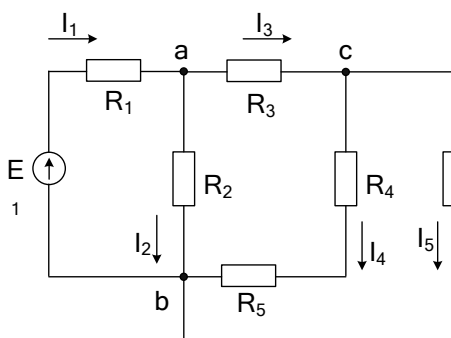


Рис. 3.1

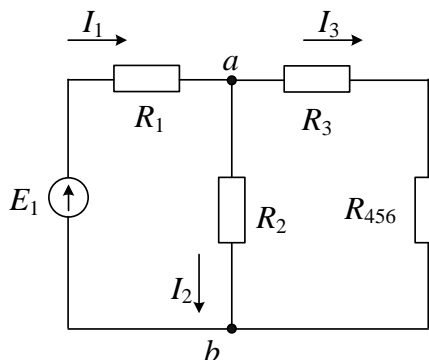


Рис. 3.2

Сопротивления  $R_4$  и  $R_5$  соединены последовательно, а сопротивление  $R_6$  - параллельно с ними, поэтому их эквивалентное сопротивление

$$R_{456} = \frac{(R_4 + R_5)R_6}{R_4 + R_5 + R_6}.$$

После проведенных преобразований схема принимает вид, показанный на рис. 3.2, а эквивалентное сопротивление всей цепи

$$R_{\Sigma} = R_1 + \frac{R_2(R_3 + R_{456})}{R_2 + R_3 + R_{456}}.$$

Ток  $I_1$  в неразветвленной части схемы определяется по формуле:

$$I_1 = \frac{E_1}{R_{\Sigma}}.$$

Найдем токи  $I_2$  и  $I_3$  в схеме на рис. 3.1 по формулам:

$$I_2 = \frac{U_{ab}}{R_2} = I_1 \frac{R_2(R_3 + R_{456})}{R_2(R_2 + R_3 + R_{456})} = I_1 \frac{(R_3 + R_{456})}{(R_2 + R_3 + R_{456})}.$$

Равенство  $I_3 = I_1 - I_2$  получается из уравнения, составленного по первому закону Кирхгофа:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0.$$

Переходим к исходной схеме на рис. 3.1 и определим в ней токи по формулам:

$$I_4 = \frac{U_{cb}}{R_4 + R_5} = \frac{I_3(R_4 + R_5)R_6}{(R_4 + R_5)(R_4 + R_5 + R_6)} = \frac{I_3 R_6}{R_4 + R_5 + R_6},$$

$$I_6 = I_3 - I_4 \text{ (в соответствии с первым законом Кирхгофа } I_3 - I_4 - I_6 = 0).$$

### 3.2. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА С ОДНИМ ИСТОЧНИКОМ МЕТОДОМ ПОДОБИЯ ИЛИ МЕТОДОМ ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ ВЕЛИЧИН

Возьмем электрическую схему на рис. 3.1, зададимся произвольным значением тока  $I'_5$  в сопротивлении  $R_6$ , наиболее удаленном от источника питания. По заданному току  $I'_5$  и сопротивлению  $R_6$  определим напряжение  $U'_{cb} = I'_5 R_6$ . Далее определим:

$$I'_4 = \frac{U'_{cb}}{R_4 + R_5}, \quad I'_3 = I'_4 + I'_5,$$

$$U'_{ac} = I'_3 R_3, \quad U'_{cb} = I'_5 R_6,$$

$$I'_2 = \frac{U'_{ab}}{R_2}; \quad I'_1 = I'_2 + I'_3.$$

Находим значение ЭДС

$$E' = R_1 I'_1 + R_2 I'_2.$$

Найденное значение ЭДС  $E'$  отличается от заданной величины ЭДС  $E_1$ . Вычислим коэффициент подобия  $K = \frac{E_1}{E'}$ . Умножим на него полученные при расчете значения токов и напряжений, находим действительные значения токов цепи.

## 4. АНАЛИЗ СЛОЖНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С НЕСКОЛЬКИМИ ИСТОЧНИКАМИ ЭНЕРГИИ

### 4.1. МЕТОД НЕПОСРЕДСТВЕННОГО ПРИМЕНЕНИЯ ЗАКОНОВ КИРХГОФА

На рис. 4.1 изображена схема разветвленной электрической цепи. Известны величины сопротивлений и ЭДС, необходимо определить токи. В схеме имеются четыре узла, можно составить четыре уравнения по первому закону Кирхгофа.

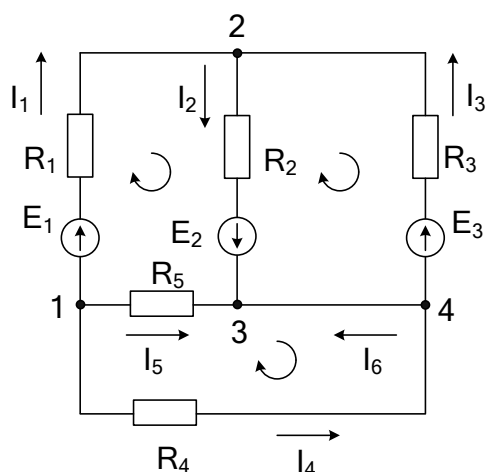


Рис. 4.1

Укажем произвольно направления токов. Запишем уравнения:

$$\text{для узла 1} \quad -I_1 - I_5 - I_4 = 0,$$

$$\text{для узла 2} \quad I_1 - I_2 + I_3 = 0,$$

$$\text{для узла 3} \quad I_2 + I_5 + I_6 = 0,$$

$$\text{для узла 4} \quad -I_3 - I_6 + I_4 = 0.$$

Сложим эти уравнения. Получим тождество  $0 = 0$ . Система уравнений является зависимой. Если в схеме имеется  $n$  узлов, количество независимых уравнений, которые можно составить по первому закону Кирхгофа, равно  $n - 1$ . Для схемы на рис. 4.1 число независимых уравнений равно трем:

$$\left. \begin{aligned} -I_1 - I_5 - I_4 &= 0, \\ I_1 - I_2 + I_3 &= 0, \\ I_2 + I_5 + I_6 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Недостающее количество уравнений составляют по второму закону Кирхгофа. Уравнения по второму закону составляют для независимых контуров. Независимым является контур, в который входит хотя бы одна новая ветвь, не вошедшая в другие контуры.

Выберем три независимых контура и укажем направления обхода контуров. Запишем три уравнения по второму закону Кирхгофа:

$$\left. \begin{aligned} E_1 + E_2 &= -I_5 R_5 + I_1 R_1 + I_2 R_2, \\ -E_2 - E_3 &= -I_2 R_2 - I_3 R_3, \\ 0 &= I_5 R_5 - I_4 R_4. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Решив совместно системы уравнений, определим токи в схеме. Ток в ветви может иметь отрицательное значение. Это означает, что действительное направление тока противоположно выбранному нами.

## 4.2. МЕТОД КОНТУРНЫХ ТОКОВ

Метод непосредственного применения законов Кирхгофа громоздок. Имеется возможность уменьшить количество совместно решаемых уравнений системы. Число уравнений, составленных по методу контурных токов, равно количеству уравнений, составляемых по второму закону Кирхгофа. Метод контурных токов заключается в том, что вместо токов в ветвях определяются, на основании второго закона Кирхгофа, так называемые контурные токи, замыкающиеся в контурах.

На рис. 4.2 в качестве примера изображена двухконтурная схема, в которой  $I_{11}$  и  $I_{22}$  - контурные токи.

Токи в сопротивлениях  $R_1$  и  $R_2$  равны соответствующим контурным токам. Ток в сопротивлении  $R_3$ , являющимся общим для обоих контуров, равен разности контурных токов  $I_{11}$  и  $I_{22}$ , так как эти токи направлены в ветви с  $R_3$  встречно.

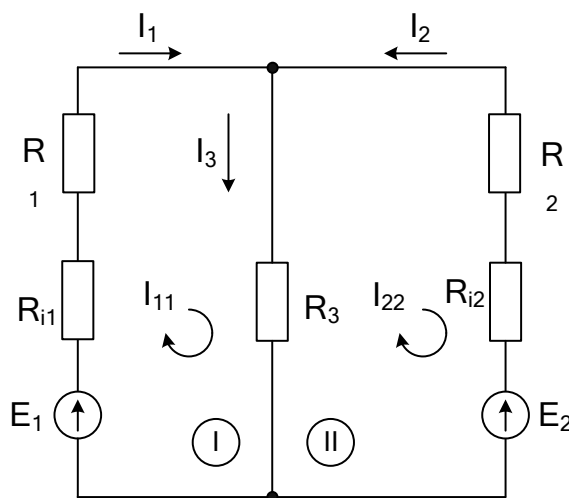


Рис. 4.2

### *Порядок расчета*

Выбираются независимые контуры, и задаются произвольные направления контурных токов.

В нашем случае эти токи направлены по часовой стрелке. Направление обхода контура совпадает с направлением контурных токов. Уравнения для этих контуров имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} I_{11}(R_1 + R_{i1}) + I_{11}R_3 - I_{22}R_3 &= E_1, \\ I_{22}(R_{i2} + R_2) + I_{22}R_3 - I_{11}R_3 &= -E_2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Перегруппируем слагаемые в уравнениях

$$\begin{aligned} I_{11}(R_1 + R_{i1} + R_3) - I_{22}R_3 &= E_1 = E_{11}, \\ -I_{11}R_3 + I_{22}(R_{i2} + R_2 + R_3) &= -E_2 = E_{22}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Суммарное сопротивление данного контура называется собственным сопротивлением контура. Собственные сопротивления контуров схемы:

$$R_{11} = R_1 + R_{i1} + R_3, \quad R_{22} = R_{i2} + R_2 + R_3.$$

Сопротивление  $R_3$ , принадлежащее одновременно двум контурам, называется общим сопротивлением этих контуров:

$$R_{12} = R_{21} = -R_3,$$

где  $R_{12}$  - общее сопротивление между первым и вторым контурами;

$R_{21}$  - общее сопротивление между вторым и первым контурами.

$E_{11} = E_1$  и  $E_{22} = E_2$  - контурные ЭДС.

В общем виде уравнения записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} I_{11}R_{11} + I_{22}R_{12} &= E_{11}, \\ I_{11}R_{21} + I_{22}R_{22} &= E_{22}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Собственные сопротивления всегда имеют знак "плюс". Общее сопротивление имеет знак "минус", если в данном сопротивлении контурные токи направлены встречно друг другу, и знак "плюс", если контурные токи в общем сопротивлении совпадают по направлению.

Решая совместно уравнения, определим контурные токи  $I_{11}$  и  $I_{22}$ , затем от контурных токов переходим к токам в ветвях. Ветви схемы, по которым протекает один контурный ток, называются внешними, а ветви, по которым протекают несколько контурных токов, называются общими. Ток во внешней ветви совпадает по величине и по направлению с контурным. Ток в общей ветви

равен алгебраической сумме контурных токов, протекающих в этой ветви. Для схемы рис.4.2

$$I_1 = I_{11}, I_2 = -I_{22}, I_3 = I_{11} - I_{22}. \quad (4.5)$$

### **Рекомендации**

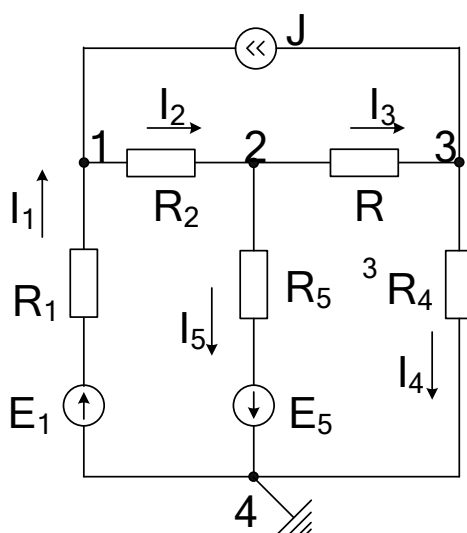
Контуры выбирают произвольно, но целесообразно выбрать контуры таким образом, чтобы их внутренняя область не пересекалась ни с одной ветвью, принадлежащей другим контурам. Контурные токи желательно направлять одинаково (по часовой стрелке или против).

Если нужно определить ток в одной ветви сложной схемы, необходимо сделать его контурным.

Если в схеме имеется ветвь с известным контурным током, этот ток следует сделать контурным, благодаря чему количество уравнений становится на единицу меньше.

## **4.3. МЕТОД УЗЛОВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ**

Метод узловых потенциалов позволяет составить систему уравнений, по которой можно определить потенциалы всех узлов схемы. По известным разностям узловых потенциалов можно определить токи во всех ветвях. В схеме на рис. 4.3 четыре узла. Потенциал любой точки схемы можно принять равным нулю. Тогда у нас останутся неизвестными три потенциала. Узел, величину потенциала которого выбирают произвольно, называют базисным. Укажем в схеме произвольно направления токов. Примем для схемы  $\varphi_4 = 0$ .



**Рис. 4.3**

Запишем уравнение по первому закону Кирхгофа для узла 1.

$$I_1 + J - I_2 = 0 \quad (4.6)$$



В соответствии с законами Ома для активной и пассивной ветви

$$I_1 = \frac{\varphi_4 - \varphi_1 + E_1}{R_1} = (-\varphi_1 + E_1)g_1,$$

где  $g_1 = \frac{1}{R_1}$  - проводимость первой ветви;

$$I_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_2} = (\varphi_1 - \varphi_2)g_2,$$

где  $g_2 = \frac{1}{R_2}$  - проводимость второй ветви.

Подставим выражения токов в уравнение (4.6):

$$\begin{aligned} -\varphi_1 g_1 + E_1 g_1 + J - \varphi_1 g_2 + \varphi_2 g_2 &= 0, \\ \varphi_1 (g_1 + g_2) - \varphi_2 g_2 &= E_1 g_1 + J, \\ \varphi_1 g_{11} - \varphi_2 g_{12} &= E_1 g_1 + J, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где  $g_{11} = g_1 + g_2$  - собственная проводимость узла 1.

Собственной проводимостью узла называется сумма проводимостей ветвей, сходящихся в данном узле;  $g_{12} = g_2$  - общая проводимость между узлами 1 и 2.

Общей проводимостью называют проводимость ветви, соединяющей узлы 1 и 2.

$(E_1 g_1 + J)$  - сумма токов источников, находящихся в ветвях, сходящихся в узле 1.

Если ток источника направлен к узлу, величина его записывается в правую часть уравнения со знаком "плюс", если от узла - со знаком "минус".

По аналогии запишем для узла 2:

$$\varphi_2 (g_2 + g_3 + g_5) - \varphi_1 g_2 - \varphi_3 g_3 = -E_5 g_5, \quad (4.8)$$

для узла 3:

$$\varphi_3 (g_3 + g_4) - \varphi_2 g_3 = -J. \quad (4.9)$$

Решив совместно уравнения (4.7), (4.8), (4.9), определим неизвестные потенциалы  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ , а затем по закону Ома для активной или пассивной ветви найдем токи. Если число узлов схемы -  $n$ , количество уравнений по методу узловых потенциалов -  $(n - 1)$ .

### Замечание

Если в какой-либо ветви содержится идеальный источник ЭДС, необходимо один из двух узлов, между которыми включена эта ветвь, выбрать в качестве базисного, тогда потенциал другого узла окажется известным и равным величине ЭДС. Количество составляемых узловых уравнений становится на одно меньше.

### 4.4. МЕТОД ДВУХ УЗЛОВ

Схема на рис. 4.4 имеет два узла. Потенциал точки 2 примем равным нулю  $\varphi_2 = 0$ . Составим узловое уравнение для узла 1:

$$\varphi_1(g_1 + g_2 + g_3) - \varphi_2(g_1 + g_2 + g_3) = E_1 g_1 - E_3 g_3$$

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_1 = \frac{E_1 g_1 - E_3 g_3}{g_1 + g_2 + g_3},$$

где  $g_1 = \frac{1}{R_1}$ ,  $g_2 = \frac{1}{R_2}$ ,  $g_3 = \frac{1}{R_3}$  - проводимости ветвей.

В общем виде:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_1 = \frac{\sum_1^n E_k g_k}{\sum_1^n g_k}.$$

В знаменателе формулы - сумма проводимостей параллельно включенных ветвей. В числителе - алгебраическая сумма произведений ЭДС источников на проводимости ветвей, в которые эти ЭДС включены. ЭДС в формуле записывается со знаком "плюс", если она направлена к узлу 1, и со знаком "минус", если направлена от узла 1. После вычисления величины потенциала  $\varphi_1$  находим токи в ветвях, используя закон Ома для активной и пассивной ветви.

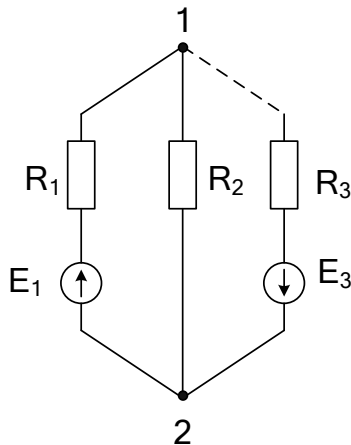


Рис. 4.4

## 4.5. МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНОГО ГЕНЕРАТОРА

Этот метод используется тогда, когда надо определить ток только в одной ветви сложной схемы. Чтобы разобраться с методом эквивалентного генератора, ознакомимся сначала с понятием "двухполюсник". Часть электрической цепи с двумя выделенными зажимами называется двухполюсником. Двухполюсники, содержащие источники энергии, называются активными. На рис. 4.5 показано условное обозначение активного двухполюсника.

Двухполюсники, не содержащие источников, называются пассивными. На эквивалентной схеме пассивный двухполюсник может быть заменен одним элементом - внутренним или входным сопротивлением пассивного двухполюсника  $R_{BX}$ . На рис. 4.6 условно изображен пассивный двухполюсник и его эквивалентная схема.

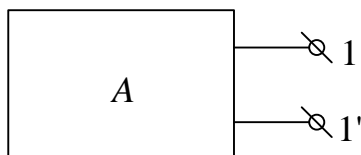


Рис. 4.5

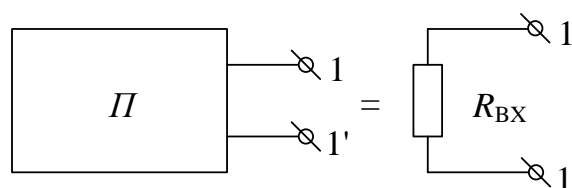


Рис. 4.6

Входное сопротивление пассивного двухполюсника можно измерить. Если известна схема пассивного двухполюсника, входное сопротивление его можно определить, свернув схему относительно заданных зажимов. Дана электрическая цепь. Необходимо определить ток  $I_1$  в ветви с сопротивлением  $R_1$ . Выделим эту ветвь, а оставшуюся часть схемы заменим активным двухполюсником (рис. 4.7).

Согласно теореме об активном двухполюснике, любой активный двухполюсник можно заменить эквивалентным генератором (источником напряжения) с ЭДС, равным напряжению холостого хода на зажимах этого двухполюсника и внутренним сопротивлением, равным входному сопротивлению того же двухполюсника, из схемы которого исключены все источники. Искомый ток  $I_1$  определится по формуле:

$$I = \frac{U_{XX}}{R_{BX} + R_1}. \quad (4.10)$$

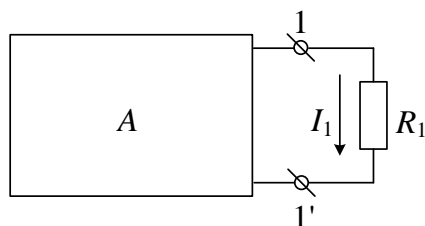


Рис. 4.7

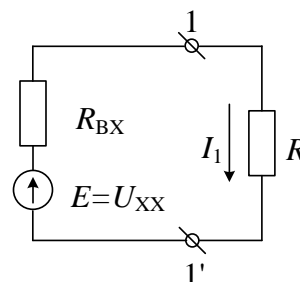


Рис. 4.8

Параметры эквивалентного генератора (напряжение холостого хода и входное сопротивление) можно определить экспериментально или расчетным путем.

Далее показан пример использования метода эквивалентного генератора для расчета тока через сопротивление  $R_1$ .

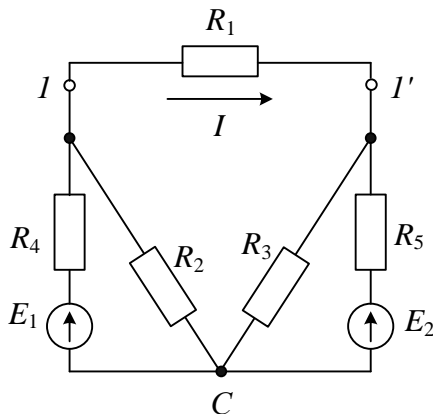


Рис. 4.9

Для определения тока  $I$  в сопротивлении  $R_1$  определим ЭДС эквивалентного генератора  $E=U_{xx}$ , его внутреннее сопротивление  $R_{вх}$  при холостом ходе, т.е. разомкнутой цепи между точками 1 и 1':

$$U_{xx} = U_{1C} - U_{1'C}.$$

Напряжение

$$U_{1C} = I_2 R_2 = \frac{E_1 R_2}{R_2 + R_4}.$$

Напряжение

$$U_{1'C} = I_3 R_3 = \frac{E_2 R_3}{R_3 + R_5}.$$

Из схемы на рис. 4.9 удалены все источники ( $E_1$  и  $E_2$ ), т.е. эти ЭДС мысленно закорочены. Входное сопротивление  $R_{вх}$  определяют, свертывая схему относительно зажимов 1 и 1':

$$R_{вх} = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} + \frac{R_3 R_5}{R_3 + R_5}. \quad (4.13)$$

Искомый ток:

$$I = \frac{U_{xx}}{R_{вх} + R_1}$$

Для определения параметров эквивалентного генератора экспериментальным путем необходимо выполнить опыты холостого хода и короткого замыкания.

При проведении опыта холостого хода от активного двухполюсника отключают сопротивление  $R_1$ . К зажимам двухполюсника  $11'$  подключают вольтметр и измеряют напряжение холостого хода  $U_{xx}$  (рис. 4.10).

При выполнении опыта короткого замыкания соединяют проводником зажимы  $11'$  активного двухполюсника и измеряют амперметром ток короткого замыкания  $I_{кз}$  (рис. 4.11).

$$I_{кз} = \frac{U_{xx}}{R_{вх}}$$

откуда

$$R_{вх} = \frac{U_{xx}}{I_{кз}} \quad (4.14)$$

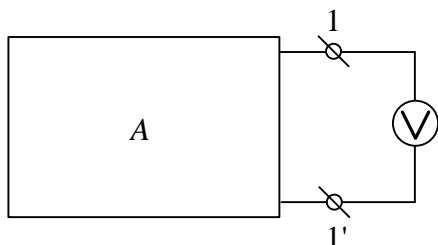


Рис. 4.10

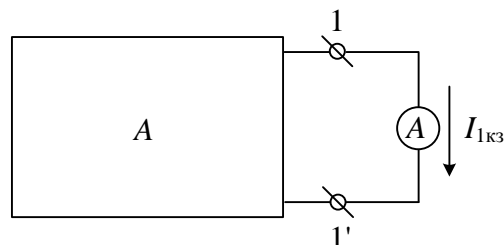


Рис. 4.11

## 5. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ОДНОФАЗНОГО ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

### 5.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Переменным называется электрический ток, величина и направление которого изменяются во времени.

Область применения переменного тока намного шире, чем постоянного. Это объясняется тем, что напряжение переменного тока можно легко понижать или повышать с помощью трансформатора, практически в любых пределах. Переменный ток легче транспортировать на большие расстояния. Но физические процессы, происходящие в цепях переменного тока, сложнее, чем в цепях постоянного тока из-за наличия переменных магнитных и электрических полей.

Значение переменного тока в рассматриваемый момент времени называют мгновенным значением и обозначают строчной буквой  $i$ .

