**Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования**

**«Донецкий национальный технический университет»**

Факультет компьютерных наук и технологий

Кафедра компьютерной инженерии

**Методические указания И ЗАДАНИЯ**

к ВЫПОЛНЕНИЮ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ работЫ

по теме «множества»

по курсу

«ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА»

для студентов заочной формы обучения

направления подготовки

09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»

профиля

«Вычислительные машины, комплексы, системы и сети»

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Донецк, 2017

### УДК 510.22

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ «МНОЖЕСТВА» ПО КУРСУ «ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА» (для студентов заочной формы обучения направления подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» профиля «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети»).

Составитель: Чередникова О.Ю. – Донецк: ДВНЗ «Донецкий национальный технический университет», 2017 г. – 15 с.

Целью методических указаний по курсу «Дискретная математика» является приобретение студентами заочной формы обучения практических навыков решения задач теории множеств, в частности, доказательства тождеств с помощью законов алгебры множеств, решение комбинаторных задач.

Методические указания содержат варианты заданий, примеры выполнения заданий индивидуальной работы по теме «Множества», а также необходимый пояснительный материал.

**Составитель:**

к.т.н., доцент каф. КИ Чередникова О.Ю.

**Рецензенты:**

к.т.н., доцент каф. КИ Краснокутский В.А.

к.т.н., доцент каф. АСУ Васяева Т.А.

***Содержание***

***Введение……………………………………………………………………..6***

***[Задание №1](#_Лабораторная_работа_№1)………………………………………………………..…………7***

[***Задание №2***](#_Лабораторная_работа_№2)***………………………………………..…………………………14***

[***Задание №3***](#_Лабораторная_работа_№3)***………………………..…………………………………………23***

# *Список рекомендуемой литературы……………………………………..41*

# Введение

Дискретная математика имеет широкий спектр приложений, прежде всего в областях, связанных с информационными технологиями и компьютерами. В самом первоначальном, ныне редко используемом названии компьютера — «электронная цифровая вычислительная машина» - слово «цифровая» указывает на принципиально дискретный характер работы данного устройства. Теория множеств является неотъемлемой частью дискретной математики и изучает вопросы, связанные со свойствами и алгеброй некоторой совокупности объектов, объединенных по какому-либо признаку, и называемой множеством.

Целью индивидуальной работы по теме «Множества» курса «Дискретная математика» является закрепление студентами практических навыков решения задач теории множеств. Данные методические указания предназначены для студентов, обучающихся по направлению подготовки «Компьютерная инженерия» заочной формы обучения.

Работа состоит из трех заданий:

- операции над множествами;

- доказательства тождеств с помощью законов алгебры множеств;

- решение комбинаторных задач.

Материал, излагаемый в методических указаниях, содержит теоретические сведения, варианты для индивидуального выполнения заданий работы студентами, пример выполнения задания, а также вопросы для самопроверки знаний.

## **Задание №1. Операции над множествами**

**Теоретические сведения**

Понятию множества нельзя дать строгого определения. Более общего понятия, чем множество в математике не существует. Это - "совокупность, собрание, класс, семейство". Часто множество - несколько объектов, объединенных общим признаком.

Предметы, составляющие множество, называются элементами. Для указания того, что множество А состоит из элементов х, у ...z пишут А={ х,у.... }. Например: множество арифметических действий состоит из элементов {сложения, вычитания, умножения, деления}. Tо, что элемент х принадлежит множеству А, записывают x  A. Если не принадлежит  x  A.

Например: если А - множество натуральных чисел, то 6  А, а вот 1.3  А.

*Операции над множествами*

Объединением (суммой) множеств А и В называется множество, каждый элемент которого принадлежит хотя бы одному из множеств А и В. (Обозначение А  В={*x x*   *A* или  *x*   *B*})

Пусть А={ 1,2,3 }; В={ 1,2,4,5 }. Тогда, A  В={ 1,2,3,4,5 }.

Диаграмма Венна (круги Эйлера) для A  B

A B

Пересечением (произведением) множеств А и В называется множество, каждый элемент которого принадлежит одновременно А и В (обозначается А  В={*x x*   *A* и  *x*   *B*}).

Пусть А={ 1,2,3 }; B={1,2,4,5}. Тогда, А  В={ 1,2 }.