Мгновенный ток называется периодическим, если значения его повторяются через одинаковые промежутки времени

$$i(t) = i(t + T).$$

Наименьший промежуток времени, через который значения переменного тока повторяются, называется периодом.

Период  $T$  измеряется в секундах. Периодические токи, изменяющиеся по синусоидальному закону, называются **синусоидальными**.

Мгновенное значение синусоидального тока определяется по формуле

$$i(t) = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_i\right) = I_m \sin(2\pi ft + \varphi_i) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i),$$

где  $I_m$  - максимальное, или **амплитудное**, значение тока.

Аргумент синусоидальной функции  $\frac{2\pi}{T}t + \varphi_i$  называют фазой; величину  $\varphi$ , равную фазе в момент времени  $t = 0$ , называют начальной фазой. Фаза измеряется в радианах или градусах. Величину, обратную периоду, называют частотой. Частота  $f$  измеряется в герцах.

$$f = \frac{1}{T} (\text{Гц}).$$

В западном полушарии и в Японии используется переменный ток частотой 60 Гц, в Восточном полушарии - частотой 50 Гц.

Величину  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$  называют круговой, или угловой частотой. Угловая частота измеряется в рад/с.

Если у синусоидальных токов начальные фазы при одинаковых частотах одинаковы, говорят, что эти токи совпадают по фазе. Если неодинаковы по фазе, говорят, что токи сдвинуты по фазе. Сдвиг фаз двух синусоидальных токов измеряется разностью начальных фаз:

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2.$$

С помощью осциллографа можно измерить амплитудное значение синусоидального тока или напряжения. Амперметры и вольтметры электромагнитной системы измеряют действующие значения переменного тока и напряжения.

Действующим значением переменного тока называется среднеквадратичное значение тока за период. Действующее значение тока (для синусоиды  $i = I_m \sin \omega t$ ):

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \frac{(1 - \cos 2\omega t)}{2} dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Аналогично определяются действующие значения ЭДС и напряжений

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}.$$

Действующие значения переменного тока, напряжения, ЭДС меньше максимальных в  $\sqrt{2}$  раз.

Законы Ома и Кирхгофа справедливы для мгновенных значений токов и напряжений.

Закон Ома для мгновенных значений:

$$i = \frac{u}{R}. \quad (5.1)$$

Законы Кирхгофа для мгновенных значений:

$$\sum i = 0, \quad (5.2)$$

$$\sum e = \sum u. \quad (5.3)$$

## 5.2. ИЗОБРАЖЕНИЯ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ВРЕМЕНИ В ВЕКТОРНОЙ ФОРМЕ

При расчете электрических цепей часто приходится складывать или вычитать величины токов или напряжений, являющиеся синусоидальными функциями времени. Графические построения или тригонометрические преобразования в этом случае могут оказаться слишком громоздкими. Задача упрощается, если представить наши синусоидальные функции в векторной форме. Имеем синусоидальную функцию  $i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$ . Известно, что проекция отрезка, вращающегося вокруг оси с постоянной угловой скоростью, на любую линию, проведенную в плоскости вращения, изменяется по синусоидальному закону.

Пусть отрезок прямой длиной  $I_m$  начинает вращаться вокруг оси 0 из положения, когда он образует с горизонтальной осью угол  $\varphi$ , и вращается против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Проекция отрезка на вертикальную ось в начальный момент времени  $oa = I_m \sin \varphi$ . Когда отрезок повернется на угол  $\alpha_1$ , проекция его  $b'b = I_m \sin(\varphi + \alpha_1)$ . Откладывая углы  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  на горизонтальной оси, а проекции отрезка прямой - на вертикальной оси, получим ряд точек синусоиды (рис. 5.1).

Пусть даны два синусоидальных тока:  $i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1)$  и  $i_2 = I_{2m} \sin(\omega t + \varphi_2)$ .

Нужно сложить эти токи и получить результирующий ток:

$$i_3 = i_1 + i_2 = I_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1) + I_{2m} \sin(\omega t + \varphi_2) = I_{3m} \sin(\omega t + \varphi_3).$$

Представим синусоидальные токи  $i_1$  и  $i_2$  в виде двух радиус-векторов, длина которых равна в соответствующем масштабе  $I_{1m}$  и  $I_{2m}$ . Эти векторы расположены в начальный момент времени под углами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  относительно горизонтальной

оси. Сложим геометрически отрезки  $I_{1m}$  и  $I_{2m}$ . Получим отрезок, длина которого равна амплитудному значению результирующего тока  $I_{3m}$ . Отрезок расположен под углом  $\varphi_3$  относительно горизонтальной оси. Все три отрезка вращаются вокруг оси 0 с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Проекции отрезков на вертикальную ось изменяются по синусоидальному закону. Будучи остановленными для рассмотрения, данные отрезки образуют векторную диаграмму (рис. 5.2). Векторная диаграмма - это совокупность векторов, изображающих синусоидальные напряжения, токи и ЭДС одинаковой частоты.

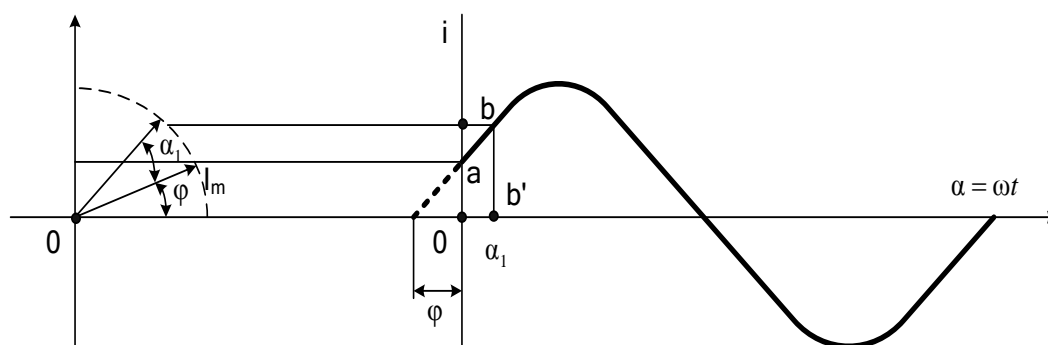


Рис. 5.1

Необходимо отметить, что напряжение, ток и ЭДС - это скалярные, а не векторные величины.

Мы представляем их на векторной диаграмме в виде не пространственных, а временных радиус - векторов, вращающихся с одинаковой угловой скоростью.

Изображать на векторной диаграмме два вектора, вращающихся с различной угловой скоростью, бессмысленно.

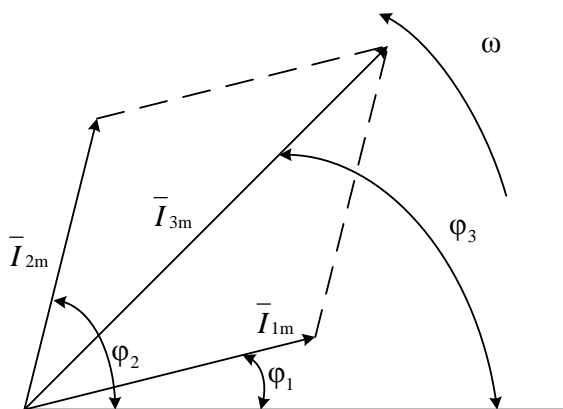


Рис. 5.2

Положительным считается направление вращения векторов против часовой стрелки. Векторные диаграммы используются для качественного анализа электрических цепей, а также при решении некоторых электротехнических задач.



### 5.3. ИЗОБРАЖЕНИЕ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ВРЕМЕНИ В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

При расчетах цепей синусоидального тока используют символический метод расчета или метод комплексных амплитуд. В этом методе сложение двух синусоидальных токов заменяют сложением двух комплексных чисел, соответствующих этим токам.

Из курса математики известно, что комплексное число может быть записано в показательной или алгебраической форме:

$$C = ce^{j\varphi} = a + jb$$

где  $c$  - модуль комплексного числа;

$\varphi$  - аргумент;

$a$  - вещественная часть комплексного числа;

$b$  - мнимая часть;

$j$  - мнимая единица,  $j = \sqrt{-1}$ .

С помощью формулы Эйлера можно перейти от показательной формы записи к алгебраической:

$$ce^{j\varphi} = c\cos\varphi + jc\sin\varphi = a + jb,$$

$$a = c\cos\varphi, \quad b = c\sin\varphi.$$

От алгебраической формы записи переходят к показательной форме с помощью формул:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{b}{a}.$$

Комплексное число может быть представлено в виде радиус - вектора в комплексной плоскости. Вектор длиной, равной модулю  $c$ , расположен в начальный момент времени под углом  $\varphi$  относительно вещественной оси (рис.5.3). Умножим комплексное число на множитель  $e^{j\beta}$ . Радиус - вектор на комплексной плоскости повернется на угол  $\beta$ . Множитель  $e^{j\beta}$  называется поворотным.

$$c \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\beta} = c \cdot e^{j(\varphi+\beta)}.$$

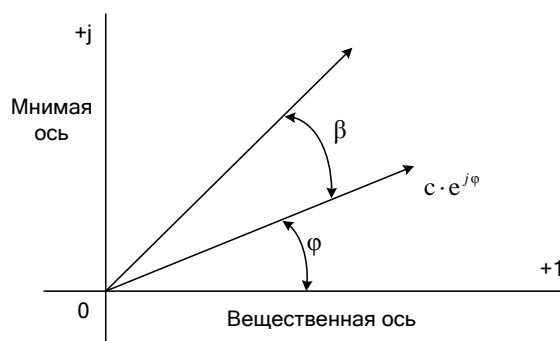


Рис.5.3

Если  $\beta = \omega t$ , то вектор, умноженный на  $e^{j\omega t}$ , превратится во вращающийся со скоростью  $\omega$  радиус - вектор.

Выражение  $ce^{j\omega t}e^{j\varphi} = ce^{j(\omega t + \varphi)}$  называется комплексной функцией времени.

Применительно к напряжению, получим  $U_m e^{j\omega t}e^{j\varphi} = \bar{U}_m e^{j\omega t}$  - комплексную функцию времени для напряжения, где  $\bar{U}_m = U_m e^{j\varphi}$  - комплексная амплитуда напряжения (исходное положение вектора в комплексной плоскости). Определим, чему равна мнимая часть комплексной функции времени для напряжения:

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\left[\bar{U}_m e^{j\omega t}\right] &= \operatorname{Im}\left[U_m e^{j(\omega t + \varphi)}\right] = \\ &= \operatorname{Im}\left[U_m \cos(\omega t + \varphi) + jU_m \sin(\omega t + \varphi)\right] = U_m \sin(\omega t + \varphi) = u(t)\end{aligned}$$

Мгновенное синусоидальное напряжение (ток, ЭДС) является мнимой частью соответствующей комплексной функции времени.

### **Замечание**

В электротехнике над символами, изображающими комплексные напряжения, токи, ЭДС, принято ставить точку или черту.

Синусоидальные функции времени могут быть представлены векторами в комплексной плоскости, вращающимися против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Проекция вектора на мнимую ось изменяется по синусоидальному закону.

### **Пример**

$$\begin{aligned}i_1 &= 3\sin(314t + 30^\circ) \text{ A}, & i_2 &= 2\sin(314t + 45^\circ) \text{ A}, \\ i_3 &= i_1 + i_2 = I_{3m} \sin(314t + \varphi_3).\end{aligned}$$

Сложение синусоидальных токов заменим сложением комплексных амплитуд, соответствующих этим токам.

$$\begin{aligned}\bar{I}_{1m} &= 3e^{j30^\circ}, & \bar{I}_{2m} &= 2e^{j45^\circ}, \\ \bar{I}_{3m} &= \bar{I}_{2m} + \bar{I}_{1m} = 3e^{j30^\circ} + 2e^{j45^\circ} = \\ &= 3\cos 30^\circ + j3\sin 30^\circ + 2\cos 45^\circ + j2\sin 45^\circ = \\ &= 2,6 + j1,5 + 1,414 + j1,414 = 4,014 + j2,914 = \\ &= \sqrt{4,014^2 + 2,914^2} e^{j\arctg \frac{2,914}{4,014}} = 4,96e^{j36,2^\circ}\end{aligned}$$

Амплитуда результирующего тока  $I_{3m} = 4,96 \text{ A}$ , начальная фаза -  $\varphi_3 = 36,2^\circ$ .

Мгновенное значение результирующего тока:

$$i_3 = 4,96 \sin(314t + 36,2^\circ) \text{ А.}$$

Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме:

$$\bar{I}_m = \frac{\bar{U}_m}{R} - \text{закон Ома}; \quad (5.4)$$

$$\sum \bar{I}_m = 0 - \text{первый закон Кирхгофа}; \quad (5.5)$$

$$\sum \bar{E}_m = \sum \bar{U}_m - \text{второй закон Кирхгофа.} \quad (5.6)$$

#### 5.4. АКТИВНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ В ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Если напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$  подключить к сопротивлению  $R$ , то через него протекает ток

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \varphi_u) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i). \quad (5.7)$$

Анализ выражения (5.7) показывает, что напряжение на сопротивлении и ток, протекающий через него, совпадают по фазе.

Формула (5.7) в комплексной форме записи имеет вид

$$\bar{I}_m = \frac{\bar{U}_m}{R}, \quad (5.8)$$

где  $\bar{I}_m = I_m e^{j\varphi_i}$  и  $\bar{U}_m = U_m e^{j\varphi_u}$  - комплексные амплитуды тока и напряжения. Векторная диаграмма, соответствующая комплексному уравнению (5.8) представлена на рис.5.4.

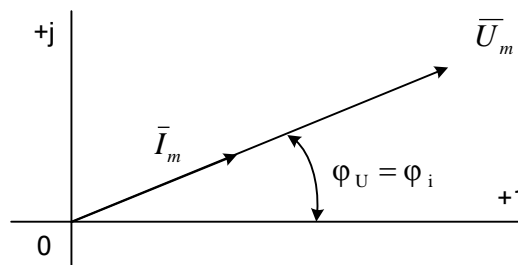


Рис. 5.4

Из анализа диаграммы следует, что векторы напряжения и тока совпадают по направлению.

Сопротивление участка цепи постоянному току называется омическим, а сопротивление того же участка переменному току - активным сопротивлением.

Активное сопротивление больше омического из-за явления поверхностного эффекта. Поверхностный эффект заключается в том, что ток вытесняется из центральных частей к периферии сечения проводника.

## 5.5. ИНДУКТИВНАЯ КАТУШКА В ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Сначала рассмотрим идеальную индуктивную катушку, активное сопротивление которой равно нулю. Пусть по идеальной катушке с индуктивностью  $L$  протекает синусоидальный ток  $i = I_m \sin \omega t$ . Этот ток создает в индуктивной катушке переменное магнитное поле, изменение которого вызывает в катушке ЭДС самоиндукции

$$e_L = -L \frac{di}{dt} \quad (5.9)$$

Эта ЭДС уравновешивается напряжением, подключенным к катушке:

$$u + e_L = 0,$$

$$u = -e_L = L \frac{di}{dt} = \omega L I_m \cos \omega t = \omega L I_m \sin(\omega t + 90^\circ). \quad (5.10)$$

Таким образом, ток в индуктивности отстает по фазе от напряжения на  $90^\circ$  из-за явления самоиндукции.

Уравнение вида (5.10) для реальной катушки, имеющей активное сопротивление  $R$ , имеет следующий вид:

$$u = RI_m \sin \omega t + \omega L I_m \sin(\omega t + 90^\circ) \quad (5.11)$$

Анализ выражения (5.11) показывает, что ЭДС самоиндукции оказывает препятствие (сопротивление) протеканию переменного тока, из-за чего ток в реальной индуктивной катушке отстает по фазе от напряжения на некоторый угол  $\varphi$  ( $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ ), величина которого зависит от соотношения  $R$  и  $L$ . Выражение (5.11) в комплексной форме записи имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{U}_m &= R \bar{I}_m + \omega L e^{j90^\circ} \bar{I}_m = R \bar{I}_m + j \omega L \bar{I}_m = \\ &= (R + j \omega L) \bar{I}_m = Z_L \bar{I}_m = z_L \cdot e^{j\varphi} \bar{I}_m, \\ e^{j90^\circ} &= \cos 90^\circ + j \sin 90^\circ = j, \end{aligned} \quad (5.12)$$

где  $Z_L$  - полное комплексное сопротивление индуктивной катушки ( $Z_L = R + jX_L$ );

$z_L$  - модуль комплексного сопротивления;

$\varphi = \arctg \frac{\omega L}{R}$  - начальная фаза комплексного сопротивления;

$X_L = \omega L$  - индуктивное сопротивление (фиктивная величина, характеризующая реакцию электрической цепи на переменное магнитное поле).

Полное сопротивление индуктивной катушки или модуль комплексного сопротивления:

$$z_L = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{R^2 + X_L^2}.$$

Комплексному уравнению (5.12) соответствует векторная диаграмма (рис.5.5).

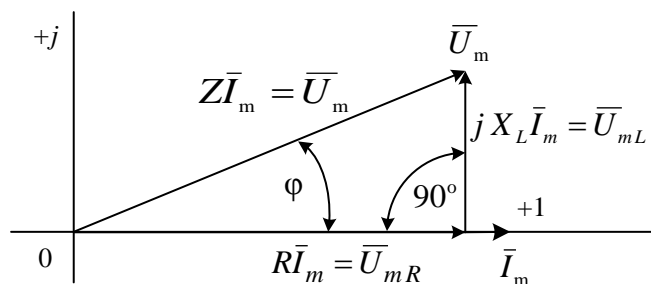


Рис. 5.5

Из анализа диаграммы видно, что вектор напряжения на индуктивности опережает вектор тока на  $90^\circ$ .

В цепи переменного тока напряжения на участках цепи складываются не арифметически, а геометрически.

Если мы поделим стороны треугольника напряжений на величину тока  $I_m$ , то перейдем к подобному треугольнику сопротивлений (рис. 5.6).

Из треугольника сопротивлений получим несколько формул:

$$\cos\varphi = \frac{R}{z}; \sin\varphi = \frac{X_L}{z}; z = \sqrt{R^2 + X_L^2}; R = z\cos\varphi; X_L = z\sin\varphi.$$

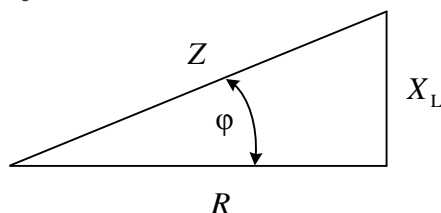


Рис. 5.6

## 5.6. ЕМКОСТЬ В ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Если к конденсатору емкостью  $C$  подключить синусоидальное напряжение, то в цепи протекает синусоидальный ток

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u);$$

$$i = C \frac{du}{dt} = \omega C U_m \sin(\omega t + \varphi_u + 90^\circ). \quad (5.13)$$

Из анализа выражений 5.13 следует, что ток опережает напряжение по фазе на  $90^\circ$ .

Выражение (5.13) в комплексной форме записи имеет вид:

$$\overline{I}_m = \frac{\overline{U}_m e^{j90^\circ}}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{j\overline{U}_m}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{\overline{U}_m}{-jX_c}; \quad e^{j90^\circ} = j, \quad (5.14)$$

где  $X_c = \frac{1}{\omega C}$  - емкостное сопротивление, фиктивная расчетная величина, имеющая размерность сопротивления.

Если комплексное сопротивление индуктивности положительно  $Z_L = j\omega L = jX_L$ , то комплексное сопротивление емкости отрицательно  $Z_c = -jX_c = -j\frac{1}{\omega C}$ .

На рис. 5.7 изображена векторная диаграмма цепи с емкостью. Вектор тока опережает вектор напряжения на  $90^\circ$ .

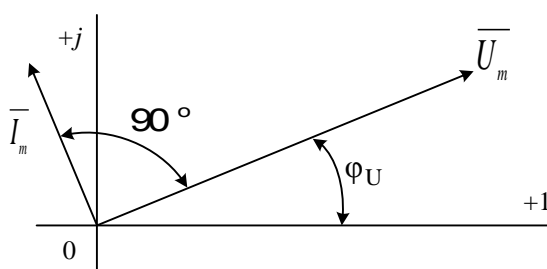


Рис. 5.7

## 5.7. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО СОЕДИНЕННЫЕ РЕАЛЬНАЯ ИНДУКТИВНАЯ КАТУШКА И КОНДЕНСАТОР В ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Катушка с активным сопротивлением  $R$  и индуктивностью  $L$  и конденсатор емкостью  $C$  включены последовательно (рис.5.8). В схеме протекает синусоидальный ток

$$i = I_m \sin \omega t.$$

Определим напряжение на входе схемы. В соответствии со вторым законом Кирхгофа:

$$u = u_R + u_L + u_C, \quad (5.15)$$

$$u_R = iR, \quad u_L = L \frac{di}{dt}, \quad u_C = \frac{1}{C} \int i dt.$$

Подставим эти формулы в уравнение (5.15). Получим:

$$\begin{aligned}
 u &= iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = RI_m \sin \omega t + \\
 &+ L\omega I_m \cos \omega t - \frac{1}{\omega C} I_m \cos \omega t = RI_m \sin \omega t + \\
 &+ X_L I_m \sin(\omega t + 90^\circ) + X_C I_m \sin(\omega t - 90^\circ).
 \end{aligned}
 \quad (5.16)$$

Из выражения (5.16) видно: напряжение в активном сопротивлении совпадает по фазе с током, напряжение на индуктивности опережает по фазе ток на  $90^\circ$ , напряжение по емкости отстает по фазе от тока на  $90^\circ$ .

Запишем уравнение (5.16) в комплексной форме:

$$\overline{U}_m = (R\overline{I}_m + X_L \overline{I}_m e^{j90^\circ} + X_C \overline{I}_m e^{-j90^\circ}) \quad (5.17)$$

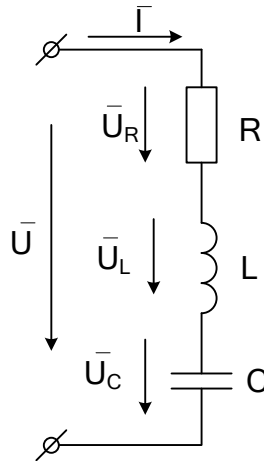


Рис. 5.8

Поделим левую и правую части уравнения (5.17) на  $\sqrt{2}$ . Получим уравнение для комплексов действующих значений токов и напряжений:

$$\overline{U} = \overline{I}[R + j(X_L - X_C)] = \overline{I} \underline{Z} = \overline{I} Z e^{j\varphi}, \quad (5.18)$$

где  $\underline{Z} = R + j(X_L - X_C)$  - комплексное сопротивление цепи;

$z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$  - модуль комплексного сопротивления, или полное сопротивление цепи;

$\varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R}$  - аргумент сопротивления.

При построении векторных диаграмм цепи рассмотрим три случая.

1.  $X_L > X_C$ , цепь носит индуктивный характер. Векторы напряжений на индуктивности и емкости направлены в противоположные стороны, частично компенсируют друг друга. Вектор напряжения на входе схемы опережает вектор тока (рис.5.9).

2. Индуктивное сопротивление меньше емкостного. Вектор напряжения на входе схемы отстает от вектора тока. Цепь носит емкостный характер(рис.5.10).

3. Индуктивное и емкостное сопротивления одинаковы. Напряжения на индуктивности и емкости полностью компенсируют друг друга. Ток в цепи совпадает по фазе с входным напряжением. В электрической цепи наступает резонанс напряжений (рис.5.11).

Ток в резонансном режиме достигает максимума, так как полное сопротивление  $Z$  цепи имеет минимальное значение, равное  $R$ :

$$I = \frac{U}{z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{U}{R} = I_0.$$

Условие возникновения резонанса:  $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$ , отсюда резонансная частота равна

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Из формулы следует, что режима резонанса можно добиться изменением:

- 1) частоты;
- 2) индуктивности;
- 3) емкости.

В резонансном режиме входное напряжение равно падению напряжения в активном сопротивлении. На индуктивности и емкости схемы могут возникнуть напряжения, во много раз превышающие напряжение на входе цепи. Это объясняется тем, что каждое напряжение равно произведению тока  $I_0$  (а он наибольший), на соответствующее индуктивное или емкостное сопротивление (а они могут быть большими):

$$U = RI_0 \ll X_L I_0 = X_C I_0.$$

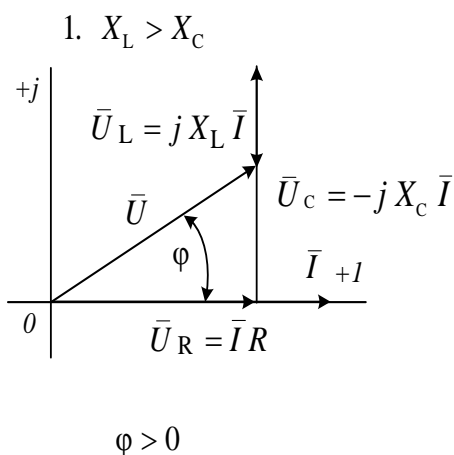


Рис. 5.9

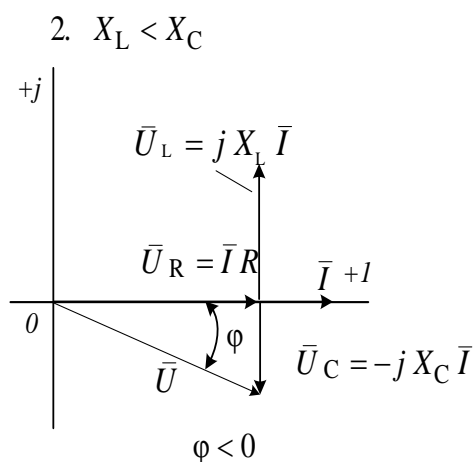


Рис. 5.10

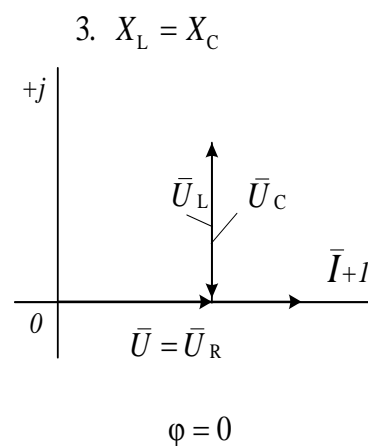


Рис. 5.11



## 5.8. ПАРАЛЛЕЛЬНО СОЕДИНЕННЫЕ ИНДУКТИВНОСТЬ, ЕМКОСТЬ И АКТИВНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ В ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

К схеме на рис. 5.12 подключено синусоидальное напряжение  $u = U_m \sin \omega t$ . Схема состоит из параллельно включенных индуктивности, емкости и активного сопротивления.

Определим ток на входе схемы.

В соответствии с первым законом Кирхгофа:

$$i = i_R + i_L + i_C, \quad (5.19)$$

где  $i_R = \frac{U}{R} = g U_m \sin \omega t$

$g = \frac{1}{R}$  - активная проводимость,  $i_C = C \frac{du}{dt}$ ,  $i_L = \frac{1}{L} \int u dt$ .

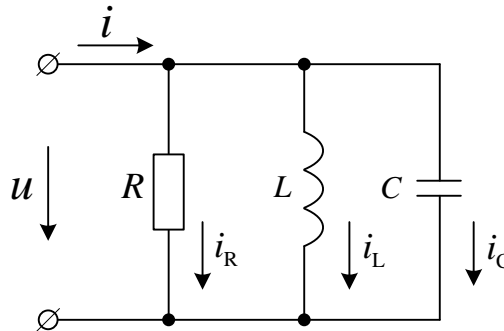


Рис. 5.12

Подставим эти формулы в уравнение (5.19). Получим:

$$\begin{aligned} i &= gu + \frac{1}{L} \int u dt + c \frac{du}{dt} = g U_m \sin \omega t - \\ &- \frac{1}{\omega L} U_m \cos \omega t + C \omega U_m \cos \omega t = g U_m \sin \omega t + \\ &+ b_L U_m \sin(\omega t - 90^\circ) + b_c U_m \sin(\omega t + 90^\circ), \end{aligned} \quad (5.20)$$

где  $b_L = \frac{1}{\omega L}$  - индуктивная проводимость;  $b_c = \omega C$  - емкостная проводимость.

Из уравнения (5.20) видно, что ток в ветви с индуктивностью отстает по фазе от напряжения на  $90^\circ$ , ток в ветви с активным сопротивлением совпадает по фазе с напряжением, ток в ветви с емкостью опережает по фазе напряжение на  $90^\circ$ .

Запишем уравнение (5.20) в комплексной форме:

$$\bar{I} = g \bar{U} - \bar{U} j b_L + \bar{U} j b_c = \bar{U} [g + j(b_c - b_L)] = \bar{U} Y = \bar{U} y e^{j\varphi}, \quad (5.21)$$

где  $Y = g + j(b_c - b_L)$  - комплексная проводимость;

$y = \sqrt{g^2 + (b_c - b_L)^2}$  - полная проводимость;

$\varphi = \arctg \frac{b_c - b_L}{g}$  - начальная фаза комплексной проводимости.

Построим векторные диаграммы, соответствующие комплексному уравнению (5.21).

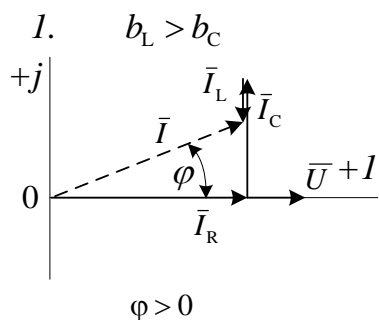


Рис. 5.13

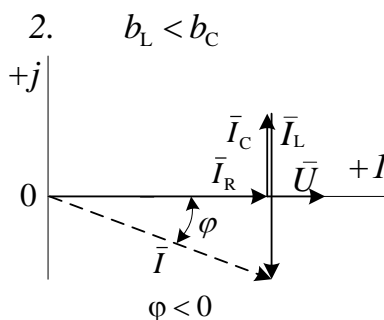


Рис. 5.14

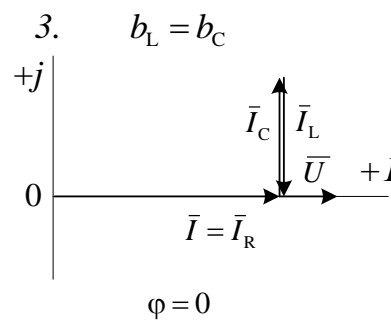


Рис. 5.15

В схеме на рис. 5.12 может возникнуть режим резонанса токов. Резонанс токов возникает тогда, когда индуктивная и емкостная проводимости одинаковы. При этом индуктивный и емкостный токи, направленные в противоположные стороны, полностью компенсируют друг друга. Ток в неразветвленной части схемы совпадает по фазе с напряжением.

Из условия возникновения резонанса тока  $\omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L}$  получим формулу для резонансной частоты тока:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

В режиме резонанса тока полная проводимость цепи  $y = \sqrt{g^2 + (b_c - b_L)^2} = g$  минимальна, а полное сопротивление  $z = \frac{1}{y}$  - максимально. Ток в

неразветвленной части схемы  $I = \frac{U}{z}$  в резонансном режиме имеет минимальное значение. В идеализированном случае  $R = \infty$ ,  $g = 0$ ,  $y = b_c - b_L = 0$  и  $z = \frac{1}{y} = \infty$ .

Ток в неразветвленной части цепи  $I = 0$ . Такая схема называется фильтр - пробкой.

## 5.9. РЕЗОНАНСНЫЙ РЕЖИМ В ЦЕПИ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ПАРАЛЛЕЛЬНО ВКЛЮЧЕННЫХ РЕАЛЬНОЙ ИНДУКТИВНОЙ КАТУШКИ И КОНДЕНСАТОРА

Комплексная проводимость индуктивной ветви (рис. 5.16)

$$Y_1 = \frac{1}{(R_K + j\omega_0 L_K)(R_K - j\omega_0 L_K)} = \frac{R_K - j\omega_0 L_K}{R_K^2 + (\omega_0 L_K)^2} =$$

$$= \frac{R_K}{R_K^2 + (\omega_0 L_K)^2} - j \frac{\omega_0 L_K}{R_K^2 + (\omega_0 L_K)^2} = g_K - jb_{LK},$$

где  $g_K = \frac{R_K}{R_K^2 + (\omega_0 L_K)^2} = \frac{R_K}{z_K^2}$  - активная проводимость индуктивной катушки;

$z_K = \sqrt{R_K^2 + (\omega_0 L_K)^2}$  - полное сопротивление индуктивной катушки;

$b_{LK} = \frac{\omega_0 L_K}{R_K^2 + (\omega_0 L_K)^2} = \frac{\omega_0 L_K}{z_K^2}$  - индуктивная проводимость катушки;

$b_c = \omega_0 \cdot C$  - емкостная проводимость второй ветви.

В режиме резонансов токов справедливо уравнение:

$$b_L = b_C \quad \text{или} \quad \frac{\omega_0 L_K}{R_K^2 + (\omega_0 L_K)^2} = \omega_0 C.$$

Из этого уравнения получим формулу для резонанса частоты

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_K C}} \sqrt{\frac{L_K}{C} - R_K^2}. \quad (5.22)$$

На рис. 5.16 изображена векторная диаграмма цепи в резонансном режиме.

Вектор тока  $I_2$  опережает вектор напряжения на  $90^\circ$ . Вектор тока  $I_1$  отстает от вектора напряжения на угол  $\varphi$ ,

$$\text{где } \varphi = \arctg \frac{\omega_0 L_K}{R_K}.$$

Разложим вектор тока  $I_1$  на две взаимно перпендикулярные составляющих, одна из них, совпадающая с вектором напряжения, называется активной составляющей тока  $I_{a1}$ , другая - реактивной составляющей тока  $I_{p1}$ .

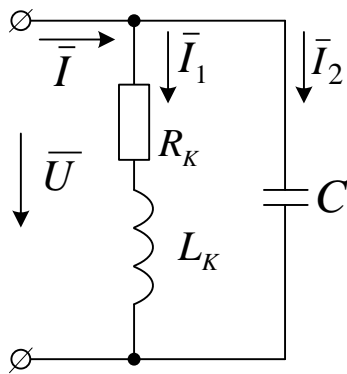


Рис. 5.16

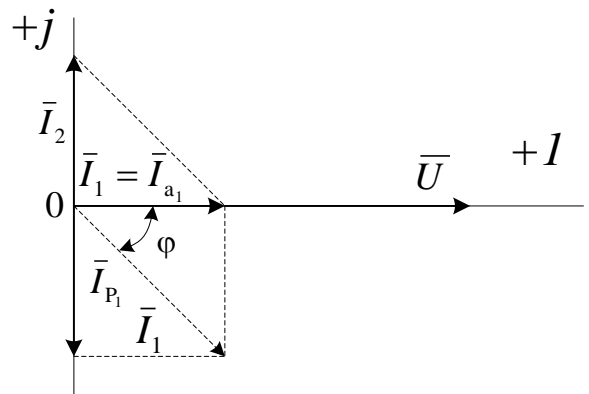


Рис. 5.17

В режиме резонанса тока реактивная составляющая тока  $I_{p1}$  и емкостный ток  $I_2$ , направленные в противоположные стороны, полностью компенсируют друг друга, активная составляющая тока  $I_{a1}$  совпадает по фазе с напряжением (рис. 5.17). Ток  $I$  в неразветвленной части схемы совпадает по фазе с напряжением.

## 5.10. МОЩНОСТЬ В ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Мгновенной мощностью называют произведение мгновенного напряжения на входе цепи на мгновенный ток.

Пусть мгновенные напряжение и ток определяются по формулам:

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi) \quad i = I_m \sin \omega t.$$

Тогда

$$\begin{aligned} p &= ui = U_m I_m \sin(\omega t + \varphi) \sin \omega t = \\ &= U_m I_m \frac{1}{2} [\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)] = \\ &= UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi), \end{aligned} \quad (5.23)$$

где  $U$  и  $I$  действующие значения напряжения и тока.

Среднее значение мгновенной мощности за период

$$P_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T [UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi)] dt = UI \cos \varphi.$$

Из треугольника сопротивлений  $\cos \varphi = \frac{R}{z}$ , а  $\frac{U}{z} = I$ .

Получим еще одну формулу:

$$P_{cp} = UI \cos \varphi = UI \frac{R}{z} = I^2 R = P(\text{Вт}).$$

Среднее значение мощности за период называют активной мощностью и обозначают буквой  $P$ .

Эта мощность измеряется в ваттах и характеризует необратимое преобразование электрической энергии в другой вид энергии, например, в тепловую, световую и механическую энергии.

Возьмем реактивный элемент (индуктивность или емкость). Активная мощность в этом элементе  $P = UI \cos 90^\circ = 0$ , так как напряжение и ток в индуктивности или емкости различаются по фазе на  $90^\circ$ .

В реактивных элементах отсутствуют необратимые потери электрической энергии, не происходит нагрева элементов. Происходит обратимый процесс в виде обмена электрической энергией между источником и приемником. Для качественной оценки интенсивности обмена энергией вводится понятие реактивной мощности  $Q$ .

Преобразуем выражение (5.23):

$$\begin{aligned} p &= UI \cos \varphi - UI (\cos 2\omega t \cos \varphi - \sin 2\omega t \sin \varphi) = \\ &= UI \cos \varphi (1 - \cos 2\omega t) + UI \sin \varphi \cdot \sin 2\omega t = p_1 + p_2, \end{aligned}$$

где  $p_1 = UI \cos \varphi (1 - \cos 2\omega t)$  - мгновенная мощность в активном сопротивлении;

$p_2 = UI \sin \varphi \cdot \sin 2\omega t$  - мгновенная мощность в реактивном элементе (в индуктивности или в емкости).

Максимальное или амплитудное значение мощности  $p_2$  называется реактивной мощностью

$$Q = UI \sin \varphi = UI \frac{x}{z} = I^2 x (\text{ВАр}) \quad \sin \varphi = \frac{x}{z},$$

где  $x$  - реактивное сопротивление (индуктивное или емкостное).

Реактивная мощность, измеряемая в вольтамперах (ВАр), расходуется на создание магнитного поля в индуктивности или электрического поля в емкости. Энергия, накопленная в емкости или в индуктивности, периодически возвращается источнику питания.

Полная мощность, измеряемая в вольтамперах, равна произведению действующих значений напряжения и тока:

$$S = UI = I^2 z (\text{ВА}) \quad U = Iz,$$

где  $z$  - полное сопротивление цепи.

Полная мощность характеризует предельные возможности источника энергии. В электрической цепи можно использовать часть полной мощности

$$P = UI \cos \varphi = S \cos \varphi,$$

где  $\cos \varphi = \frac{P}{UI} = \frac{P}{S}$  - коэффициент мощности или "косинус "фи".

Коэффициент мощности является одной из важнейших характеристик электротехнических устройств. Принимают специальные меры к увеличению коэффициента мощности.

Возьмем треугольник сопротивлений и умножим его стороны на квадрат тока в цепи. Получим подобный треугольник мощностей (рис. 5.18).

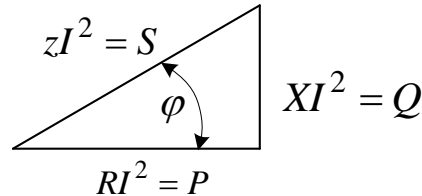


Рис.5.18

Из треугольника мощностей получим ряд формул:

$$P = S \cos \varphi, \quad Q = S \sin \varphi,$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}, \quad \cos \varphi = \frac{P}{S}.$$

При анализе электрических цепей символическим методом используют выражение комплексной мощности, равное произведению комплексного напряжения на сопряженный комплекс тока. Для цепи, имеющей индуктивный характер ( $R$ - $L$  цепи)

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \bar{U} I^* = U e^{j\varphi_u} I e^{-j\varphi_i} = U I e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = U I e^{j\varphi} = \\ &= U I \cos \varphi + j U I \sin \varphi = P + jQ, \end{aligned}$$

где  $\bar{U} = U e^{j\varphi_u}$  - комплекс напряжения;

$\bar{I} = I e^{j\varphi_i}$  - комплекс тока;

$I^* = I e^{-j\varphi_i}$  сопряженный комплекс тока;

$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$  - сдвиг по фазе между напряжением и током.

Вещественной частью полной комплексной мощности является активная мощность.

Мнимой частью комплексной мощности - реактивная мощность.

Для цепи, имеющей емкостной характер ( $R$ - $C$  цепи),  $\varphi_u - \varphi_i = \varphi < 0$ . Ток опережает по фазе напряжение:

$$\tilde{S} = \bar{U} I^* = S e^{-j\varphi} = S \cos \varphi - j S \sin \varphi = P - jQ.$$

Активная мощность всегда положительна. Реактивная мощность в цепи, имеющей индуктивный характер, - положительна, а в цепи с емкостным характером - отрицательна.

## 5.11. БАЛАНС МОЩНОСТЕЙ

Для схемы на рис. 5.19 запишем уравнение по второму закону Кирхгофа. Умножим левую и правую части уравнения на сопряженный комплекс тока:

$$\begin{aligned}\bar{E} I^* &= (\bar{I}R + j\bar{I}X_L - j\bar{I}X_C) I^* = \\ \bar{I} I^* R + \bar{I} I^* j(X_L - X_C) &= I^2 R \pm I^2 jX, \\ \bar{I} I^* &= I e^{j\varphi_i} I e^{-j\varphi_i} = I^2 e^{j(\varphi_i - \varphi_i)} = I^2,\end{aligned}$$

где  $\pm X = X_L - X_C$  - результирующее реактивное сопротивление;  
 $I^2$  - квадрат модуля тока.

$$\bar{E} I^* = \tilde{S}_\Pi = P_\Pi \pm jQ_\Pi,$$

где  $\tilde{S}_\Pi, P_\Pi, jQ_\Pi$  - полная комплексная, активная и реактивная мощности источника питания.

$$I^2 R \pm jI^2 X = P_\Pi \pm jQ_\Pi,$$

где  $P_\Pi \pm jQ_\Pi$  - активная и реактивная мощности, потребляемые элементами схемы.

Получим уравнение:

$$P_\Pi \pm jQ_\Pi = P_\Pi \pm jQ_\Pi. \quad (5.24)$$

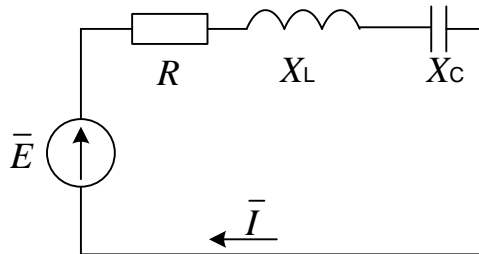


Рис. 5.19

Два комплексных числа равны, если равны по отдельности их вещественные и мнимые части, следовательно уравнение (5.24) распадается на два:

$$P_\Pi = P_\Pi, \quad \pm Q_\Pi = \pm Q_\Pi. \quad (5.25)$$

Полученные равенства выражают законы сохранения активных и реактивных мощностей.

## 5.12. СОГЛАСОВАННЫЙ РЕЖИМ РАБОТЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ. СОГЛАСОВАНИЕ НАГРУЗКИ С ИСТОЧНИКОМ

В схеме на рис. 5.20  $z_i, R_i, X_i$  - полное, активное и реактивное сопротивления источника ЭДС,  $z_H, R_H, X_H$  - полное, активное и реактивное сопротивления нагрузки.

Активная мощность может выделяться только в активных сопротивлениях цепи переменного тока. Активная мощность, выделяемая в нагрузке,

$$P_2 = R_H I^2 = R_H \frac{E^2}{z^2} = \frac{R_H E^2}{(R_H + R_i)^2 + (X_i + X_H)^2}. \quad (5.26)$$

Активная мощность, развиваемая генератором  $P_1 = (R_H + R_i) I^2$ . Коэффициент полезного действия для данной схемы:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{R_H}{R_H + R_i} = \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R_H}}$$

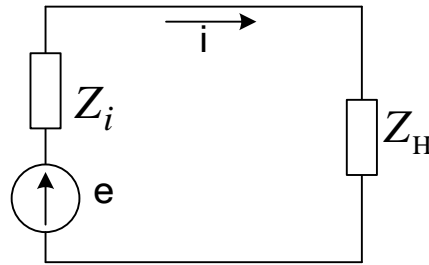


Рис. 5.20

Из формулы (5.26) видно, что выделяемая в нагрузке мощность будет максимальной, когда знаменатель минимален. Последнее имеет место при  $X_i + X_H = 0$ , т.е. при  $X_H = -X_i$ . Это означает, что реактивные сопротивления источника и нагрузки должны быть одинаковы по модулю и иметь разнородный характер. При индуктивном характере реактивного сопротивления источника реактивное сопротивление нагрузки должно быть емкостным и наоборот:

$$P_{2\max} = \frac{R_H E^2}{(R_H + R_i)^2}. \quad (5.27)$$

Установим условие, при котором от источника к нагрузке будет передаваться наибольшая мощность:

$$\frac{dP_{2\max}}{dR_H} = E^2 \frac{(R_H + R_i)^2 - 2R_H(R_H + R_i)}{(R_H + R_i)^4} = 0,$$



отсюда  $R_H = R_i$ .

От источника к нагрузке передается наибольшая мощность, когда

$$X_H = -X_i, \quad R_H = R_i. \quad (5.28)$$

Величина наибольшей мощности

$$P_{2\max} = \frac{R_i E^2}{(R_H + R_i)^2} = \frac{E^2}{4R_i}.$$

Режим передачи наибольшей мощности от источника к нагрузке называется согласованным режимом, а подбор сопротивлений согласно равенствам (5.28) - согласованием нагрузки с источником.

В согласованном режиме

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R_H}} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Половина мощности теряется внутри источника. Поэтому согласованный режим не используется в силовых энергетических цепях. Этот режим применяют в информационных цепях, где мощности могут быть малыми, и решающими являются не соображения экономичности передачи сигнала, а максимальная мощность сигнала в нагрузке.

## 6. ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

### 6.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Трехфазная цепь является совокупностью трех электрических цепей, в которых действуют синусоидальные ЭДС одинаковой частоты, сдвинутые относительно друг друга по фазе на  $120^\circ$ , создаваемые общим источником. Участок трехфазной системы, по которому протекает одинаковый ток, называется фазой.

Трехфазная цепь состоит из трехфазного генератора, соединительных проводов и приемников или нагрузки, которые могут быть однофазными или трехфазными.

Трехфазный генератор представляет собой синхронную машину. На статоре генератора размещена обмотка, состоящая из трех частей или фаз, пространственно смещенных относительно друг друга на  $120^\circ$ . В фазах генератора индуцируется симметричная трехфазная система ЭДС, в которой электродвижущие силы одинаковы по амплитуде и различаются по фазе на  $120^\circ$ . Запишем мгновенные значения и комплексы действующих значений ЭДС:

$$e_A = E_m \sin(\omega t); e_B = E_m \sin(\omega t - 120^\circ); e_C = E_m \sin(\omega t + 120^\circ)$$

$$\bar{E}_A = E; \quad \bar{E}_B = Ee^{-j120^\circ}; \quad \bar{E}_C = Ee^{j120^\circ}.$$

Сумма электродвижущих сил симметричной трехфазной системы в любой момент времени равна нулю:

$$\begin{aligned} \bar{E}_A + \bar{E}_B + \bar{E}_C &= E(1 + e^{-j120^\circ} + e^{j120^\circ}) = \\ &= E(1 + \cos 120^\circ - j\sin 120^\circ + \cos 120^\circ + j\sin 120^\circ) = E\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Соответственно

$$e_A + e_B + e_C = 0.$$

На схемах трехфазных цепей начала фаз обозначают первыми буквами латинского алфавита ( *A*, *B*, *C* ), а концы - последними буквами ( *X*, *Y*, *Z* ). Направления ЭДС указывают от конца фазы обмотки генератора к ее началу.