Диаграмма Венна (круги Эйлера) для A  B

A B

Разностью двух множеств А и В (относительным дополнением), называется новое множество А-В или А/В в которое входят все элементы множества А не принадлежащие В. *A - B* = {*x* *x* *A* и  *x*  *B*}. Совсем не обязательно, чтобы множество А было частью множества В.

Диаграмма Венна (круги Эйлера) для A - B

A B

Пример: A={1,2,3,4} B={1,3,5}. Тогда, A-B={2,4}; B-A={5}

Симметрической разностью двух множеств А и В, называется новое множество АΔВ, в которое входят все элементы множества А-В или В-А.

*A*Δ*B* = {*x* (*x* *A* и  *x*  *B)*или*(x* *В* и  *x*  *А)* }.

Т.е. формула симметрической разности имеет вид: *АΔВ=(А-В) (В-А)*

Пример: A={1,2,3,4} B={1,3,5} AΔB={2,4,5}

## 

А В

Диаграмма Венна (круги Эйлера) для A Δ B

## Постановка задачи:

Выяснить взаимное расположение множеств D, Е, F, если А, В, X — произвольные подмножества универсального множества U.

***Варианты заданий:***

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **1** | ***D*** |  | **2** | ***D*** |  |
| ***E*** |  | ***E*** |  |
| ***F*** |  | ***F*** |  |
| **3** | ***D*** |  | **4** | ***D*** |  |
| ***E*** |  | ***E*** |  |
| ***F*** |  | ***F*** |  |
| **5** | ***D*** |  | **6** | ***D*** |  |
| ***E*** |  | ***E*** |  |
| ***F*** |  | ***F*** |  |
| **7** | ***D*** |  | **8** | ***D*** |  |
| ***E*** |  | ***E*** |  |
| ***F*** |  | ***F*** |  |
| **9** | ***D*** |  | **10** | ***D*** |  |
| ***E*** |  | ***E*** |  |
| ***F*** |  | ***F*** |  |
| **11** | ***D*** |  | **12** | ***D*** |  |
| ***E*** |  | ***E*** |  |
| ***F*** |  | ***F*** |  |
| **13** | ***D*** |  | **14** | ***D*** |  |
| ***E*** |  | ***E*** |  |
| ***F*** |  | ***F*** |  |
| **15** | **D** |  | **16** | **D** |  |
| **E** |  | **E** |  |
| **F** |  | **F** |  |
| **17** | **D** |  | **18** | **D** |  |
| **E** |  | **E** |  |
| **F** |  | **F** |  |
| **19** | ***D*** |  | **20** | ***D*** |  |
| ***E*** |  |  | ***E*** |  |
| ***F*** |  |  | ***F*** |  |
| **21** | ***D*** |  | **22** | ***D*** |  |
| ***E*** |  |  | ***E*** |  |
| ***F*** |  |  | ***F*** |  |
| **23** | ***D*** |  | **24** | ***D*** |  |
| ***E*** |  |  | ***E*** |  |
| ***F*** |  |  | ***F*** |  |
| **25** | ***D*** |  | **26** | ***D*** |  |
| ***E*** |  |  | ***E*** |  |
| ***F*** |  |  | ***F*** |  |
| **27** | ***D*** |  | **28** | ***D*** |  |
| ***E*** |  | ***E*** |  |
| ***F*** |  | ***F*** |  |
| **29** | ***D*** |  | **30** | ***D*** |  |
| ***E*** |  | ***E*** |  |
| ***F*** |  | ***F*** |  |

***Пример решения задания 1***

Выяснить взаимное расположение множеств: , ,, если А, В, X — произвольные подмножества универсального множества U .

Решение:

Изобразим множества N, Е, Р в виде окружностей, расположенных на плоскости в общем положении, и поставим в каждой области, на которые плоскость разбита окружностями, по одному символу: символ 4, например, обозначает список всех элементов, попавших во множества А и В, но не попавших в X, и т. д. Теперь составим множества А, В, Х и универсальное множество U:

А = {1,2,4,5},

А Х

В

1

2

5

4

6

7

8

3

U

В = {4,5,6,7},

X ={2,3,5,6}.

U={1,2,3,4,5,6,7,8}

Тогда *В\Х*={4,7}, *А\В* = {1,2},

*Е=А\(В\Х)* = {1,2,5},

={1,2,4,5,6,7},

 = {1,2,4,7}.

Итак, видим, что включения  и  выполняются для произвольных множеств A, В, X.