Каждая фаза нагрузки соединяется с фазой генератора двумя проводами: прямым и обратным. Получается несвязанная трехфазная система, в которой имеется шесть соединительных проводов. Чтобы уменьшить количество соединительных проводов, используют трехфазные цепи, соединенные звездой или треугольником.

## 6.2. СОЕДИНЕНИЕ В ЗВЕЗДУ

Если концы всех фаз генератора соединить в общий узел, а начала фаз соединить с нагрузкой, образующей трехлучевую звезду сопротивлений, получится трехфазная цепь, соединенная звездой. При этом три обратных провода сливаются в один, называемый нулевым или нейтральным.

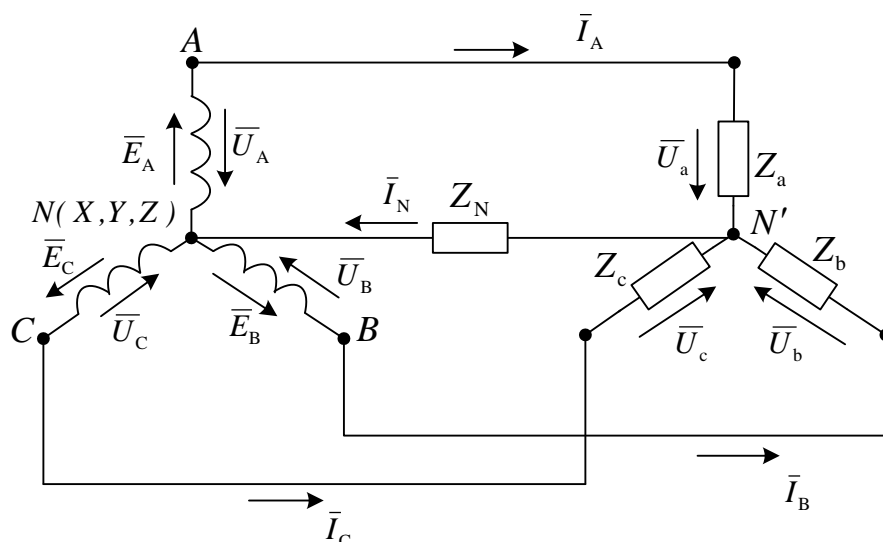


Рис. 6.1

Трехфазная цепь, соединенная звездой, изображена на рис. 6.1. Провода, идущие от источника к нагрузке, называют линейными проводами, провод, соединяющий нейтральные точки источника  $N_n$  приемника  $N'$ , называют нейтральным (нулевым) проводом.

Напряжения между началами фаз или между линейными проводами называют линейными напряжениями. Напряжения между началом и концом фазы или между линейным и нейтральным проводами называются фазными напряжениями.

Токи в фазах приемника или источника называют фазными токами, токи в линейных проводах - линейными токами. Так как линейные провода соединены последовательно с фазами источника и приемника, линейные токи при соединении звездой являются одновременно фазными токами:

$$I_l = I_\phi.$$

Линейные напряжения равны геометрическим разностям соответствующих фазных напряжений:

$$\bar{U}_{AB} = \bar{U}_A - \bar{U}_B, \quad \bar{U}_{BC} = \bar{U}_B - \bar{U}_C, \quad \bar{U}_{CA} = \bar{U}_C - \bar{U}_A. \quad (6.1)$$

На рис. 6.2 изображена векторная диаграмма фазных и линейных напряжений симметричного источника.

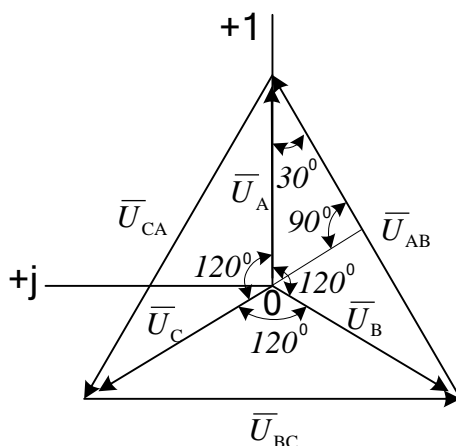


Рис. 6.2

Из векторной диаграммы видно, что

$$U_l = U_{AB} = 2U_\phi \cos 30^\circ = 2U_\phi \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}U_\phi.$$

При симметричной системе ЭДС источника линейное напряжение больше фазного в  $\sqrt{3}$  раз:

$$U_l = \sqrt{3} U_\phi.$$

### 6.3 СОЕДИНЕНИЕ В ТРЕУГОЛЬНИК

Если конец каждой фазы обмотки генератора соединить с началом следующей фазы, образуется соединение в треугольник. К точкам соединений обмоток подключают три линейных провода, ведущих к нагрузке.

На рис. 6.3 изображена трехфазная цепь, соединенная треугольником. Как

видно из рис. 6.3, в трехфазной цепи, соединенной треугольником, фазные и линейные напряжения одинаковы:

$$U_{\text{л}} = U_{\text{ф}}$$

Линейные и фазные токи нагрузки связаны между собой первым законом Кирхгофа для узлов  $a, b, c$ :

$$\bar{I}_A = \bar{I}_{ab} - \bar{I}_{ca}, \bar{I}_B = \bar{I}_{bc} - \bar{I}_{ab}, \bar{I}_C = \bar{I}_{ca} - \bar{I}_{bc},$$

где  $I_A, I_B, I_C$  - линейные токи,  $I_{ab}, I_{bc}, I_{ca}$  - фазные токи.

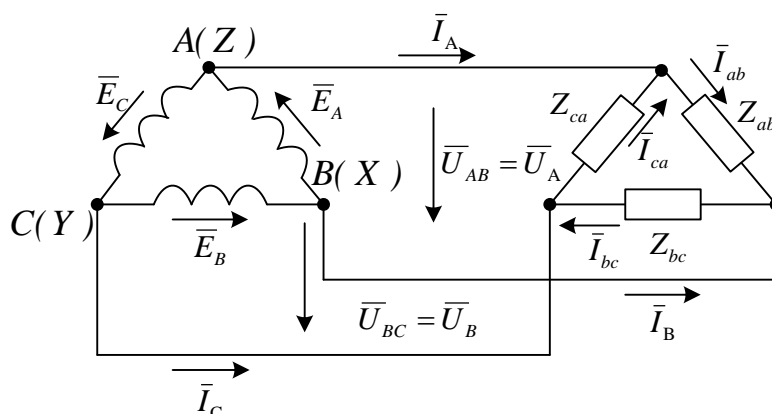


Рис. 6.3

Линейный ток равен геометрической разности соответствующих фазных токов. На рис. 6.4 изображена векторная диаграмма трехфазной цепи, соединенной треугольником при симметричной нагрузке. Нагрузка является симметричной, если сопротивления фаз одинаковы. Векторы фазных токов совпадают по направлению с векторами соответствующих фазных напряжений, так как нагрузка состоит из активных сопротивлений.

Из векторной диаграммы видно, что

$$I_{\text{л}} = 2I_{\text{ф}} \cos 30^\circ = 2I_{\text{ф}} \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}I_{\text{ф}},$$

$$I_{\text{л}} = \sqrt{3}I_{\text{ф}} - \text{при симметричной нагрузке.}$$

Трехфазные цепи, соединенные звездой, получили большее распространение, чем трехфазные цепи, соединенные треугольником. Это объясняется тем, что, во-первых, в цепи, соединенной звездой, можно получить два напряжения: линейное и фазное. Во-вторых, если фазы обмотки электрической машины, соединенной треугольником, находятся в неодинаковых условиях, в обмотке появляются дополнительные токи, нагружающие ее. Такие токи отсутствуют в фазах электрической машины, соединенных по схеме "звезда". Поэтому на практике избегают соединять обмотки трехфазных электрических машин в треугольник.

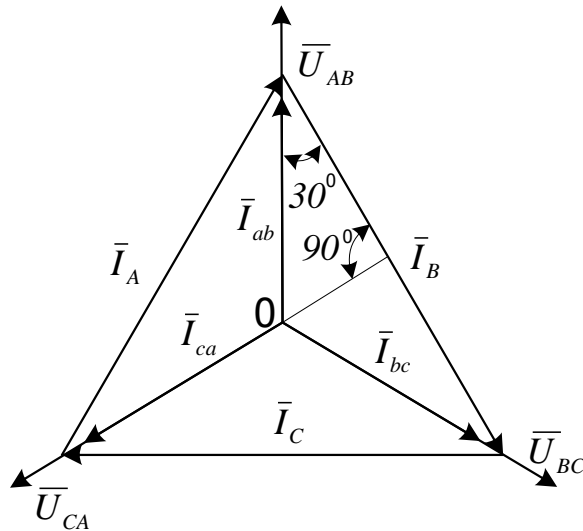


Рис. 6.4

#### 6.4. РАСЧЕТ ТРЕХФАЗНОЙ ЦЕПИ, СОЕДИНЕННОЙ ЗВЕЗДОЙ

Трехфазную цепь, соединенную звездой, удобнее всего рассчитать методом двух узлов.

На рис. 6.5 изображена трехфазная цепь при соединении звездой.

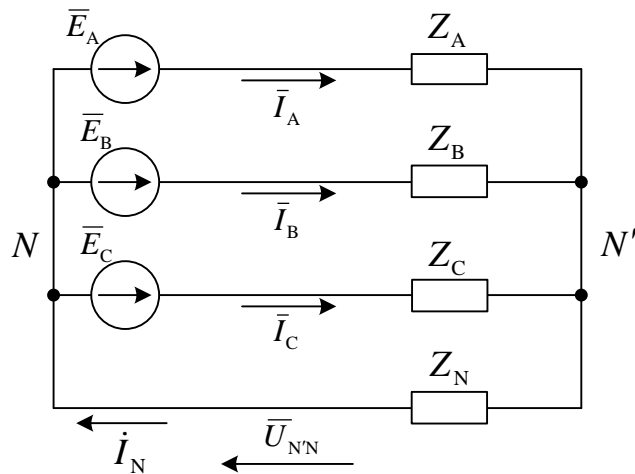


Рис.6.5

В общем случае сопротивления фаз нагрузки не одинаковы ( $Z_A \neq Z_B \neq Z_C$ ). Нейтральный провод имеет конечное сопротивление  $Z_N$ . В схеме между нейтральными точками источника и нагрузки возникает узловое напряжение или напряжение смещения нейтрали. Это напряжение определяется по формуле (6.2):

$$\vec{U}_{N'N} = \frac{\vec{E}_A \frac{1}{\underline{Z}_A} + \vec{E}_B \frac{1}{\underline{Z}_B} + \vec{E}_C \frac{1}{\underline{Z}_C}}{\frac{1}{\underline{Z}_A} + \frac{1}{\underline{Z}_B} + \frac{1}{\underline{Z}_C} + \frac{1}{\underline{Z}_N}}. \quad (6.2)$$

Фазные токи определяются по формулам (в соответствии с законом Ома для активной ветви):

$$\begin{aligned}\bar{I}_A &= \frac{\bar{E}_A - \bar{U}_{N'N}}{Z_A} = \frac{\bar{U}_A - \bar{U}_{N'N}}{Z_A} = \frac{\bar{U}_a}{Z_A}, \\ \bar{I}_B &= \frac{\bar{E}_B - \bar{U}_{N'N}}{Z_B} = \frac{\bar{U}_B - \bar{U}_{N'N}}{Z_B} = \frac{\bar{U}_b}{Z_B}, \\ \bar{I}_C &= \frac{\bar{E}_C - \bar{U}_{N'N}}{Z_C} = \frac{\bar{U}_C - \bar{U}_{N'N}}{Z_C} = \frac{\bar{U}_c}{Z_C}.\end{aligned}\quad (6.3)$$

Ток в нейтральном проводе

$$\bar{I}_N = \bar{I}_A + \bar{I}_B + \bar{I}_C = \frac{\bar{U}_{N'N}}{Z_N}. \quad (6.4)$$

### Частные случаи

**1. Симметричная нагрузка.** Сопротивления фаз нагрузки одинаковы и равны некоторому активному сопротивлению  $Z_A = Z_B = Z_C = R$ .

Узловое напряжение

$$\bar{U}_{N'N} = \frac{\bar{E}_A \frac{1}{R} + \bar{E}_B \frac{1}{R} + \bar{E}_C \frac{1}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{Z_N}} = \frac{\frac{1}{R}(\bar{E}_A + \bar{E}_B + \bar{E}_C)}{\frac{3}{R} + \frac{1}{Z_N}} = 0,$$

потому что трехфазная система ЭДС симметрична,  $\bar{E}_A + \bar{E}_B + \bar{E}_C = 0$ .

Напряжения фаз нагрузки и генератора одинаковы:

$$\bar{U}_A = \bar{U}_a \quad \bar{U}_B = \bar{U}_b \quad \bar{U}_C = \bar{U}_c.$$

Фазные токи одинаковы по величине и совпадают по фазе со своими фазными напряжениями. Ток в нейтральном проводе отсутствует:

$$\bar{I}_N = \frac{\bar{U}_{N'N}}{Z_N} = 0.$$

В трехфазной системе, соединенной звездой, при симметричной нагрузке нейтральный провод не загружен.

На рис. 6.6 изображена векторная диаграмма трехфазной цепи для симметричной нагрузки.

**2. Нагрузка несимметричная,**  $R_A < R_B = R_C$ , но сопротивление нейтрального провода равно нулю:  $Z_N = 0$ . Напряжение смещения нейтрали:

$$\bar{U}_{N'N} = \frac{\bar{E}_A \frac{1}{R_A} + \bar{E}_B \frac{1}{R_B} + \bar{E}_C \frac{1}{R_C}}{\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} + \infty} = 0, \quad \frac{1}{Z_H} = \infty$$

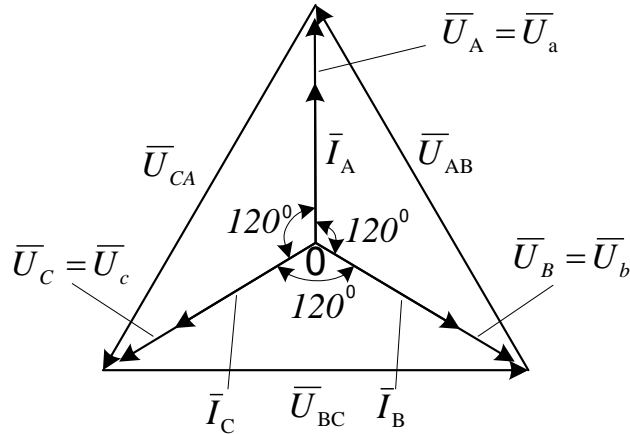


Рис.6.6

Фазные напряжения нагрузки и генератора одинаковы

$$\bar{U}_A = \bar{U}_a, \quad \bar{U}_B = \bar{U}_b, \quad \bar{U}_C = \bar{U}_c.$$

Фазные токи определяются по формулам

$$\bar{I}_A = \frac{\bar{U}_A}{R_A}, \quad \bar{I}_B = \frac{\bar{U}_B}{R_B}, \quad \bar{I}_C = \frac{\bar{U}_C}{R_C}.$$

Вектор тока в нейтральном проводе равен геометрической сумме векторов фазных токов. На рис. 6.7 приведена векторная диаграмма трехфазной цепи, соединенной звездой, с нейтральным проводом, имеющим нулевое сопротивление, нагрузкой которой являются неодинаковые по величине активные сопротивления.

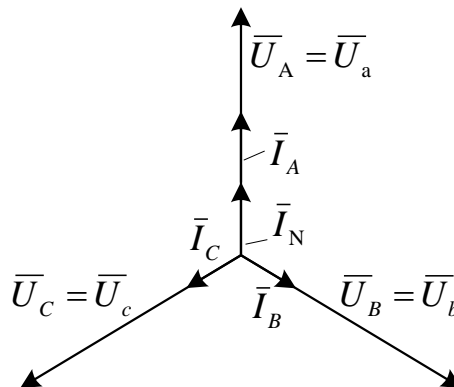


Рис. 6.7

**3. Нагрузка несимметричная,  $R_A < R_B = R_C$ , нейтральный провод отсутствует,**

$$Z_N = \infty, \quad \frac{1}{Z_N} = 0.$$

В схеме появляется напряжение смещения нейтрали, вычисляемое по формуле:

$$\bar{U}_{N'N} = \frac{\bar{E}_A \frac{1}{R_A} + \bar{E}_B \frac{1}{R_B} + \bar{E}_C \frac{1}{R_C}}{\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}}.$$

Система фазных напряжений генератора остается симметричной. Это объясняется тем, что источник трехфазных ЭДС имеет практически бесконечно большую мощность. Несимметрия нагрузки не влияет на систему напряжений генератора.

Из-за напряжения смещения нейтрали фазные напряжения нагрузки становятся неодинаковыми. Фазные напряжения генератора и нагрузки отличаются друг от друга. При отсутствии нейтрального провода геометрическая сумма фазных токов равна нулю.

На рис. 6.8 изображена векторная диаграмма трехфазной цепи с несимметричной нагрузкой и оборванным нейтральным проводом. Векторы фазных токов совпадают по направлению с векторами соответствующих фазных напряжений нагрузки. Нейтральный провод с нулевым сопротивлением в схеме с несимметричной нагрузкой выравнивает несимметрию фазных напряжений нагрузки, т.е. с включением данного нейтрального провода фазные напряжения нагрузки становятся одинаковыми.

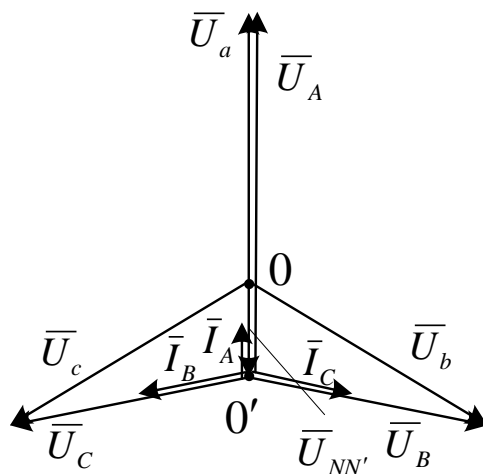


Рис. 6.8



## 6.5. МОЩНОСТЬ В ТРЕХФАЗНЫХ ЦЕПЯХ

Трехфазная цепь является обычной цепью синусоидального тока с несколькими источниками. Активная мощность трехфазной цепи равна сумме активных мощностей фаз:

$$P = P_A + P_B + P_C = U_A I_A \cos \varphi_A + U_B I_B \cos \varphi_B + U_C I_C \cos \varphi_C \quad (6.5)$$

Формула (6.5) используется для расчета активной мощности в трехфазной цепи при несимметричной нагрузке.

При симметричной нагрузке:

$$P = 3P_\Phi = 3U_\Phi I_\Phi \cos \varphi$$

При соединении в треугольник симметричной нагрузки

$$U_\Phi = U_\Delta, \quad I_\Phi = \frac{I_\Delta}{\sqrt{3}}$$

При соединении в звезду

$$U_\Phi = \frac{U_\Delta}{\sqrt{3}}, \quad I_\Phi = I_\Delta.$$

В обоих случаях

$$P = \sqrt{3} U_\Delta I_\Delta \cos \varphi.$$

## 7. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

### 7.1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

В электрических цепях возможны включения и отключения отдельных ветвей, короткие замыкания участков цепи, различного рода переключения. Любые изменения в электрических цепях можно представить в виде переключений или коммутаций. Характер коммутации указывается в схеме с помощью рубильника со стрелкой. По направлению стрелки можно судить, замыкается или размыкается рубильник.

При коммутации в цепи возникают переходные процессы, т.е. процессы перехода токов и напряжений от одного установившегося значения к другому.

Изменения токов и напряжений вызывают одновременное изменение энергии электрического и магнитного полей, связанных с элементами цепи - емкостями и индуктивностями. Однако энергия электрического поля и энергия магнитного поля могут изменяться только непрерывно, так как скачкообразное изменение потребовало бы от источника бесконечно большой мощности. На этом рассуждении основаны законы коммутации.

### ***Первый закон***

В любой ветви с индуктивностью ток не может изменяться скачком и в момент коммутации сохраняет то значение, которое он имел непосредственно перед моментом коммутации:

$$i_L(0_+) = i_L(0_-),$$

где  $i_L(0_+)$  - ток в ветви с индуктивностью в момент коммутации, сразу после коммутации. Знак "+" в формуле обычно не записывается. Время переходного процесса отсчитывается от момента коммутации;  $i_L(0_-)$  - ток в индуктивности непосредственно перед коммутацией.

### ***Второй закон***

Напряжение на емкости сразу после коммутации сохраняет то значение, которое оно имело непосредственно перед моментом коммутации:

$$u_C(0_+) = u_C(0_-),$$

где  $u_C(0_+)$  - напряжение на емкости в момент коммутации;

$u_C(0_-)$  - напряжение на емкости непосредственно перед моментом коммутации.

Допущения, применяемые при анализе переходных процессов.

1. Полагают, что переходный процесс длится бесконечно большое время.
2. Считают, что замыкание и размыкание рубильника происходит мгновенно, без образования электрической дуги.
3. Принимают, что к моменту коммутации предыдущие переходные процессы в цепи закончились.

В соответствии с классическим методом расчета, переходный ток в ветви схемы представляют в виде суммы принужденного и свободного токов:

$$i(t) = i_{\text{пр}}(t) + i_{\text{св}}(t),$$

где  $i_{\text{пр}}(t)$  - принужденный ток, определяется в установившемся режиме после коммутации. Этот ток создается внешним источником питания. Если в цепь включен источник постоянной ЭДС, принужденный ток будет постоянным, если в цепи действует источник синусоидальной ЭДС, принужденный ток изменяется по периодическому, синусоидальному закону;

$i_{\text{св}}(t)$  - свободный ток, определяется в схеме после коммутации, из которой исключен внешний источник питания. Свободный ток создается внутренними источниками питания: ЭДС самоиндукции индуктивности или напряжением заряженной емкости. Свободный ток определяют по формуле:

$$i_{\text{св}}(t) = A_1 e^{P_1 t} + A_2 e^{P_2 t} + \dots$$

Количество слагаемых в формуле равно числу реактивных элементов (индуктивностей и емкостей) в схеме.  $P_1, P_2$  - корни характеристического уравнения.  $A_1, A_2$  - постоянные интегрирования, определяются с помощью начальных условий. Начальные условия - это переходные токи и напряжения в момент коммутации, в момент времени  $t$ , равный нулю.

Начальные условия могут быть независимыми или зависимыми. Независимыми называют начальные условия, подчиняющиеся законам коммутации, законам постепенного, непрерывного изменения. Это напряжение на емкости  $u_C(0)$  и ток в ветви с индуктивностью  $i_L(0)$  в момент коммутации. Остальные начальные условия: напряжение и ток в ветви с сопротивлением  $u_R(0)$  и  $i_R(0)$ , напряжение на индуктивности  $u_L(0)$ , ток в ветви с емкостью  $i_C(0)$  - это зависимые начальные условия. Они могут изменяться скачком.

## 7.2. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЦЕПЯХ С ОДНИМ РЕАКТИВНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ

### *Короткое замыкание в R-L цепи*

На рис. 7.1 изображена электрическая цепь, в которой включен источник постоянной ЭДС. В результате коммутации рубильник замыкается и образуется замкнутый на себя R-L контур.

До коммутации по индуктивности протекал ток

$$i_L(0-) = \frac{E}{R_0 + R}.$$

Этот ток создавал постоянное магнитное поле в индуктивной катушке.

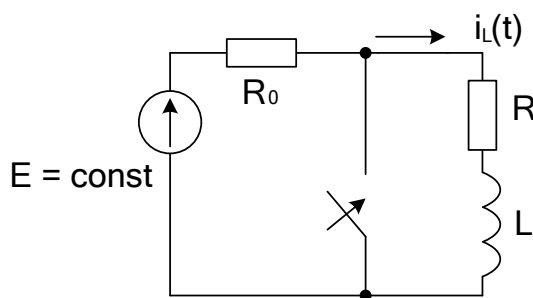


Рис. 7.1

Определим закон изменения тока в индуктивности после коммутации.

В соответствии с классическим методом

$$i_L(t) = i_{LPP} + i_{LCB}(t) = i_{LPP} + A \cdot e^{pt}.$$

Принужденный ток после коммутации замыкается через рубильник, имеющий нулевое сопротивление, и через индуктивность не протекает. Индуктивный ток имеет только свободную составляющую

$$i_{LPP} = 0, \quad i_L(t) = 0 + i_{LCB}(t) = i_{LCB}(t).$$

Магнитное поле, исчезая, индуцирует в индуктивной катушке ЭДС самоиндукции. Свободный ток в R-L контуре существует за счет этой электродвижущей силы.

Запишем уравнение для свободного тока в R-L контуре, используя второй закон Кирхгофа:

$$i_{LCB}R + L \frac{di_{LCB}}{dt} = 0. \quad (7.1)$$

Ищем решение этого уравнения в виде экспоненты

$$i_L = Ae^{pt}.$$

Производная

$$\frac{di_{LCB}}{dt} = Ape^{pt}.$$

Подставим значения свободного тока и производной тока в уравнение (7.1):

$$A \cdot R \cdot e^{pt} + L \cdot A \cdot p \cdot e^{pt} = Ae^{pt}(R + pL) = R + Lp = 0. \quad (7.2)$$

Уравнение (7.2), полученное из уравнения (7.1), называется характеристическим:

$$p = -\frac{R}{L} \text{ - корень характеристического уравнения.}$$

$$\tau = \frac{1}{|p|} = \frac{L}{R} \text{ - постоянная времени переходного процесса, измеряется в}$$

секундах.

Постоянная времени  $\tau$  - это интервал времени, за который переходный ток уменьшается в  $e$  раз:

$$i_{LCB} = Ae^{-\frac{R}{L}t} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Постоянную интегрирования  $A$  определяем с помощью начального условия.

В соответствии с первым законом коммутации,

$$i_L(0) = i_{LCB}(0) = A = i_L(0-) = \frac{E}{R_0 + R}.$$

Получим 
$$i_L(t) = i_{LCB}(t) = \frac{E}{R_0 + R} e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Напряжение на индуктивности

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = L \left( -\frac{R}{L} \right) \frac{E e^{-\frac{R}{L}t}}{R_0 + R} = -\frac{E}{R_0 + R} e^{-\frac{R}{L}t}.$$

На рис. 7.2 изображены кривые переходного тока в ветви с индуктивностью и переходного напряжения на индуктивности. Переходный ток и напряжение по экспоненте стремятся к нулю. В инженерных расчетах полагают, что через интервал времени, равный  $(4 \div 5)\tau$ , переходный процесс заканчивается.

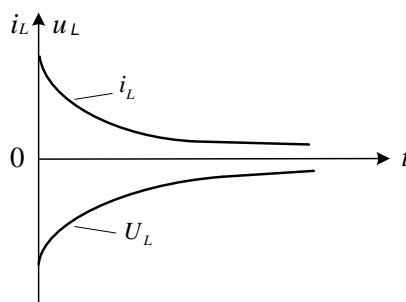


Рис. 7.2

### Подключение $R$ - $L$ цепи к источнику постоянной ЭДС

В схеме на рис. 7.3 до коммутации рубильник разомкнут. В результате коммутации рубильник замыкается и подключает  $R$ - $L$  цепь к источнику постоянной ЭДС. Определим закон изменения тока  $i(t)$ .

$$i(t) = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}(t) = i_{\text{пр}} + Ae^{pt}.$$

Принужденный ток в установившемся режиме после коммутации

$$i_{\text{пр}} = \frac{E}{R}.$$

В свободном режиме из схемы исключен внешний источник питания. Схема на рис. 7.3 без источника ЭДС ничем не отличается от схемы на рис. 7.1.

Свободный ток определяется по формуле

$$i_{\text{св}}(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t}.$$

Запишем значение переходного тока для момента коммутации,  $(t = 0)$ :

$$i(0) = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}(0) = i_{\text{пр}} + A,$$

Откуда

$$A = i(0) - i_{\text{пр}}.$$

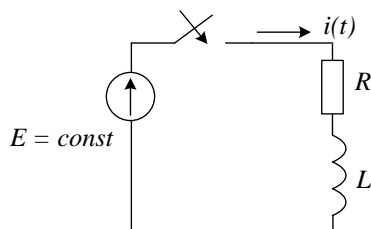


Рис. 7.3

До коммутации рубильник был разомкнут, и ток в схеме отсутствовал. Сразу после коммутации ток в индуктивности остается равным нулю:

$$i(0) = i(0-) = 0.$$

$$A = 0 - i_{\text{пр}} = -i_{\text{пр}} = -\frac{E}{R},$$

$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

Напряжение на индуктивности

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = -L \left( -\frac{R}{L} \right) \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = E e^{-\frac{R}{L}t}.$$

На рис. 7.4 изображены кривые переходного, принужденного, свободного токов и переходного напряжения на индуктивности.

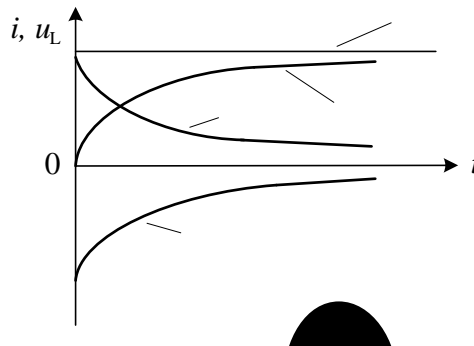


Рис. 7.4

Свободный ток и напряжение на индуктивности плавно уменьшаются до нуля. В момент коммутации свободный и принужденный токи одинаковы по абсолютной величине. Переходный ток начинается при включении с нуля, затем возрастает, приближаясь к установившемуся постоянному значению.

### ***Короткое замыкание в R-C цепи***

В схеме на рис. 7.5 в результате коммутации рубильник замыкается, и образуется замкнутый на себя R-C контур. До коммутации емкость полностью зарядилась до напряжения, равного ЭДС источника питания, то есть  $u_c(0-) = E$ . После коммутации емкость полностью разряжается, следовательно, принужденный ток в R-C цепи и принужденное напряжение на конденсаторе равны нулю.

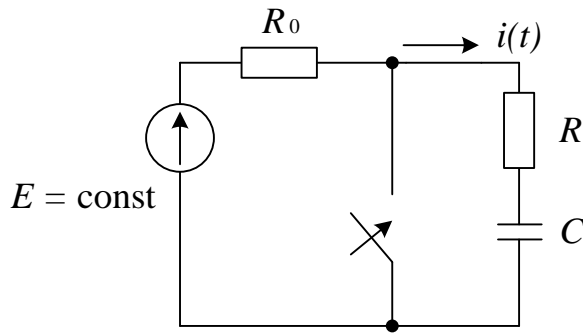


Рис. 7.5

В цепи существует только свободный ток за счет напряжения заряженного конденсатора. Запишем для  $R$ - $C$  контура уравнение по второму закону Кирхгофа

$$u_C + Ri = 0.$$

Ток через конденсатор

$$i = C \frac{du}{dt}.$$

Получим дифференциальное уравнение

$$u_C + RC \frac{du_C}{dt} = 0. \quad (7.3)$$

Решение этого уравнения  $u_{CCB} = Ae^{pt}$ .

Подставим значение свободного напряжения и производной от напряжения  $\frac{du_{CCB}}{dt} = Ape^{pt}$  в уравнение (7.3):

$$Ae^{pt} + RCpAe^{pt} = Ae^{pt}(1 + RCp) \Rightarrow 1 + RCp = 0.$$

Уравнение  $1 + RCp = 0$  называется характеристическим:

$$P = -\frac{1}{RC} \text{ - корень характеристического уравнения;}$$

$$\tau = \frac{1}{|p|} = RC \text{ - постоянная времени переходного процесса;}$$

$$u_{CCB} = Ae^{-\frac{1}{RC}t} = Ae^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$u_C(0) = u_{CCB}(0) = A = u_C(0-) = E,$$

$$A = E,$$

$$u_C = E e^{-\frac{t}{RC}},$$

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = C \left( -\frac{1}{RC} \right) E e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Переходный ток и переходное напряжение на конденсаторе по показательному закону уменьшаются до нуля (рис. 7.6).

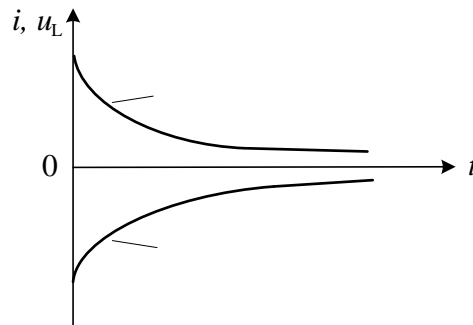


Рис. 7.6

### ***Подключение R-C цепи к источнику постоянной ЭДС***

Полагаем, что до коммутации конденсатор не заряжен, напряжение на нем  $u_C(0-) = 0$ . В результате коммутации рубильник замыкается, и конденсатор полностью заряжается (рис. 7.7). Принужденное напряжение на емкости равно ЭДС источника питания  $u_{\text{спр}} = E$ .

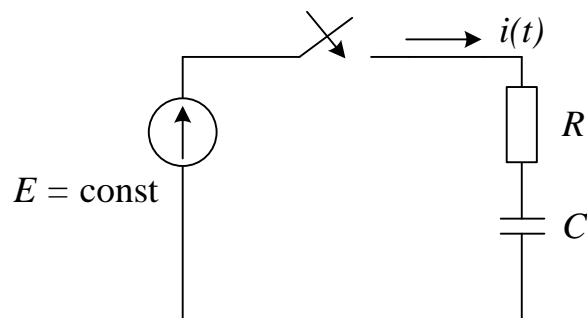


Рис. 7.7

Переходное напряжение

$$u_C(t) = u_{\text{спр}} + u_{\text{ССВ}} = u_{\text{спр}} + A e^{-\frac{t}{RC}}.$$

В момент коммутации  $u_C(0) = u_{\text{спр}} + A$ .

Постоянная интегрирования  $A = u_C - u_{\text{спр}}$ .



В соответствии со вторым законом коммутации

$$u_C(0) = u_C(0-) = 0, \quad A = 0 - u_{\text{СПР}} = -u_{\text{СПП}} = -E.$$

Переходное напряжение

$$u_C(t) = E - Ee^{-\frac{t}{RC}} = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right).$$

Переходный ток

$$i = C \frac{du_C}{dt} = C\left(-\frac{1}{RC}\right)Ee^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Кривые напряжений и тока изображены на рис. 7.8.

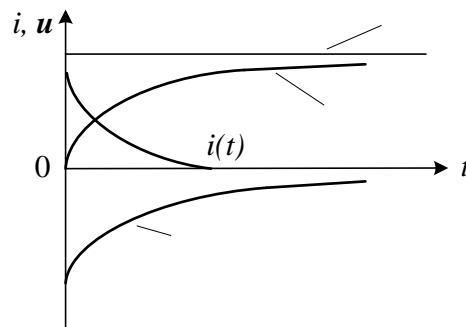


Рис. 7.8

### 7.3. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЦЕПЯХ С ДВУМЯ РЕАКТИВНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

При последовательном соединении сопротивления  $R$ , катушки индуктивности  $L$  и конденсатора  $C$  образуется электрический  $R$ - $L$ - $C$  контур (рис. 7.9).

Дифференциальное уравнение для тока в контуре

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = E.$$

После дифференцирования по  $t$  и деления на  $L$  получим

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0. \quad (7.4)$$

Решение уравнения (7.4) равно сумме принужденной и свободной составляющих  $i = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}$ .

В нашем случае принужденная составляющая переходного тока равна нулю, так как в схеме имеется емкость, являющаяся разрывом цепи для постоянного тока.

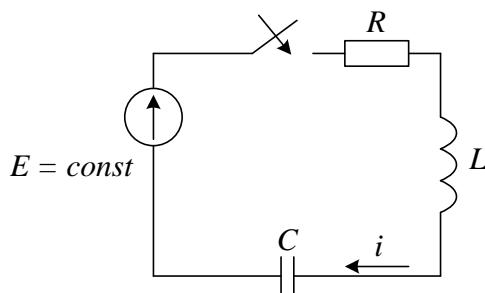


Рис. 7.9

Свободная составляющая является общим решением уравнения

$$\frac{d^2 i_{CB}}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di_{CB}}{dt} + \frac{1}{LC} i_{CB} = 0. \quad (7.5)$$

Пусть  $i_{CB} = 1$ ,  $\frac{di_{CB}}{dt} = p$ ,  $\frac{d^2 i_{CB}}{dt^2} = p^2$ .

После подстановки этих выражений в уравнение (7.5) получим характеристическое уравнение

$$p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC} = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет два корня

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2},$$

где  $\alpha = \frac{R}{2L}$  - коэффициент затухания;

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  - угловая резонансная частота контура без потерь.

Получим:

$$i = i_{CB} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

Вид корней зависит от отношения:

$$\frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{R}{2\sqrt{L/C}} = \frac{R}{2\rho} = \frac{1}{2Q},$$

где  $\rho = \sqrt{L/C}$  - характеристическое или волновое сопротивление контура;

$Q = \rho/R$  - добротность контура.

### Колебательный режим

Наиболее важен часто встречающийся случай, когда корни  $P_{1,2}$  - комплексные сопряженные с отрицательной вещественной частью, свободная составляющая имеет вид затухающих колебаний. В этом случае

$$\alpha < \omega_0, \quad R < 2\rho, \quad Q > \frac{1}{2}, \quad p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_{\text{CB}},$$

где  $\omega_{\text{CB}} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$  - угловая частота собственных колебаний в контуре;

$T_{\text{CB}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{CB}}}$  - период собственных колебаний.

Ток в цепи

$$i_{\text{CB}} = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega_{\text{CB}} t + \varphi), \quad (7.6)$$

где  $A$  и  $\varphi$  - постоянные интегрирования.

До коммутации ток в индуктивности равен нулю, сразу после коммутации остается равным нулю

$$i(0) = i_{\text{CB}}(0) = i(0-) = 0.$$

Чтобы определить две постоянные интегрирования, необходимо иметь два начальных условия и составить два уравнения. Напряжение на индуктивности

$$u_L = L \frac{di_{\text{CB}}}{dt} = L \frac{d}{dt} [Ae^{-\alpha t} \sin(\omega_{\text{CB}} t + \varphi)] = LA(-\alpha)e^{-\alpha t} \sin(\omega_{\text{CB}} t + \varphi) + L\omega_{\text{CB}} Ae^{-\alpha t} \cos(\omega_{\text{CB}} t + \varphi). \quad (7.7)$$

где  $u_L(0)$  - напряжение на индуктивности в момент коммутации, является зависимым начальным условием. Составим уравнение по второму закону Кирхгофа для момента коммутации, чтобы определить зависимое начальное условие  $u_L(0)$ .

$$E = i(0)R + u_C(0) + u_L(0).$$

До коммутации конденсатор был не заряжен, поэтому

$$u_C(0) = u_C(0-) = 0 \quad u_L(0) = E.$$

Подставляя в (7.6) и (7.7)  $t = 0$  и используя независимое и зависимое начальные условия, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} A \sin \varphi = 0 \\ LA(-\alpha) \sin \varphi + LA\omega_{\text{CB}} \cos \varphi = E \end{cases} \quad (7.8)$$

Решив систему (7.8), определим

$$\varphi = 0, \quad A = \frac{E}{L\omega_c},$$

$$i(t) = \frac{E}{L\omega_c} e^{-\alpha t} \sin \omega_c t.$$

На рис. 7.10 приведена кривая изменения тока в контуре при подключении к нему источника постоянной ЭДС. Из рисунка видно, что колебания в контуре затухают по показательному закону из-за потерь электрической энергии в сопротивлении  $R$ . Затухание происходит тем медленнее, чем меньше коэффициент затухания  $\alpha$ .

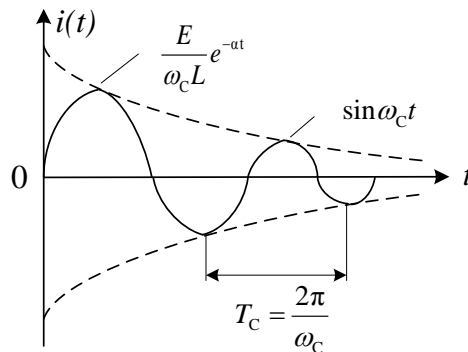


Рис. 7.10

Постоянная времени переходного процесса  $\tau = \frac{1}{|\alpha|} = \frac{2L}{R}$ .

При малом коэффициенте затухания величина  $\omega_c$  незначительно отличается от резонансной частоты  $\omega_0$ .

Относительное затухание колебаний характеризуется декрементом затухания, представляющим отношение мгновенных значений тока через один период:

$$\Delta = \frac{e^{-\alpha t} \sin \omega_c t}{e^{-\alpha(t+T)} \sin \omega_c (t+T_{CB})} = e^{\alpha T_c}.$$

Натуральный логарифм этого оператора носит название логарифмического декремента затухания

$$\ln \Delta = \alpha T_c.$$

Для контура с небольшим затуханием, когда  $\omega_{CB} \approx \omega_0$

$$\ln \Delta \approx \frac{2\pi\alpha}{\omega_0} = \frac{\pi}{Q}$$

Апериодический режим в  $R-L-C$  контуре наблюдается при большом затухании, когда  $\alpha > \omega_0$ ,  $Q < \frac{1}{2}$ ,  $R > 2\rho$ . В этом случае корни  $p_{1,2}$  вещественные, отрицательные, различные.

Свободный ток определяется по формуле

$$i_{\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (7.9)$$

Напряжение на индуктивности

$$u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{di_{\text{св}}}{dt} = LA_1 p_1 e^{p_1 t} + LA_2 p_2 e^{p_2 t}. \quad (7.10)$$

Подставив в уравнение (7.9) и (7.10)  $t = 0$  и используя независимое и зависимое условия, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 0, \\ A_1 p_1 + A_2 p_2 &= \frac{E}{L}. \end{aligned}$$

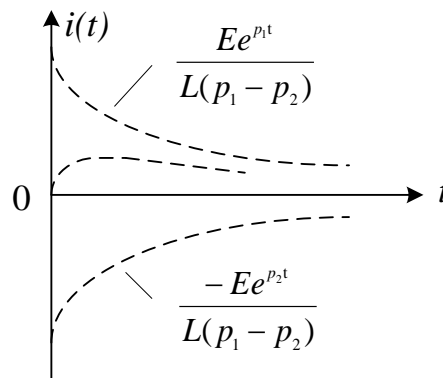
Решив эту систему, определим постоянные интегрирования

$$A_1 = -A_2 = \frac{E}{L(p_1 - p_2)}.$$

Выражение для тока в контуре

$$i = i_{\text{св}} = \frac{E}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t})$$

состоит из положительной, медленно затухающей экспоненты с коэффициентом затухания  $p_1$  и отрицательной, быстро затухающей экспоненты  $p_2$  (рис. 7.11).



**Рис. 7.11**

Ток получается неколебательным, он не принимает отрицательных значений, то есть не меняет своего направления. На границе между колебательным и апериодическим режимом при  $\alpha = \omega_0$ ,  $Q = \frac{1}{2}$ ,  $R = 2\rho$  наблюдается предельный случай апериодического процесса.

## 8. МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ

### 8.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Как известно из курса физики, вокруг проводника с током появляется магнитное поле. Интенсивность магнитного поля характеризуется векторной величиной: напряженностью магнитного поля  $\vec{H}$ , измеряемой в амперах на метр (А/м). Интенсивность магнитного поля характеризуется также вектором магнитной индукции  $\vec{B}$ , измеряемой в теслах (Тл). Напряженность магнитного поля не зависит, а магнитная индукция зависит от свойств окружающей среды.

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}) = \mu_a \vec{H} = \mu_0 \mu \vec{H},$$

где  $\mu_0$  - абсолютная магнитная проницаемость  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м.,

$\mu$  - относительное значение магнитной проницаемости, безразмерная величина.

В зависимости от величины относительной магнитной проницаемости, все вещества делятся на три группы.

К первой группе относятся диамагнетики: вещества, у которых  $\mu < 1$ .

Ко второй группе относятся парамагнетики, вещества с  $\mu > 1$ .

К третьей группе относятся ферромагнетики, вещества с  $\mu \gg 1$ .

К ферромагнетикам принадлежат железо, никель, кобальт и многие сплавы из неферромагнитных веществ.

Магнитной цепью называется совокупность устройств, содержащих ферромагнитные вещества. Процессы в магнитных цепях описываются с помощью понятий магнитодвижущей силы, магнитного потока.

Магнитным потоком называется поток вектора магнитной индукции через поверхность  $S$ :

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}.$$

Магнитный поток измеряется в веберах (Вб).

Источником магнитодвижущей силы является либо постоянный магнит, либо электромагнит (катушка, обтекаемая током).

Магнитодвижущая сила электромагнита

$$F = IW,$$

где  $I$  - ток, протекающий в катушке;

$W$  - число витков катушки.

В магнитных цепях используется свойство ферромагнитного материала тысячекратно усиливать магнитное поле катушки с током за счет собственной намагниченности.

## 8.2. СВОЙСТВА ФЕРРОМАГНИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Поместим ферромагнитный материал внутри катушки с током. Сначала, с увеличением напряженности намагничивающего поля, магнитная индукция быстро возрастает. Затем, из-за насыщения материала, при дальнейшем увеличении напряженности магнитного поля магнитная индукция почти не меняется. При уменьшении напряженности намагничивающего поля кривая размагничивания не совпадает с кривой намагничивания из-за явления гистерезиса. Явление гистерезиса заключается в том, что изменение магнитной индукции запаздывает от изменения намагничивающего поля. Кривая зависимости  $B(H)$ , получающаяся при циклическом перемагничивании ферромагнитного материала, называется петлей гистерезиса. Эта кривая изображена на рис. 8.1. Чем больше площадь петли, тем больше потери на перемагничивание, нагревающие материал. Значение магнитной индукции при напряженности намагничивающего поля, равном нулю, называется остаточной магнитной индукцией  $B_r$ , или остаточной намагниченностью. Напряженность магнитного поля  $H_c$  при  $B=0$  называется коэрцитивной силой. Ферромагнитные материалы с большим значением коэрцитивной силы ( $H_c > 4000 \frac{A}{M}$ ) называются магнитотвердыми. Из этих материалов изготавливают постоянные магниты. Ферромагнитные материалы с малым значением коэрцитивной силы ( $H_c < 200 \frac{A}{M}$ ) называются магнитомягкими.

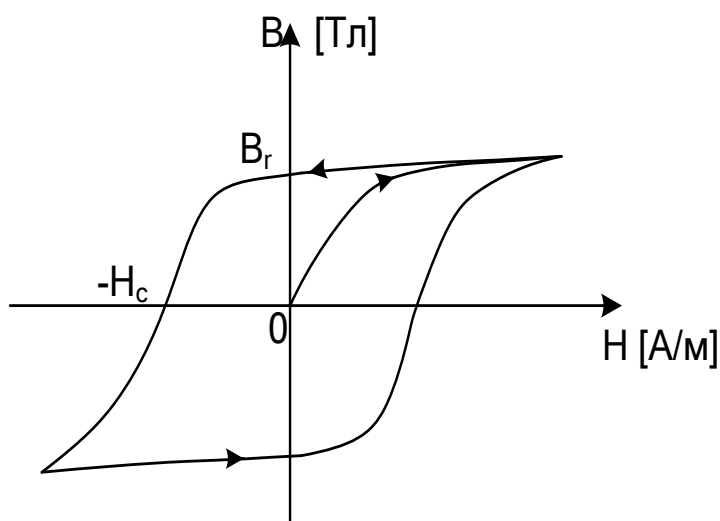


Рис. 8.1

Эти материалы используют в магнитопроводах электрических машин и трансформаторов. Таким образом, зависимости  $B = f(H)$  у ферромагнитных материалов нелинейные. Эти зависимости приводятся в справочниках в табличной форме или в виде кривых, называемых кривыми намагничивания.

### 8.3. РАСЧЕТ МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ

Основным законом, используемым при расчетах магнитных цепей, является закон полного тока.