**Контрольные вопросы**

1. Поясните понятие множества. Приведите примеры множеств. Как обозначаются множества и их элементы?
2. Какие существуют способы задания множеств?
3. Как обозначается принадлежность и непринадлежность элемента множеству?
4. Какие существуют отношения между двумя множествами?
5. Перечислите операции над множествами с приведением соответствующих диаграмм Эйлера - Венна.

## Задание №2. Доказательства тождеств с помощью законов алгебры множеств

**Теоретические сведения**

Иногда удобнее операции над множествами изображать по аналогии с операциями элементарной алгебры:

В алгебре множеств справедливы следующие законы:

1. А  А

2. Если А  В и В  А  А = В

3. Если А  В и В  С  А  С

4. 0  А

5. А  U

6. А + В = В + А коммутативность сложения.

7. АВ = ВА коммутативность умножения.

8. А + (В + С) = (А + В) + С ассоциативность сложения.

9. А(ВС) = (АВ)С ассоциативность умножения.

10. АА = А

11. А (В + С) = АВ + АС дистрибутивность

12. А + ВС = (А + В)(А + С)

Роль нуля и единицы играют пустое и универсальное множество.

13. А + 0 = А свойство пустого элемента.

14. А  А = А

15. А + U = U

16. А0 = 0

17. А  В  АВ = В, АВ  А

18. А + = U

19. А = 0

20. = U

21. = 0

22. = А

23,24.  - Законы Де Моргана

С помощью этих положений можно решать различные задачи упрощения выражений и доказательства тождеств.

Как видно, нет законов, включающих операцию разности, поэтому перед тем, как доказывать тождества, необходимо преобразовать выражение, исключив эту операцию. Для этого можно использовать выражение, которое следует из определения разности:

.

Исходя из приведенных выше законов, можно доказать, что:

.

Что в элементарной алгебре соответствует операции раскрытия скобок:

*(С+Х)(А+В)=СА+СВ+ХА+ХВ.*

И аналогично:

.

Однако в элементарной алгебре такие преобразования не правомочны, так же как и закон №12.

## Постановка задачи:

Выполнить указанные действия над выражением, используя законы алгебры множеств. Выполнить проверку на кругах Эйлера

Варианты

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Вариант | Действие | Выражение |
| 1 | Упростить | ∪ ∪ |
| 2 | Доказать | А – (В – С) = (А – В) + АС |
| 3 | Установить, верно или неверно равенство? | (*A* \ *B*) ∪(*A**B*) = *A* |
| 4 | Установить, верно или неверно равенство? | *А* \ (*В* ∪ *С*) = (*А* \ *В*) ∪ *С* |
| 5 | Установить, верно или неверно равенство? | (*A**B*)  (*A* ∪ *В*) = *В* |
| 6 | Упростить | (∪) \ (*A* ∪ *B*) |
| 7 | Упростить: | ∪(*B* \ (*A*∪*B*)) |
| 8 | Установить, верно или неверно равенство? | *А* \ (*В* *С*) = (*А* \*В*) *С* |
| 9 | Установить, верно или неверно равенство? | *С*)  *С* ∪*С* |
| 10 | Установить, верно или неверно равенство? | (*A* ∪ *B*) \ *A* = *B* \ *A* |
| 11 | Установить, верно или неверно равенство? | (*A* ∪ *B*) \ (*A**B*) = *A*∪*B* |
| 12 | Установить, верно или неверно равенство? | *С*  *С* \ (*С*  (*A*∪*B*)) |
| 13 | Установить, верно или неверно равенство? | (*A* ∪ *B*) \ (*A**B*) = (*A*∪(*B)* |
| 14 | Упростить |  |
| 15 | Установить, верно или неверно равенство? | \  = \ |
| 16 | Установить, верно или неверно равенство? | *А* \ (*В*  *С*) = (*А* \ *В*)  |
| 17 | Установить, верно или неверно равенство? | *А* \ (*В* ∪ *С*) = (*А* \ *В*)  |
| 18 | Установить, верно или неверно равенство? | *С*)   *С* |
| 19 | Установить, верно или неверно равенство? | \  = \ |
| 20 | Упростить | (*A* \ (*A**B*)) ∪ *В* |
| 21 | Упростить | (*A*  *С* )\ (*С*  (*A* ∪*B*)) |
| 22 | Установить, верно или неверно равенство? | ∪*С*)  ∪∪ *С* |
| 23 | Упростить |  (∪) |
| 24 | Установить, верно или неверно равенство? | *А* \ (*В* ∪*С*) = (*А* \*В*)  |
| 25 | Установить, верно или неверно равенство? | \  = \ |
| 26 | Доказать тождество |  |
| 27 | Упростить |  |
| 28 | Доказать |  |
| 29 | Доказать |  |
| 30 | Доказать тождество | А – (В – С) = (А – В) + АС |