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \sum I. \quad (8.1)$$

Он формулируется следующим образом: линейный интеграл вектора напряженности магнитного поля по замкнутому контуру равен алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром. Если контур интегрирования охватывает катушку с числом витков  $W$ , через которую протекает ток  $I$ , то алгебраическая сумма токов  $\sum I = IW = F$ , где  $F$  - магнитодвижущая сила.

Обычно контур интегрирования выбирают таким образом, чтобы он совпадал с силовой линией магнитного поля, тогда векторное произведение в формуле (8.1) можно заменить произведением скалярных величин  $Hdl$ . В практических расчетах интеграл  $\oint Hdl$  заменяют суммой  $\sum H_k l_k$  и выбирают отдельные участки магнитной цепи таким образом, чтобы  $H_1, H_2, \dots$  вдоль этих участков можно было считать приблизительно постоянными. Получим:

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 + \dots + H_n l_n = \sum IW = F, \quad (8.2)$$

где  $l_1, l_2, \dots, l_n$  - длины участков магнитной цепи;  
 $H_1 l_1, H_2 l_2$  - магнитные напряжения участков цепи.

Магнитным сопротивлением участка магнитной цепи называется отношение магнитного напряжения рассматриваемого участка к магнитному потоку в этом участке

$$R_M = \frac{Hl}{\Phi} = \frac{Hl}{H\mu_a S} = \frac{l}{\mu_0 \mu_a S},$$

где  $S$  - площадь поперечного сечения участка магнитной цепи,  
 $l$  - длина участка,  $\mu_a$  абсолютная магнитная проницаемость.

Рассмотрим расчет магнитной цепи, изображенной на рис. 8.2. Ферромагнитный магнитопровод имеет одинаковую площадь поперечного сечения  $S$ .

$l_{cp}$  - длина средней силовой линии магнитного поля в магнитопроводе;  
 $\delta$  - толщина воздушного зазора.

На магнитопроводе размещена обмотка, по которой протекает ток  $I$ .

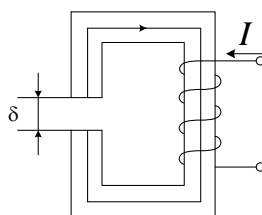


Рис. 8.2



Прямая задача расчета магнитной цепи заключается в том, что задан магнитный поток  $\Phi$  и требуется определить магнитодвижущую силу  $F$ . Определим магнитную индукцию в магнитопроводе

$$B = \frac{\Phi}{S}.$$

По кривой намагничивания найдем значение напряженности магнитного поля  $H$ , соответствующее величине  $B$ .

Напряженность магнитного поля в воздушном зазоре

$$H_1 = \frac{B}{\mu_0} = \frac{B}{4\pi 10^{-7}}.$$

Магнитодвижущая сила обмотки

$$F = Hl_{cp} + H_1\delta.$$

При обратной задаче расчета магнитной цепи по заданному значению магнитодвижущей силы требуется определить магнитный поток. Расчет такой задачи выполняется с помощью магнитной характеристики цепи  $F = f(\Phi)$ .

Для построения такой характеристики необходимо задаться несколькими значениями  $\Phi$  и найти соответствующие значения  $F$ . С помощью магнитной характеристики по заданной магнитодвижущей силе определяется магнитный поток.

## 9. ОПИСАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

### ЗАДАНИЯ И ВАРИАНТЫ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

#### *Требования к оформлению*

1. Контрольная работа оформляется в отдельной тетради или в компьютерном варианте с указанием фамилии и инициалов, группы и шифра автора, а также номера работы.
2. На каждой странице оставляются поля шириной не менее 3 см.
3. Текст, формулы и числовые выкладки вписывают четко и аккуратно.
4. Электрические схемы вычерчивают с помощью инструментов с соблюдением ГОСТов (можно пользоваться графическими изображениями элементов схем, которые применены в приведенных далее задачах).
5. При числовых расчетах придерживаются определенного порядка: искомую величину выражают формулой, затем подставляют известные значения величин в численном виде, записывают результаты расчета и единицы измерения. Промежуточные расчеты, если они сравнительно невелики, можно опускать. Расчеты рекомендуется выполнять до трех значащих цифр после запятой

6. Графики и диаграммы вычерчиваются аккуратно, с помощью чертежных инструментов, желательно на миллиметровой бумаге. Оси координат вычерчивают сплошными линиями со стрелками на конце, масштабы шкал по осям выбирают равномерными, **начиная с нуля**, с использованием всей площади графика. Цифры шкал наносят слева от оси ординат и под осью абсцисс. Буквенное обозначение шкалы и единицу измерения пишут над числами шкалы ординат и под осью абсцисс, справа вместо последнего числа шкалы.
7. В конце контрольной работы ставят дату ее выполнения и подпись.
8. Если контрольная работа не зачтена или зачтена при условии внесения исправлений, то все необходимые поправки делают в конце работы в разделе "Работа над ошибками". Нельзя вносить исправления в текст, расчеты или графики, проверенные преподавателем.

### ***Правило выбора варианта***

Вариант контрольной работы и номера вопросов выбираются по двум последним цифрам шифра студента согласно специальности обучающегося по таблице 1.

### ***Указания по решению задач***

*Задачи по общей электротехнике и электронике весьма разнообразны и не представляется возможным предложить единую методику их решения. Ниже приводятся лишь общие рекомендации.*

1. Уяснить содержание задачи, изобразить ее электрическую схему согласно указанному номеру рисунка, выписать заданные и искомые величины из таблицы заданий.
2. Проанализировать схему электрической цепи: выяснить возможности ее упрощения и наглядного изображения, уяснить, сколько ветвей, узлов и независимых контуров она содержит.
3. Разметить схему, т.е. все ее узлы согласно принятым в литературе обозначениям, показать заданные и принятые направления ЭДС, напряжений и токов. Индексы токов в ветвях рекомендуется выбирать такими же, как индексы у элементов данной ветви.
4. Решение задачи обязательно сопровождать пояснительным текстом, т.е. указывать законы, на основании которых составлены уравнения, а также необходимыми формулами и диаграммами с расшифровкой принятых символьных обозначений. При решении задач будет очень полезно ознакомиться с учебной литературой [1,2].
5. Во избежание ошибок при числовых расчетах все значения величин подставлять в формулу в основных единицах СИ (В, А, Ом и т.д.), для чего все производные единицы следует перевести в основные, например:  $1\text{кВ} = 10^3\text{В}$ ,  $1\text{мкФ} = 10^{-6}\text{Ф}$ ,  $1\text{мГн} = 10^{-3}\text{Гн}$  и т.д.

## 9.1. ЗАДАЧА ЭЦ-1. РАСЧЕТ ЛИНЕЙНОЙ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Вариант контрольной работы и номера вопросов выбираются по двум последним цифрам шифра студента согласно специальности обучающегося по таблице 9.1.

Таблица 9.1

Последняя цифра шифра	Предпоследняя цифра шифра									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Разомкнут К1, К2 и К3 замкнуты				Разомкнут К2, К1 и К3 замкнуты			Разомкнут К3, К1 и К2 замкнуты		
<b>0</b>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	Рис.	9.30	9.20	9.29	9.28	9.1	9.3	9.4	9.11	9.12
<b>1</b>	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1
	20	11	12	13	14	15	16	17	18	19
	29	30	21	22	23	24	25	26	27	28
	Рис.	9.28	9.27	9.26	9.25	9.5	9.6	9.7	9.14	9.15
<b>2</b>	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2
	19	20	11	12	13	14	15	16	17	18
	27	28	29	30	21	23	24	25	26	27
	Рис.	9.25	9.24	9.23	9.22	9.8	9.9	9.10	9.17	9.18
<b>3</b>	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3
	18	19	20	11	12	13	14	15	16	17
	25	26	27	28	29	30	21	22	23	24
	Рис.	9.1	9.21	9.20	9.19	9.16	9.27	9.30	9.29	9.28
<b>4</b>	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4
	17	18	19	20	11	12	13	14	15	16
	23	24	25	26	27	28	29	30	21	22
	Рис.	9.29	9.18	9.17	9.16	9.3	9.28	9.27	9.26	9.25
<b>5</b>	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5
	15	16	17	18	19	20	11	12	13	14
	28	29	30	21	22	23	24	25	26	27
	Рис.	9.16	9.15	9.14	9.13	9.26	9.25	9.24	9.23	9.5
<b>6</b>	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6
	14	15	16	17	18	19	20	11	12	13
	28	29	30	21	22	23	24	25	26	27
	Рис.	9.13	9.12	9.11	9.10	9.23	9.22	9.21	9.1	9.2
<b>7</b>	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7
	13	14	15	16	17	18	19	20	11	12
	24	25	26	27	28	29	30	21	22	23
	Рис.	9.2	9.8	9.7	9.3	9.19	9.18	9.17	9.4	9.1
<b>8</b>	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8
	12	13	14	15	16	17	18	19	20	11
	24	25	26	27	28	29	30	21	22	23
	Рис.	9.10	9.8	9.4	9.6	9.19	9.18	9.17	9.9	9.11
<b>9</b>	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	28	27	26	25	24	23	22	21	30	29
	Рис.	9.6	9.3	9.2	9.4	9.16	9.15	9.14	9.21	9.23

Параметры схемы первой задачи, номер рисунка которой указан в таблице вариантов (табл. 9.1), приведены в табл. 9.2.

ЭДС и сопротивления задаются в единицах системы СИ (В, Ом).

Задание

1. Определить токи в ветвях схемы с помощью законов Кирхгофа.
2. Определить токи в ветвях схемы методом контурных токов.
3. Определить показания вольтметра.
4. Составить уравнение баланса мощностей и проверить его подстановкой числовых значений.

Таблица 9.2

Параметр	Последняя цифра шифра									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$E_1$	34	10	15	40	50	25	16	30	24	12
$E_2$	12	25	30	25	70	-12	8	12	6	20
$E_3$	24	-12	8	10	18	8	-24	16	-6	8
$E_4$	-40	15	-10	40	32	10	32	-30	15	12
$E_5$	34	30	18	-20	40	15	20	15	-20	-6
$E_6$	18	32	16	15	-24	50	14	8	12	30
	Предпоследняя цифра шифра									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$R_{01}$	1	2	5	4	2	1	3	3	4	5
$R_{02}$	2	3	1	5	4	3	5	4	2	1
$R_1$	17	21	41	30	19	15	20	10	17	12
$R_2$	31	15	32	20	35	19	15	7	32	15
$R_3$	23	42	15	47	45	27	32	18	15	8
$R_4$	51	33	20	38	27	40	50	22	40	31
$R_5$	32	18	10	51	31	52	17	20	71	54
$R_6$	40	35	16	17	25	35	23	34	16	70

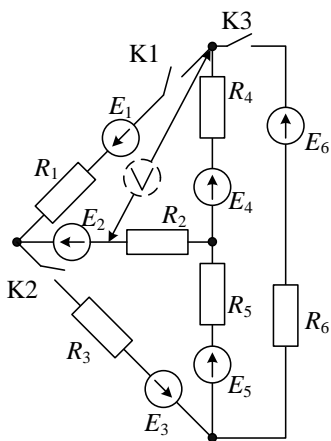


Рис.9.1.

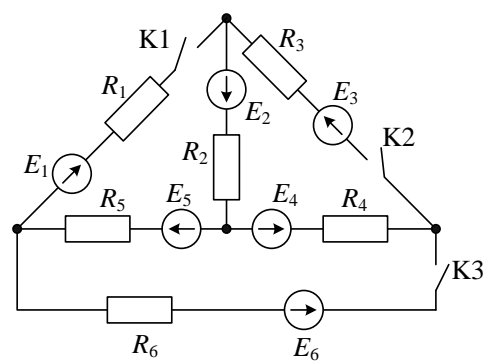


Рис.9.2

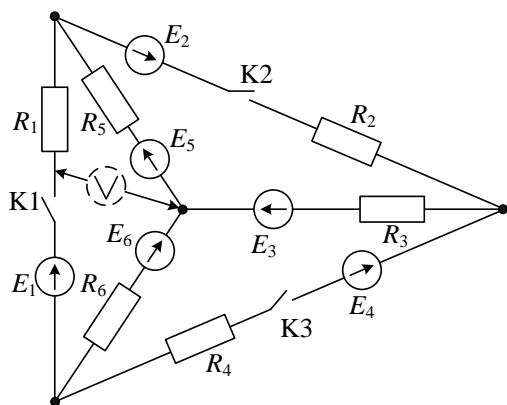


Рис.9.3

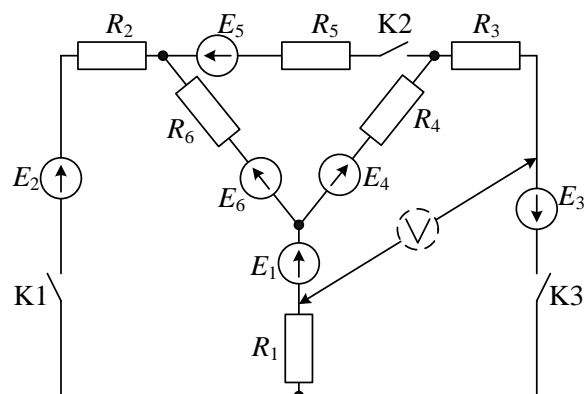


Рис.9.4

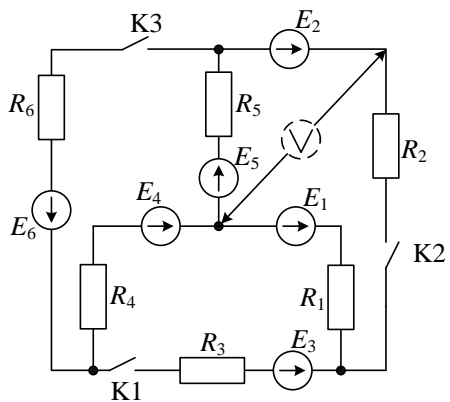


Рис.9.5

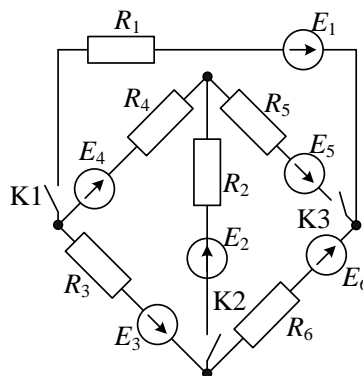


Рис.9.6

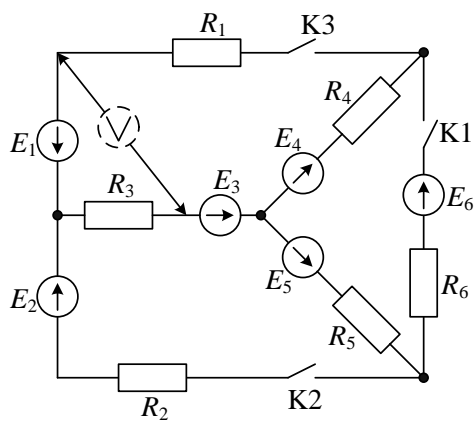


Рис.9.7

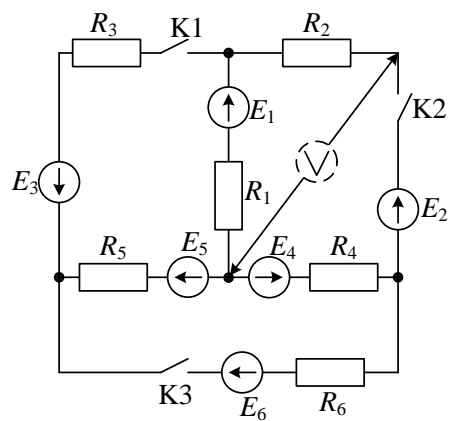


Рис.9.8

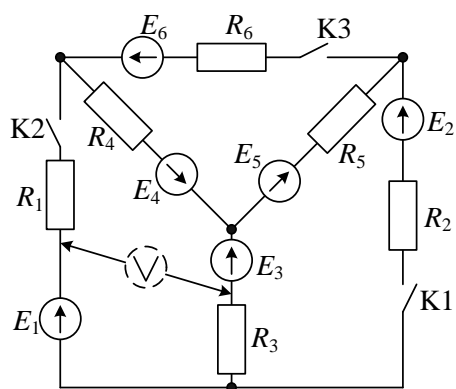


Рис. 9.9

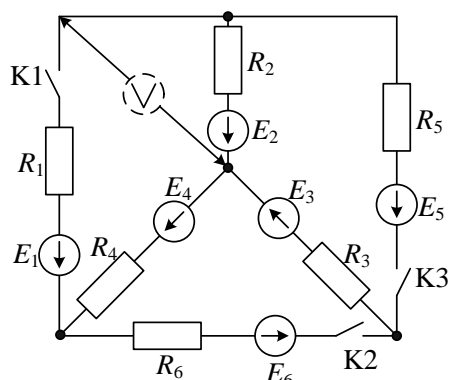


Рис. 9.10

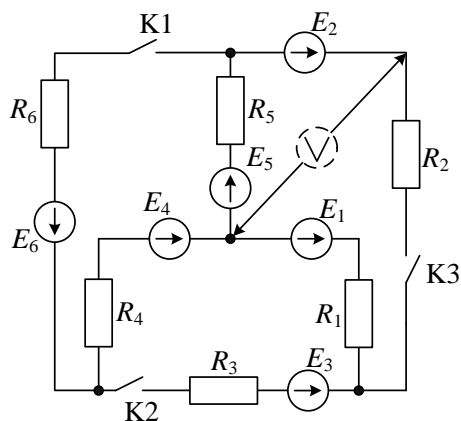


Рис. 9.11

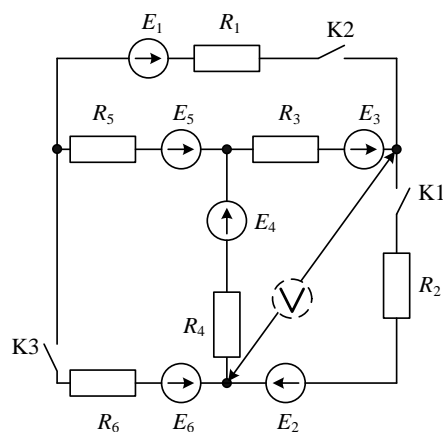


Рис. 9.12

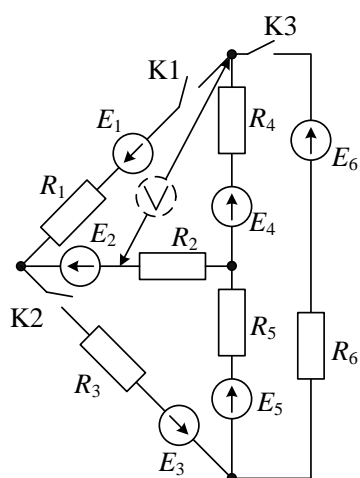


Рис. 9.13

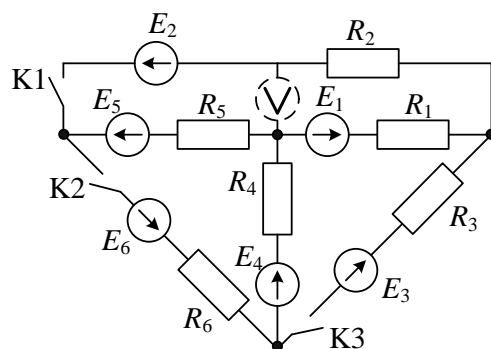


Рис. 9.14

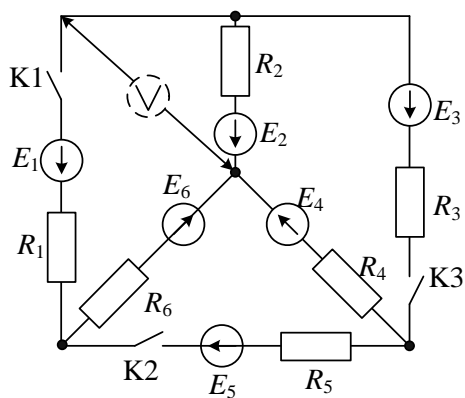


Рис. 9.15

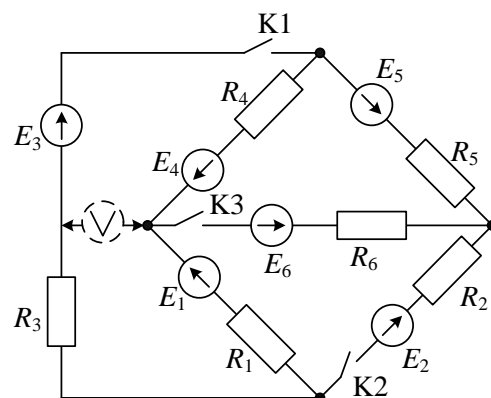


Рис. 9.16

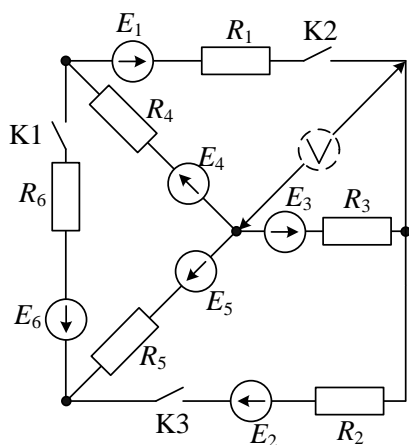


Рис. 9.17

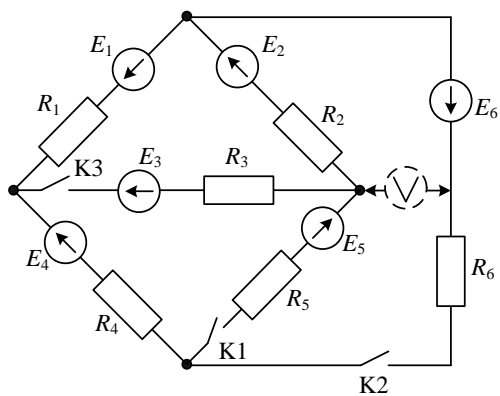


Рис. 9.19

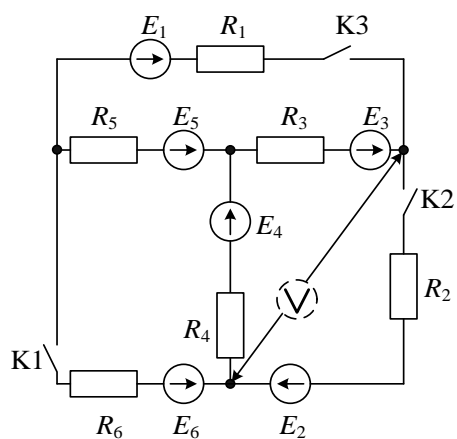


Рис. 9.21

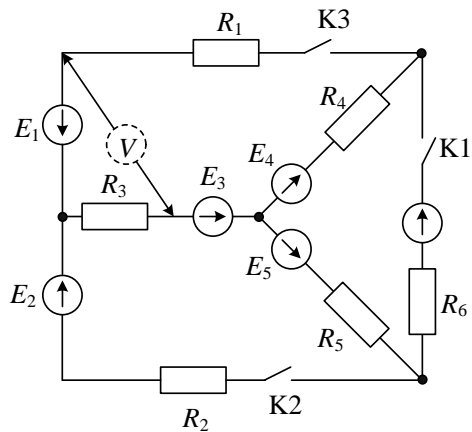


Рис. 9.23

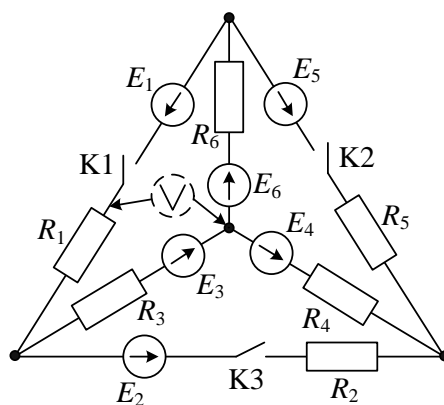


Рис. 9.18

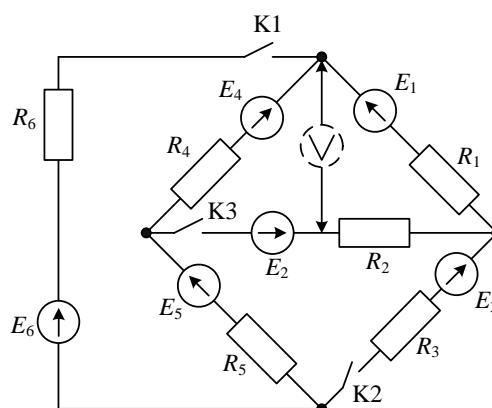


Рис. 9.20

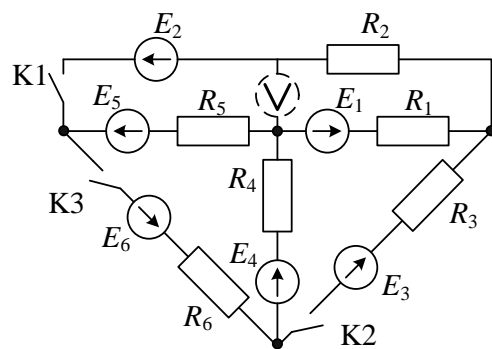


Рис. 9.22

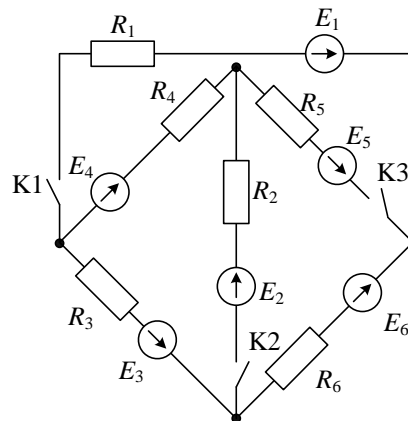


Рис. 9.24

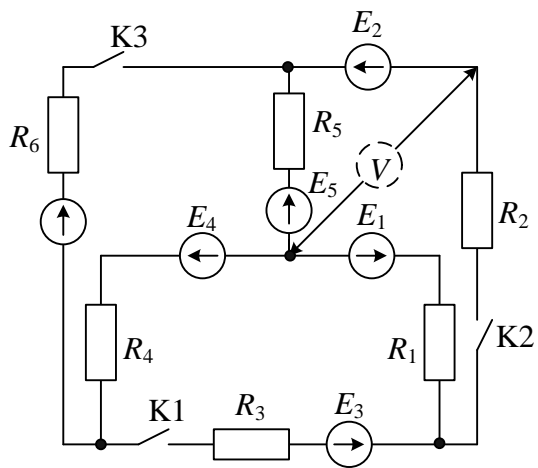


Рис. 9.25

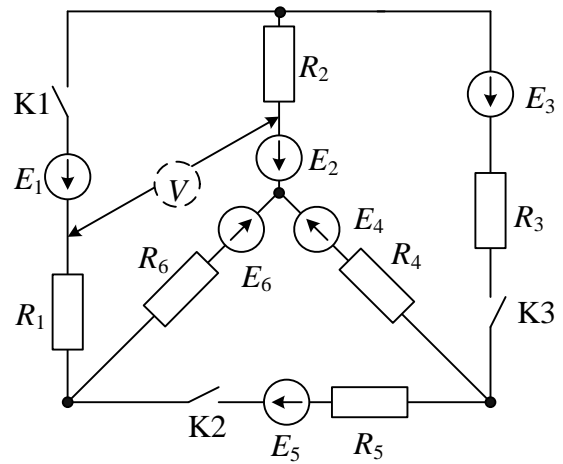


Рис. 9.26

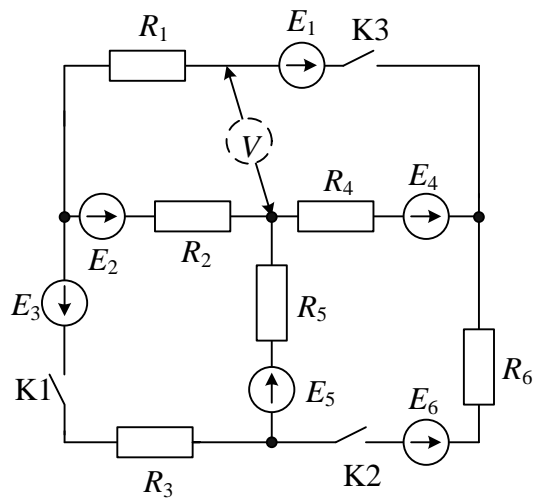


Рис. 9.27

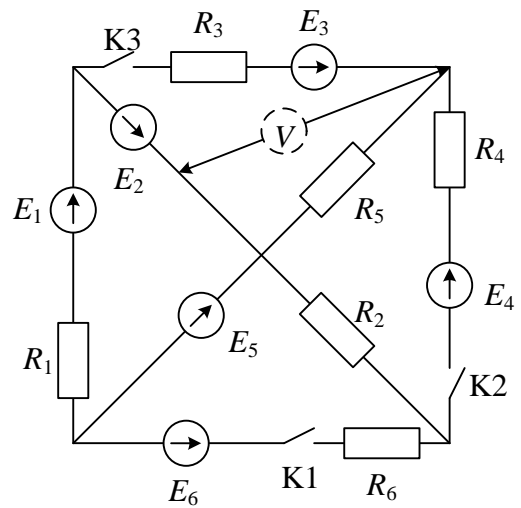


Рис. 9.28

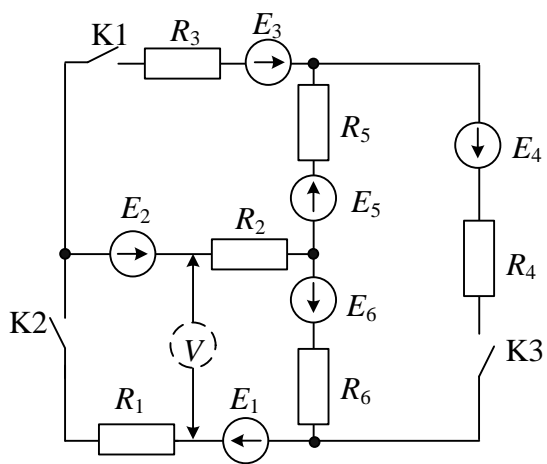


Рис. 9.29

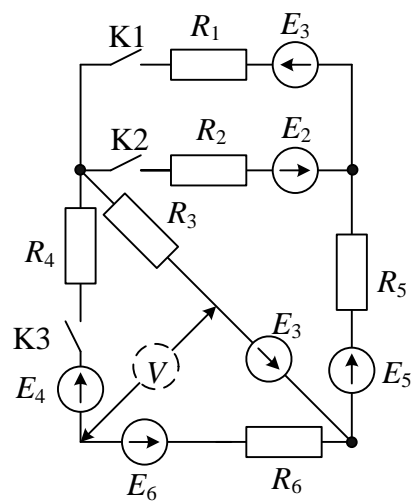


Рис. 9.30



## Пример выполнения контрольной работы Э.Ц.-1

Задача Э.Ц.-1 Расчет линейной электрической цепи постоянного тока

### Задание

1. Определить токи в ветвях схемы с помощью законов Кирхгофа.
2. Определить токи в ветвях схемы методом контурных токов.
3. Определить показания вольтметра.
4. Составить уравнение баланса мощностей и проверить его подстановкой числовых значений.

ORIGIN := 1

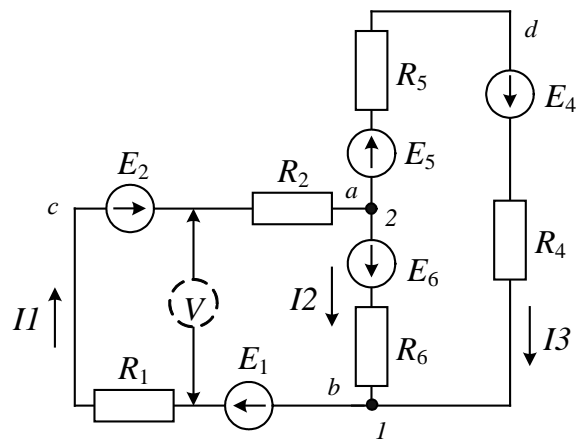
R01 := 4

$R := \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 47 \\ 38 \\ 51 \\ 17 \end{pmatrix}$

n := 1..6

R02 := 5

$E := \begin{pmatrix} 34 \\ 12 \\ 24 \\ -40 \\ 34 \\ 18 \end{pmatrix}$



### Расчет по законам Кирхгофа

Запишем уравнения по законам Кирхгофа для схемы. Для этого обозначим направления токов всех ветвей. Схема содержит два узла и два контура, следовательно, по законам Кирхгофа будет три уравнения.

Given

узел 1

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

контур abc

$$I_1 \cdot (R_2 + R_{02} + R_1 + R_{01}) + I_2 \cdot R_6 = E_1 + E_2 + E_6$$

контур adb

$$-I_2 \cdot R_6 + I_3 \cdot (R_4 + R_5) = E_4 + E_5 - E_6$$

Решение данной системы уравнений определит токи:

$$\text{Find}(I_1, I_2, I_3) \text{ float}, 4 \rightarrow \begin{pmatrix} 0.8209 \\ 0.9157 \\ -0.09476 \end{pmatrix}$$

$I_1 := .8209$

$I_2 := .9157$

$I_3 := -9.476 \cdot 10^{-2}$

### Расчет по методу контурных токов

При расчете по методу контурных токов необходимо определить собственные и взаимные сопротивления двух контуров, а также контурные ЭДС.

Собственное сопротивление первого контура:

$$R_{11} := R_1 + R_{01} + R_6 + R_2 + R_{02}$$

Собственное сопротивление второго контура:

$$R_{22} := R_4 + R_5 + R_6$$

Взаимное сопротивление контуров:

$$R_{12} := -R_6 \quad R_{21} := R_{12}$$

Контурные ЭДС:

$$E_{11} := E_1 + E_2 + E_6$$

$$E_{22} := E_4 + E_5 - E_6$$

Система, подготовленная для метода контурных токов:

Given

$$I_{1k} \cdot R_{11} + I_{2k} \cdot R_{12} = E_{11}$$

$$I_{1k} \cdot R_{21} + I_{2k} \cdot R_{22} = E_{22}$$

Решение данной системы определит контурные токи:

$$\text{Find}(I_{1k}, I_{2k}) \text{ float}, 4 \rightarrow \begin{pmatrix} 0.8209 \\ -0.09476 \end{pmatrix}$$

$$I_{1k} := .8209$$

$$I_{2k} := -9.476 \cdot 10^{-2}$$

Реальные токи цепи найдем по выражениям:

$$I_1 := I_{1k} \quad I_1 = 0.821$$

$$I_2 := I_{1k} - I_{2k} \quad I_2 = 0.916$$

$$I_3 := I_{2k} \quad I_3 = -0.095$$

Результаты вычислений по методу контурных токов и по законам

Кирхгофа совпали.

### Определение показаний вольтметра

Для определения показаний вольтметра необходимо составить уравнение по закону Кирхгофа для участка цепи:

$$U_v := E_2 - I_1 \cdot R_1$$

$$U_v = -12.627$$

### Баланс мощностей

Определим мощность источников:

$$P_{ict} := I_1 \cdot (E_1 + E_2) + I_2 \cdot E_6 + I_3 \cdot (E_4 + E_5) \quad P_{ict} = 54.812$$

Определим мощность приемников

$$P_{pr} := I_1^2 \cdot (R_1 + R_{01} + R_2 + R_{02}) + I_2^2 \cdot R_6 + I_3^2 \cdot (R_4 + R_5) \quad P_{pr} = 54.811$$

$$P_{ict} - P_{pr} = 5.715 \times 10^{-4} \quad , \quad \text{следовательно, баланс мощностей выполняется}$$

## 9.2. ЗАДАЧА ЭЦ-2. РАСЧЕТ ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

В цепи рис. 9.31...9.50 активные и реактивные сопротивления ветвей соответственно обозначены  $R$ ,  $L$ ,  $C$  с соответствующими индексами. При заданной ЭДС определить показания амперметра (электромагнитной системы) и ваттметра. Расчёты параметров выполнить с использованием комплексных чисел удобным для вас методом. Данные для расчёта приведены в табл. 9.3, 9.4, 9.5 (при отсутствии в цепи элемента его данные не учитывать).

Таблица 9.3

Номера рисунков схем расчета

Предпоследняя цифра шифра	Последняя цифра шифра									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	9.31	9.32	9.33	9.34	9.35	9.36	9.37	9.38	9.39	9.40
1	9.41	9.42	9.43	9.44	9.45	9.46	9.47	9.48	9.49	9.50
2	9.50	9.31	9.32	9.33	9.34	9.35	9.36	9.37	9.38	9.39
3	9.40	9.41	9.42	9.43	9.44	9.45	9.46	9.47	9.48	9.49
4	9.49	9.50	9.31	9.32	9.33	9.34	9.35	9.36	9.37	9.38
5	9.39	9.40	9.41	9.42	9.43	9.44	9.45	9.46	9.47	9.48
6	9.35	9.36	9.37	9.38	9.39	9.40	9.41	9.42	9.43	9.44
7	9.45	9.46	9.47	9.48	9.49	9.50	9.31	9.32	9.33	9.34
8	9.31	9.32	9.33	9.34	9.35	9.36	9.37	9.38	9.39	9.40
9	9.41	9.42	9.43	9.44	9.45	9.46	9.47	9.48	9.49	9.50

Таблица 9.4

Параметр	Последняя цифра шифра									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Амплитуда $E_{1m}$ , В	36	220	56	380	127	24	110	440	600	500
Амплитуда $E_{2m}$ , В	24	400	127	220	56	560	380	200	440	100
Амплитуда $E_{3m}$ , В	127	150	220	64	36	200	44	560	380	110
Начальная фаза $\varphi_1^\circ$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{13}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$
Начальная фаза $\varphi_2^\circ$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{6\pi}{5}$	$\frac{7\pi}{6}$
Начальная фаза $\varphi_3^\circ$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{6\pi}{5}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Сопротивление $R_1$ , Ом	20	25	30	35	40	10	45	15	16	17
Сопротивление $R_2$ , Ом	35	20	60	50	10	15	25	17	15	30
Сопротивление $R_3$ , Ом	30	15	20	25	17	17	35	40	10	45

Таблица 9.5

Параметр	Предпоследняя цифра шифра									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Емкость $C_1$ , мкФ	600	318	200	50	50	65	65	75	40	25
Емкость $C_2$ , мкФ	500	106	130	150	40	100	30	50	60	30
Емкость $C_3$ , мкФ	400	212	70	100	60	35	85	25	30	20
Частота сети $f$ , Гц	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250
Индуктивность $L_1$ , мГн	0,8	0,1	0,065	0,05	0,04	0,035	0,025	0,03	0,03	0,02
Индуктивность $L_2$ , мГн	0,1	0,05	0,07	0,045	0,035	0,03	0,03	0,035	0,025	0,015
Индуктивность $L_3$ , мГн	0,12	0,07	0,05	0,04	0,03	0,025	0,035	0,025	0,02	0,01

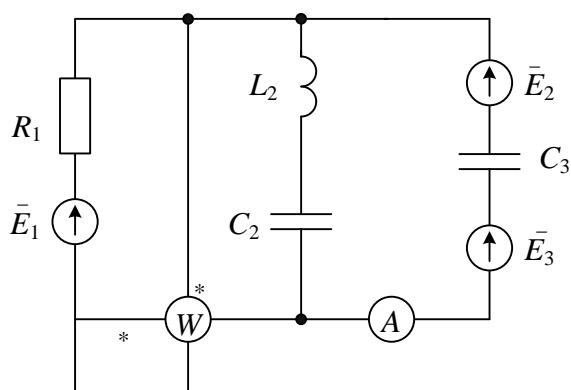


Рис. 9.31

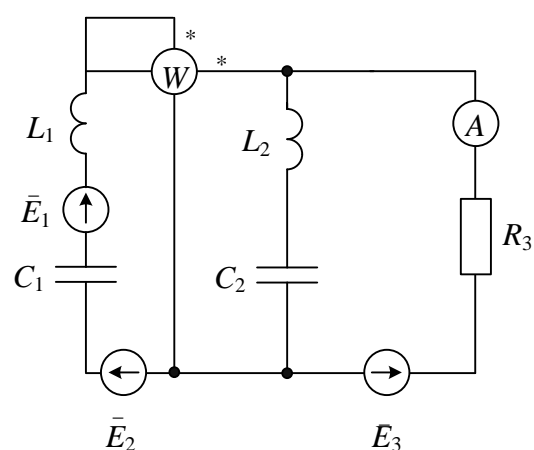


Рис. 9.32

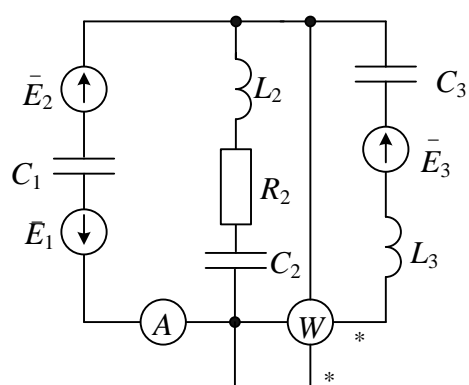


Рис. 9.33

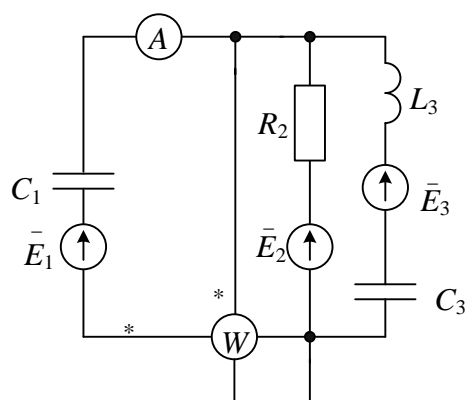
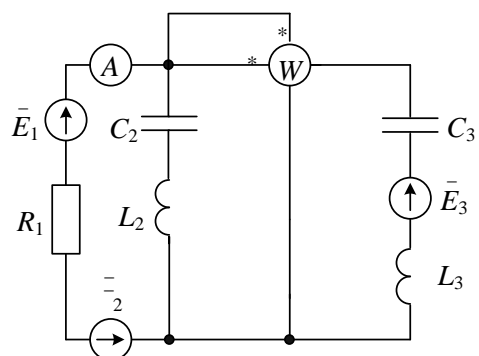
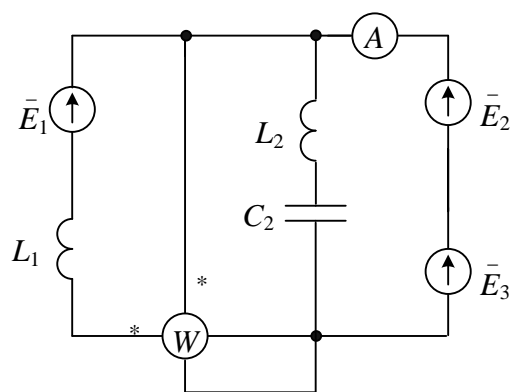
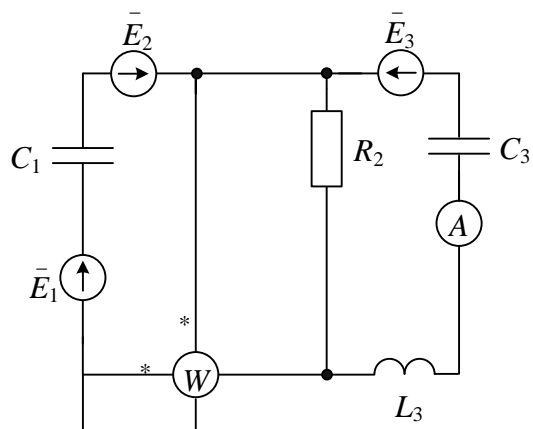
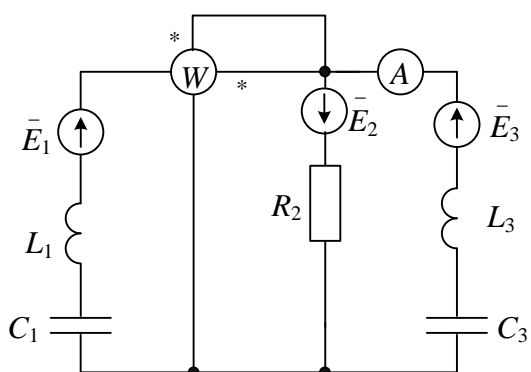
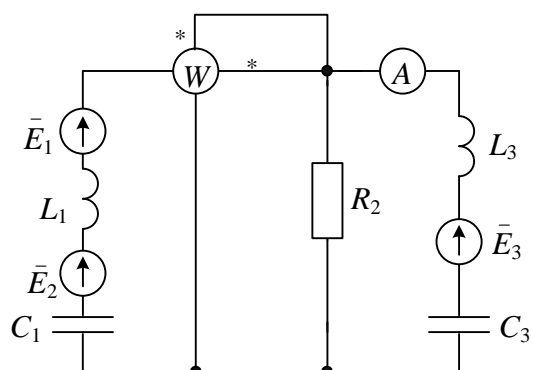
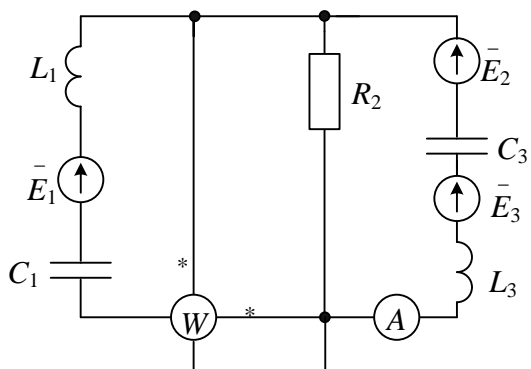
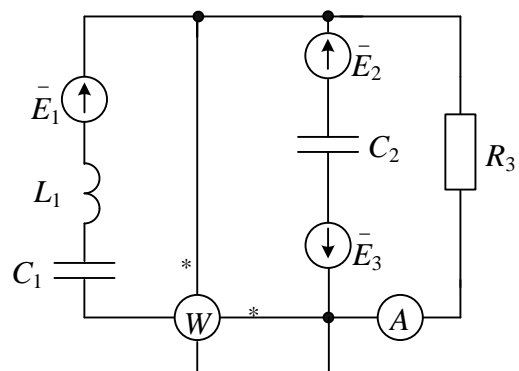
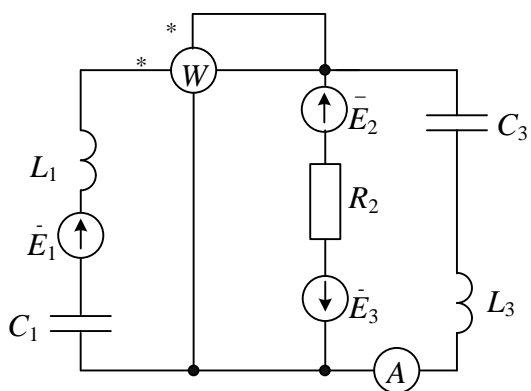