***Пример решения задания***

Доказать: А – (А – В) = А∩В

Заменим разность по определению:

= {снова заменим разность}= {по закону де-Моргана}=

**Контрольные вопросы:**

1. Как заменить разность, используя операции отрицания и пересечения?
2. Написать закон де-Моргана
3. Вывести альтернативную формулу симметрической разности в базисе {объединение, пересечение, разность}
4. Убедиться на кругах Эйлера в справедливости закона Де Моргана.

## Задание №3. Решение комбинаторных задач

**Теоретические сведения**

Комбинаторика (комбинаторный анализ) - часть математики изучающая множества, состоящие из дискретных элементов.

Основной принцип комбинаторики.

**Правило 1. Правило произведения**

Если некоторый выбор А можно осуществить m различными способами, а для каждого из этих способов некоторый другой выбор B можно осуществить n другими способами, то выбор А *и* В ( в указанном порядке ) можно осуществить m\*n способами.

Теоретико-множественная формулировка этого же правила : Если 1) М1, М2, ...Мк - конечные множества и 2) M=M1\*M2..\*Mk - их декартово произведение, то |М|=|М1\*М2\*...Мк|=|М1||М2|...|Мк|.

**Правило 2. Правило суммы** (комбинаторная формулировка) :

Пусть объект

a1 может быть выбран m1 способами,

a2 может быть выбран m2 способами,

..................................

aк может быть выбран mк способами,

тогда выбор объекта **a1** или **a2** или ... **aк** может быть сделан **m1+m2+...mк** способами (выбор произвольного **ai** исключает выбор любого другого объекта).

Правило суммы (теоретико-множественная формулировка) : Пусть конечное множество М является объединением своих попарно непересекающихся множеств М1, М2, ... Мк , тогда

|М|=|М1|+|М2|+...|Мк|.

Пусть - какое-либо конечное множество; *соединением элементов из множества*  называется любой набор, составленный из элементов множества . Если в этом наборе какой-либо элемент встречается больше, чем один раз то говорят о *соединении с повторениями*; если же в наборе каждый элемент появляется лишь один раз, то говорят о *соединении без повторений.*

Соединения без повторений

**Сочетания**

Пусть М={a1, a2, ...an} - фиксированное n-множество. k - *сочетаниями* множества М (сочетаниями из n элементом по k или просто сочетаниям) называются неупорядоченное k - подмножества {ai, aj, ...aк} множества М, т.е. всякое соединение, в котором порядок следования элементов не учитывается.

**Перестановки**

*Перестановкой* элементов множества называется всякое соединение элементов множества , в котором обязательно присутствуют все элементы из и в котором учитывается порядок следования элементов друг за другом.

**Размещение**

Всякое соединение из элементов множества , в котором учитывается порядок следования элементов друг за другом, называется *размещением из по* . Перестановки фактически являются частным случаем размещений при **.**

## Соединения с повторениями.

На практике часто возникают случаи, когда рассматриваемые предметы (элементы множеств) одинаковы или одинакова часть из них (в рамках задачи).

Пусть задано n-множество А={a,b,...t} и множество М, являющееся объединением своих попарно непересекающихся подмножеств M=MaMbMt, где

Ma={a1,a2,...};

Mb={b1,b2,...};

..............

Mt={t1,t2,...}.

Элементы a1,a2,..в множестве Ma, b1,b2,..в множестве Mb и т.д. из одного и того же подмножества мы будем отождествлять между собой, считать их "одинаковыми" или "эквивалентными" или "равными" и будем записывать их в виде просто А (просто B,...). Число элементов в і-ом подмножестве называется кратностью і-го элемента.

**Определение количества соединений без повторений и с повторениями представлен в таблице:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Соединения | Без повторений | С повторениями |
| Перестановки |  |  |
| Размещения |  |  |
| Сочетания |  |  |

## Постановка задачи:

Решить комбинаторную задачу.

***Варианты***

1. Имеется 15 различных книг и книжная полка, вмещающая 12 книг. Сколько способов заполнить книжную полку, используя имеющиеся книги?
2. В кабину лифта 9-ти этажного дома вошло 3 пассажира, каждый из них может выйти на любом из 8 этажей. Сколько способов разгрузки лифта, при которых на каждом этаже выходит не более одного пассажира?
3. В кондитерской продаются пирожные 5-ти видов. Сколькими способами можно купить 12 пирожных?
4. Сколько различных флагов из трех полос можно составить, если имеется материал пяти цветов?
5. В зрительном зале 120 мест. Сколькими способами могут занять места в нем 120 зрителей; 80 зрителей?
6. В местком выбрано 9 человек. Нужно назначить председателя, заместителя, секретаря и бухгалтера. Сколькими способами это можно сделать?
7. Сколькими способами можно выбрать открытки для поздравления 5 лиц, если имеется 7 видов открыток?
8. Сколько способов разложить 10 различных монет по трем карманам?
9. Сколькими способами можно выбрать 5 делегатов из 15 человек?
10. Сколько шестизначных номеров можно составить из цифр 0,1,2,3,4.5,6,7,8,9?
11. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры. Сколько вариантов уму нужно перебрать, что набрать нужный номер?
12. Сколько различных слов (любая последовательность букв) можно составить из букв слова КОЛОБОК, если необходимо использовать все буквы?
13. Два филателиста хотят обменяться марками. У одного для обмена есть 7 марок, другого – 5 марок. Сколькими способами они могут поменять две марки одного на две марки другого?
14. Сколько экзаменационных комиссий, состоящих из 7 членов, можно составить из 14 преподавателей?
15. В первенстве участвуют 17 команд. Сколькими способами могут быть распределены золотая, серебряная и бронзовая медали?
16. Автомобильные номера некоторой страны состоят из 3 букв (все буквы различны) и 4 цифр (цифры могут повторяться). Сколько максимально машин может быть в этой стране, если ее алфавит содержит 26 букв?
17. Буквы азбуки Морзе состоят из точек и тире. Сколько букв можно изобразить, если потребовать, чтобы каждая буква содержала не больше 5 символов?
18. В цехе работают 8 токарей. Сколькими способами можно поручить трем из них изготовление 3 различных видов деталей ( по одному на каждого)?
19. На окружности отмечено 10 точек. Сколько существует многоугольников с вершинами в этих точках?
20. Группе из 5 сотрудников выделено 3 путевки. Сколько существует способов распределения путевок, если: 1)все путевки различны; 2) все путевки одинаковы?

***Пример решения***

Сколько домино в наборе?

Решение:

Камни домино можно рассматривать как сочетания (порядок цифр на камне не важен) по два(к) из семи (r) цифр: 0,1,2,3,4,5,6. Т.к. в наборе имеются дубли (1-1, 2-2…), то сочетания с повторениями.

Число таких сочетаний равно

**Контрольные вопросы**

1. Дать определения сочетаний, перестановок, размещений. Привести примеры.
2. Сформулировать правила суммы и произведения.
3. Что называется биномом Ньютона? Свойства биномиальных коэффициентов.
4. Что представляют собой соединения с повторениями. Привести примеры.

## Рекомендуемая литература

1. Асеев Г.Г. Дискретная математика : учебник / Г.Г. Асеев, О.М. Абрамов, Д.Э.Ситников. – К.: Кондор, 2008. – 162с.
2. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера / О.П. Кузнецов. – Изд. 6-е, стер. – СПб.; М.; Краснодар : Лань, 2009. – 400с.
3. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов : учебное пособие для вузов / Ф.А. Новиков. – 3-е изд. – СПб : Питер, 2009. – 384с.
4. Пономарев В.Ф. Дискретная математика для инженеров : учебное пособие для вузов / В.Ф. Пономарев. М. : Горячая линия-Телеком, 2009. – 320с.
5. Тюрин С.Ф. Дискретная математика: практическая дискретная математика и математическая логика: учебное пособие для вузов / С.Ф. Тюрин, Ю.А. Аляев. – М.: Финансы и статистика : ИНФРА-М, 2010. – 384с.
6. Виленкин Н. Я. Комбинаторика / Н.Я. Виленкин, А.Н. Виленкин, П.А. Виленкин. – М.ФИМА : МЦНМО, 2010. – 400с.