Рис. 9.34



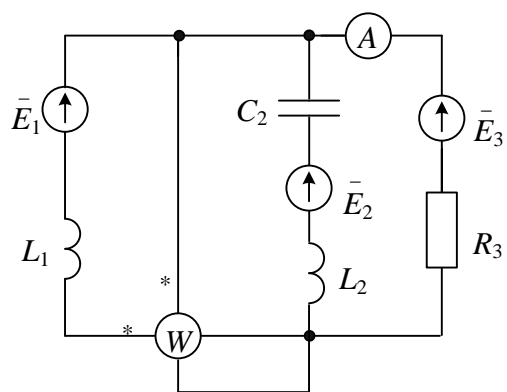


Рис. 9.43

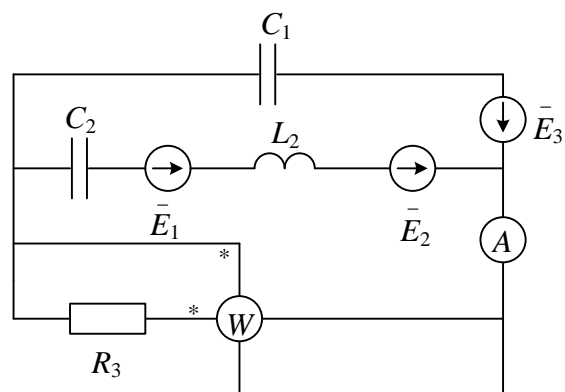


Рис. 9.44

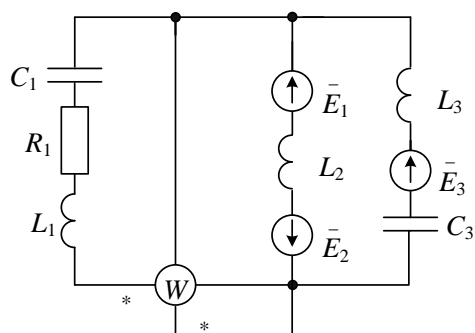


Рис. 9.45

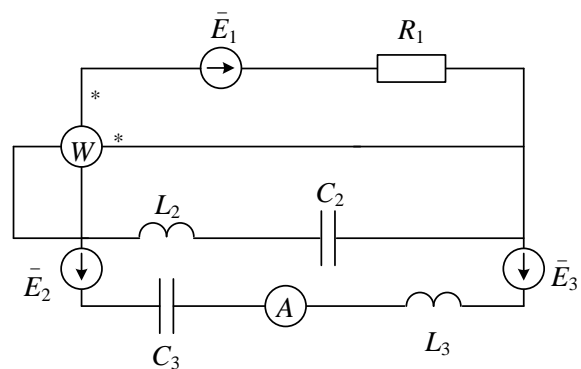


Рис. 9.46

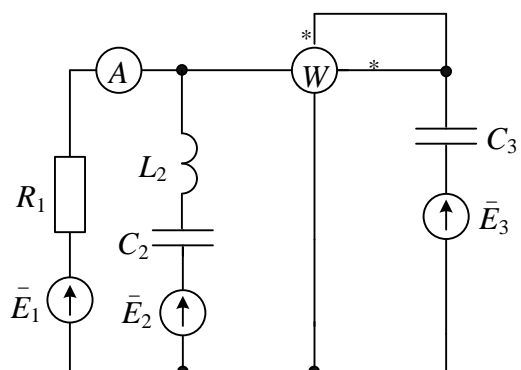


Рис. 9.47

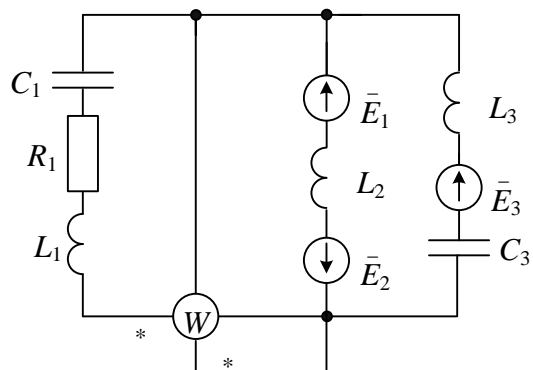


Рис. 9.48

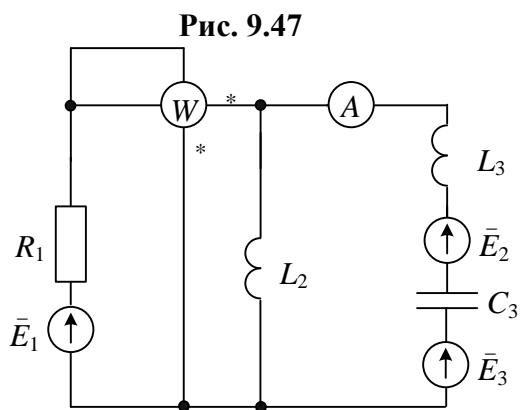


Рис. 9.49

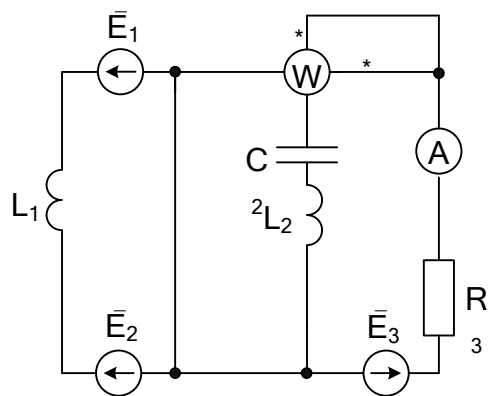


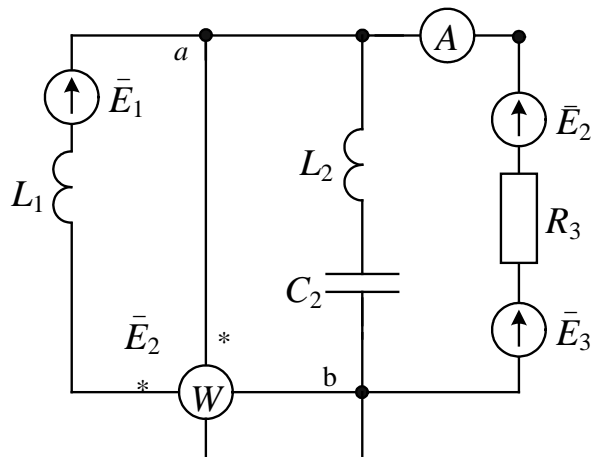
Рис. 9.50

## Пример выполнения контрольной работы Э.Ц.-2

Задача Э.Ц.-2. Расчет цепи синусоидального тока

### Задание

При заданной ЭДС определить показания амперметра (электромагнитной системы) и ваттметра. Расчет параметров выполнить с использованием комплексных чисел.



Задаем номер первого элемента ORIGIN := 1 и размеры массивов  $n := 1..3$

Активные

Индуктивности, Гн

Емкости, Ф

сопротивления, Ом

$$Z_3 := 35$$

$$R_3 := 35$$

$$L := \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.045 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C := \begin{pmatrix} 10^{200} \\ 150 \cdot 10^{-6} \\ 10^{200} \end{pmatrix}$$

Частота

$$f := 75 \text{ Гц}$$

Круговая частота

$$\omega := 2 \cdot \pi \cdot f \quad \omega = 471.239$$

Амплитуды (В) и фазы источников ЭДС (радианы)

$$Em := \begin{pmatrix} 36 \\ 24 \\ 127 \end{pmatrix}$$

$$\phi := \begin{pmatrix} \frac{\pi}{18} \\ \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi \cdot 7}{6} \end{pmatrix}$$

Для определения показаний приборов необходимо найти токи ветвей.

Проведем расчет с использованием законов Кирхгофа в комплексной форме.

### Расчет по законам Кирхгофа

Введем мнимую единицу:

$$j := \sqrt{-1}$$

Реактивные сопротивления элементов:

$$XL_n := \omega \cdot L_n \quad XC_n := \frac{1}{\omega \cdot C_n}$$

Комплексные амплитуды источников ЭДС :

$$E1 := Em_1 \cdot e^{j \cdot \phi_1}$$

$$E1 = 35.453 + 6.251j$$

$$E2 := Em_2 \cdot e^{j \cdot \phi_2}$$

$$E2 = 24j$$

$$E3 := Em_3 \cdot e^{j \cdot \phi_3}$$

$$E3 = -109.985 - 63.5j$$

Комплексные сопротивления ветвей:

$$Z := j \cdot (XL - XC) \quad Z_3 := 35$$

Матрица комплексных сопротивлений ветвей:

$$Z = \begin{pmatrix} 23.562j \\ 7.059j \\ 35 \end{pmatrix}$$

Система уравнений по законам Кирхгофа в матричной форме записи

$$MI := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ Z_1 & -Z_2 & 0 \\ 0 & Z_2 & Z_3 \end{pmatrix}$$

$$E := \begin{pmatrix} 0 \\ E1 \\ -E2 - E3 \end{pmatrix}$$

$$I := MI^{-1} \cdot E$$

$$\text{Вектор столбец искомых токов: } I = \begin{pmatrix} 1.005 - 1.012j \\ 2.469 + 1.643j \\ 3.474 + 0.631j \end{pmatrix}$$

Напряжения

$$UR_n := R_n \cdot I_n$$

$$UL_n := (j \cdot I)_n \cdot XL_n$$

$$UC_n := (-j \cdot I)_n \cdot XC_n$$

$$UC_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 23.245 - 34.927j \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$UL_n = \begin{pmatrix} 23.855 + 23.678j \\ -34.843 + 52.354j \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$UC_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 23.245 - 34.927j \\ 0 \end{pmatrix}$$

Показания амперметра электромагнитной системы будут равны модулю действующему значению тока в соответствующей ветви

$$Pa := \frac{|I_3|}{\sqrt{2}}$$

$$Pa = 2.497$$

Показания ваттметра совпадают со значением активной мощности выделяемой на измеряемом участке цепи. Определим активную мощность Р через полную S.

Определим напряжение между узлами схемы:

$$Uab := E1 - UL_1$$

$$Uab = 11.598 - 17.427j$$

$$S := \overline{I_1} \cdot Uab$$

$$S = 29.299 - 5.771j$$

Следовательно показания ваттметра

$$Pvt := |\operatorname{Re}(S)|$$

$$Pvt = 29.299$$



### 9.3. ЗАДАЧА ЭЦ-3. РАСЧЕТ ТРЕХФАЗНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

В трехфазную сеть включены однофазные приемники, которые образуют симметричную и несимметричную нагрузки. Данные приемников приведены в табл. 9.6, 9.7

Задание:

1. Составить расчетную схему включения приемников.
2. Составить схему включения ваттметров для измерения активной мощности
3. Определить линейные токи.
4. Построить векторные диаграммы электрического состояния цепи.
5. Определить потребляемую полную, активную и реактивную мощности приемников.

Таблица 9.6

Параметр	Предпоследняя цифра шифра									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\underline{U}_A$ фазы, В	690	400	230	130	80	56	100	170	290	500
Схема источника	Y	$\Delta$	Y	$\Delta$	$\Delta$	Y	$\Delta$	Y	Y	$\Delta$
$R_a$ , Ом	10	25	40	15	30	50	20	35	45	30
$R_b$ , Ом	15	30	45	20	35	40	10	25	50	20
$R_c$ , Ом	20	35	50	10	25	45	15	30	40	50

Таблица 9.7

Параметр	Последняя цифра шифра									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\cos \varphi_{2a}$	15°	30°	10°	16°	45°	25°	18°	12°	20°	35°
$\cos \varphi_{2b}$	20°	35°	12°	18°	40°	10°	15°	25°	30°	45°
$\cos \varphi_{2c}$	25°	40°	14°	20°	35°	16°	10°	45°	18°	30°
Схема	Y-o	Y	Y-o	Y	$\Delta$	Y-o	$\Delta$	Y	Y-o	$\Delta$
$\Psi_0$	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{6}$	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{2}$

#### Примечания

1. При соединении потребителя по схеме «звезда с нулем» (Y-o) принять наличие нулевой точки у источника соединенного «звездой» (Y).
2. В вариантах, где источник питания соединен  $\Delta$ , при наличии нулевой точки в нагрузке принять соединение источника (Y-o) не меняя ЭДС фаз.
3. В табл 9.7  $\Psi_0$  – начальная фаза исходного напряжения.

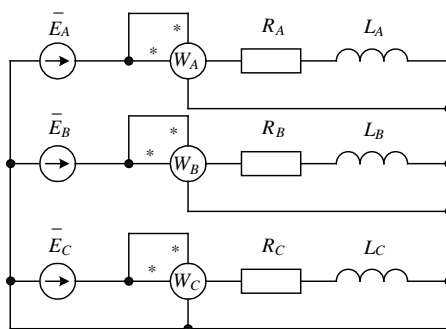
## Пример выполнения контрольной работы Э.Ц.-3

### Задача Э.Ц.-3 Расчет трехфазной цепи.

В трехфазную сеть включены однофазные приемники, которые образуют симметричную и несимметричную нагрузки.

#### Задание

1. Составить расчетную схему включения приемников.
2. Составить схему включения ваттметров для измерения активной мощности.
3. определить линейные токи.
4. Построить векторные диаграммы электрического состояния цепи.
5. Определить потребляемую полную, активную и реактивную мощности приемников.



Задаем общее амплитудное значение фазных ЭДС генератора положив, что  $E_{mA} = E_{mB} = E_{mC}$

$$E_m := 130 \quad \psi_A := 0$$

Активные сопротивления фаз

$$R_A := 15 \quad R_B := 20 \quad R_C := 10$$

Углы сдвига между фазными напряжениями и токами

$$\phi_a := 15 \quad \phi_b := 20 \quad \phi_c := 25$$

Или в радианах

$$\phi_a := \frac{\pi \cdot \phi_a}{180} \quad \phi_b := \frac{\pi \cdot \phi_b}{180} \quad \phi_c := \frac{\pi \cdot \phi_c}{180}$$

$$\phi_a = 0.262 \quad \phi_b = 0.349 \quad \phi_c = 0.436$$

Определим полные сопротивления фаз нагрузки

$$Z_a := \frac{R_A}{\cos(\phi_a)} \quad Z_b := \frac{R_B}{\cos(\phi_b)} \quad Z_c := \frac{R_C}{\cos(\phi_c)}$$

$$Z_a = 15.529 \quad Z_b = 21.284 \quad Z_c = 11.034$$

В комплексной форме записи

$$Z_A := Z_a \cdot e^{j \cdot \phi_a}$$

$$Z_B := Z_b \cdot e^{j \cdot \phi_b}$$

$$Z_C := Z_c \cdot e^{j \cdot \phi_c}$$

$$Z_A = 15 + 4.019i$$

$$Z_B = 20 + 7.279i$$

$$Z_C = 10 + 4.663i$$

Записываем комплексы фазных и линейных напряжений генератора

Фазные значения

$$E_A := \frac{E_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j \cdot \Psi_A} \quad |E_A| = 91.924 \quad \Psi_A \rightarrow 0$$

$$E_B := \frac{E_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j \cdot \left( \Psi_A - 2 \cdot \frac{\pi}{3} \right)} \quad |E_B| = 91.924 \quad \Psi_B := \Psi_A - 2 \cdot \frac{\pi}{3} \rightarrow -\frac{2 \cdot \pi}{3}$$

$$E_C := \frac{E_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j \cdot \left( \Psi_A + 2 \cdot \frac{\pi}{3} \right)} \quad |E_C| = 91.924 \quad \Psi_C := \Psi_A + 2 \cdot \frac{\pi}{3} \rightarrow \frac{2 \cdot \pi}{3}$$

Линейные значения  $U_\Lambda := E_m \sqrt{3}$

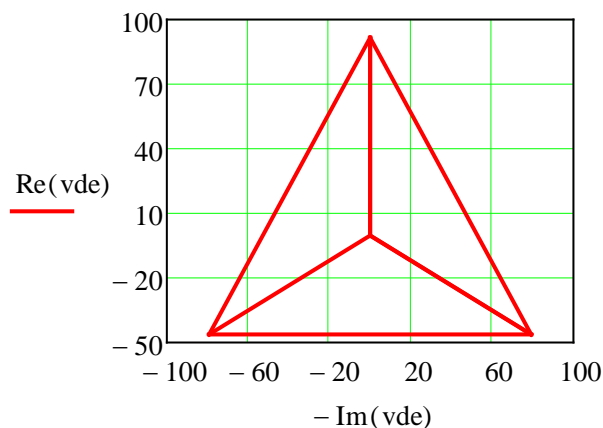
$$U_{AB} := \frac{U_\Lambda}{\sqrt{2}} \cdot e^{j \cdot \left( \Psi_A + \frac{\pi}{6} \right)} \quad |U_{AB}| = 159.217 \quad \Psi_{AB} := \Psi_A + \frac{\pi}{6} \rightarrow \frac{\pi}{6}$$

$$U_{BC} := \frac{U_\Lambda}{\sqrt{2}} \cdot e^{j \cdot \left( \Psi_A - \frac{\pi}{2} \right)} \quad |U_{BC}| = 159.217 \quad \Psi_{BC} := \Psi_A - \frac{\pi}{2} \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

$$U_{CA} := \frac{U_\Lambda}{\sqrt{2}} \cdot e^{j \cdot \left( \Psi_A + \frac{5 \cdot \pi}{6} \right)} \quad |U_{CA}| = 159.217 \quad \Psi_{CA} := \Psi_A + \frac{5 \cdot \pi}{6}$$

Задаем матрицу-вектор для построения векторной диаграммы фазных и линейных напряжений генератора

$$VDE := \begin{pmatrix} 0 & E_A & 0 & E_B & 0 & E_C & E_A & E_B & E_C \end{pmatrix} \quad vde := VDE^T$$



**Векторная диаграмма фазных и линейных напряжений генератора**

Полагая, что трехфазная система имеет нулевой провод, рассчитываем: фазные напряжения на нагрузке  $U_{An}$ ,  $U_{Bn}$ ,  $U_{Cn}$ ; токи в фазах нагрузки  $I_A$ ,  $I_B$ ,  $I_C$  (они равны соответствующим линейным) и ток в нулевом проводе  $I_N$ .

$$U_{An} := E_A$$

$$U_{Bn} := E_B$$

$$U_{Cn} := E_C$$

$$U_{An} = 91.924$$

$$U_{Bn} = -45.962 - 79.608i$$

$$U_{Cn} = -45.962 + 79.608i$$

Токи в фазах нагрузки равны

$$I_A := \frac{U_{An}}{Z_A}$$

$$I_B := \frac{U_{Bn}}{Z_B}$$

$$I_C := \frac{U_{Cn}}{Z_C}$$

$$I_A = 5.718 - 1.532i$$

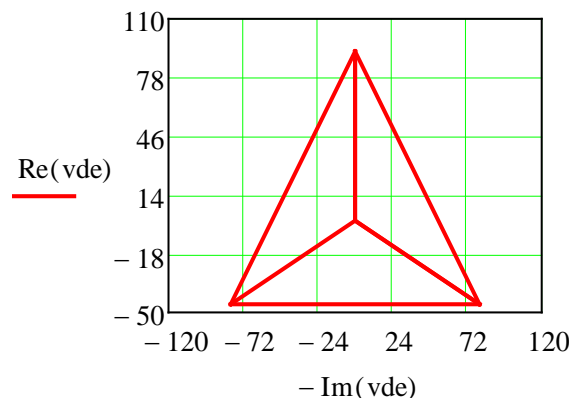
$$I_B = -3.309 - 2.776i$$

$$I_C = -0.726 + 8.299i$$

$$I_N := I_A + I_B + I_C$$

$$I_N = 1.683 + 3.991i$$

Векторные диаграммы фазных напряжений на генераторе и на нагрузке совпадают.

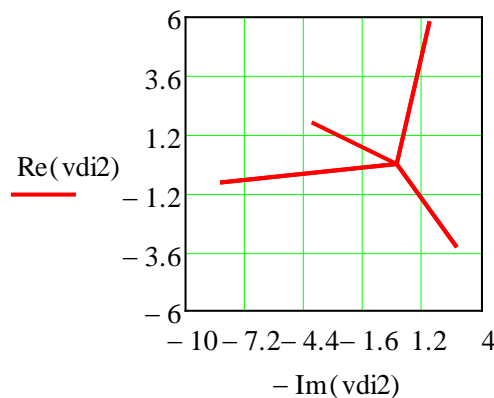


**Векторная диаграмма фазных и линейных напряжений на нагрузке**

Задаем матрицу-вектор для построения векторной диаграммы фазных токов

$$VDi2 := \begin{pmatrix} 0 & I_A & 0 & I_B & 0 & I_C & 0 & I_N \end{pmatrix}$$

$$vdi2 := VDi2^T$$



**Векторная диаграмма фазных токов**

$$P := |U_{An}| \cdot |I_A| \cdot \cos(\phi_a) + |U_{Bn}| \cdot |I_B| \cdot \cos(\phi_b) + |U_{Cn}| \cdot |I_C| \cdot \cos(\phi_c) \quad P = 1.593 \times 10^3$$

$$Q := |U_{An}| \cdot |I_A| \cdot \sin(\phi_a) + |U_{Bn}| \cdot |I_B| \cdot \sin(\phi_b) + |U_{Cn}| \cdot |I_C| \cdot \sin(\phi_c) \quad Q = 600.276$$

Задаем формулу для вычисления полной мощности нагрузки

$$S_{\text{w}} := \sqrt{P^2 + Q^2} \quad S = 1.702 \times 10^3$$

## 10. КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

### ПЕРЕЧЕНЬ КОНТРОЛЬНЫХ ВОПРОСОВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

1. Линейные элементы электрических цепей постоянного тока и их характеристики. Генерирующие, приемные и вспомогательные устройства. Режимы работы генерирующих устройств.
2. Схемы замещения генерирующих и приемных устройств и их характеристики.
3. Топологические компоненты электрических схем. Ветвь, узел, контур, двухполюсник, четырехполюсник.
4. Основные законы электрических цепей - законы Кирхгофа. Алгоритм составления уравнений по первому и второму законам Кирхгофа.
5. Метод двух узлов. Метод контурных токов.
6. Частичный анализ электрических цепей. Метод эквивалентного генератора.
7. Способы изображения и характеристики синусоидальных токов, напряжений и ЭДС.
8. Действующие и средние значения синусоидальных величин.
9. Идеализированные  $R$ -,  $L$ -,  $C$ -элементы в цепи синусоидального тока. Их параметры и характеристики. Векторные диаграммы.
10. Последовательное соединение  $R$ -,  $L$ -,  $C$ -элементов. Понятие полного и полного комплексного сопротивления.
11. Резонанс напряжений. Электрическая схема, условия резонанса, резонансные кривые.
12. Резонанс токов. Электрическая схема, условия резонанса, резонансные кривые.
13. Мощность элементов электрических цепей переменного синусоидального тока. Понятие активной, реактивной и полной мощности. Коэффициент мощности.
14. Способы изображения трехфазной системы ЭДС и напряжений. Способы соединения фаз обмоток источника питания.
15. Соотношения между фазными и линейными напряжениями источника питания.
16. Классификация и способы включения в трехфазную цепь пассивных приемников.
17. Трехфазная цепь с симметричными приемниками при соединении звездой. Электрическая схема и векторная диаграмма.

18. Трехфазная цепь с симметричными приемниками при соединении треугольником. Электрическая схема и векторная диаграмма.
19. Трехфазная цепь с несимметричными приемниками при соединении звездой. Электрическая схема и векторная диаграмма.
20. Трехфазная цепь с несимметричными приемниками при соединении треугольником. Электрическая схема и векторная диаграмма.
21. Активная, реактивная и полная мощность в трехфазных цепях переменного синусоидального тока. Способы замера активной мощности в трехфазных цепях.
22. Переходные процессы в простейших электрических цепях. Включение индуктивной катушки на постоянное напряжение.
23. Включение резистора и конденсатора на постоянное напряжение. Генератор пилообразного напряжения.
24. Классификация магнитных цепей и методы их анализа. Вебер-амперная характеристика. Решение «прямой» и «обратной» задачи.

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

### *Основная литература*

1. **Касаткин, А.С.** Электротехника /А.С. Касаткин, М.В. Немцов.-М.: Энергоатомиздат, 2005
2. **Жаворонков, М. А.** Электротехника и электроника [Текст] : учеб. пособие для студентов высш. учеб. заведений / М. А. Жаворонков, А. В. Кузин. – М. : Академия, 2005

### *Дополнительная*

1. **Рекус, Г.Г.** Лабораторные работы по электротехнике и основам электроники /Г.Г. Рекус, В.Н. Чесноков.-М.: Высшая школа, 2001.
2. **Рекус, Г.Г.** Сборник задач по электротехнике и основам электроники / Г.Г. Рекус, А.И. Белоусов.- М.: Высшая школа, 2001
3. **Фарнасов, Г.А.** Электротехника, электроника, электрооборудование: учеб пособие для ВУЗов / Г.А. Фарнасов.- М.: Интермет Инжиниринг 2000.