

Конспект лекций
по дисциплине
«Высшая математика»,
для образовательной программы по направлению
20.03.01 «Техносферная безопасность»,
профиль – «Безопасность технологических процессов и
производств»
квалификация (степень) бакалавр,
тип программы бакалавриата – академический
Межрегиональный учебный центр переподготовки специалистов
Разработчик: доцент, к.т.н. Храмова Татьяна Викторовна

1 семестр

Конспект содержит сведения, необходимые для освоения курса, успешного выполнения контрольной работы и сдачи экзамена.

Не возбраняется использовать дополнительные источники информации, содержащие более развернутую информацию: доказательства утверждений и выводы формул.

В конце каждого раздела Вы найдёте задачи для самостоятельного решения и вопросы для самопроверки.

Примеры решения задач вы найдёте на нашем канале на YouTube:
<https://www.youtube.com/channel/UC0k6GOLytUlutfqtpN7lk9Q>

Также Вы можете использовать сборники задач для самостоятельного решения и закрепления материала, которые представлены в электронном виде на сайте библиотеки СибГУТИ и в базе IPRBooks:

1. Дмитриева, О. Е. Сборник задач по математическому анализу.
1 семестр, <http://www.iprbookshop.ru/54798>

2. Дмитриева, О. Е. Сборник задач по математическому анализу.
2 семестр, <http://www.iprbookshop.ru/54799>

Содержание

1	Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии	7
1.1	Матрицы. Определитель матрицы. Обратная матрица. Решение систем линейных уравнений (СЛУ) в матричном виде. Метод Крамера	7
1.1.1	Матрицы	7
1.1.2	Действия с матрицами	8
1.1.3	Обратная матрица	9
1.1.4	СЛАУ - матричное представление	9
1.1.5	Определитель матрицы	10
1.1.6	Вычисление обратной матрицы	12
1.1.7	Метод Крамера для решения СЛАУ	12
1.1.8	Задания для самостоятельного решения	13
1.2	Исследование СЛУ. Метод Гаусса	13
1.2.1	Метод Гаусса	13
1.2.2	Исследование СЛУ	14
1.2.3	Задания для самостоятельного решения	16
1.3	Векторное пространство. Операции над векторами. Базис	16
1.3.1	Вектор. Основные определения	16
1.3.2	Операции с векторами	17
1.3.3	Проекция вектора на ось	17
1.3.4	Понятие о базисе	18
1.3.5	Декартова прямоугольная система координат	18
1.3.6	Скалярное произведение векторов	19
1.3.7	Векторное произведение векторов	20
1.3.8	Смешанное произведение векторов	20
1.3.9	Важные факты	21
1.3.10	Задания для самостоятельного решения	21
1.4	Уравнение прямой на плоскости и в пространстве. Уравнение плоскости в пространстве. Исследование взаимного расположения точек, прямых и плоскостей	22
1.4.1	Прямая на плоскости	22
1.4.2	Взаимное расположение прямых	26

1.4.3	Плоскость в пространстве	27
1.4.4	Взаимное расположение плоскостей	28
1.4.5	Расстояние от точки до плоскости	29
1.4.6	Уравнения прямой в пространстве	29
1.4.7	Расстояние от точки до прямой в пространстве	31
1.4.8	Взаимное расположение прямых в пространстве	32
1.4.9	Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве	33
1.4.10	Задания для самостоятельного решения	35
1.5	Кривые второго порядка: геометрические и оптиче- ские свойства	35
1.5.1	Эллипс	35
1.5.2	Гипербола	36
1.5.3	Парабола	37
1.5.4	Оптические свойства	37
1.5.5	Задания для самостоятельного решения	38
1.6	Поверхности второго порядка	38
1.6.1	Эллипсоид	39
1.6.2	Гиперболоиды: однополостный и двуполостный	39
1.6.3	Конус	40
1.6.4	Параболоиды: эллиптический и гиперболический	40
1.6.5	Цилиндры	40
1.7	Вопросы для самопроверки к разделу 1	41
2	Функции. Предел и непрерывность	44
2.1	Понятие функции. Основные элементарные функции. Предел функции в точке. Односторонние пределы. Бес- конечно большая и бесконечно малая функции . . .	44
2.1.1	Основные определения	44
2.1.2	Типы функций	44
2.1.3	Способы задания функции	45
2.1.4	Основные элементарные функции	45
2.2	Основные теоремы о пределах. «Замечательные» пре- делы. Эквивалентности	46
2.2.1	Определение предела	46
2.2.2	Односторонние пределы	47

2.2.3	Бесконечно малые и бесконечно большие величины	47
2.2.4	Арифметические свойства пределов	48
2.2.5	Основные теоремы о пределах	48
2.2.6	Вычисление пределов. Неопределенности	49
2.2.7	Первый замечательный предел	50
2.2.8	Второй замечательный предел	51
2.3	Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация. Основные теоремы	52
2.3.1	Определение непрерывности	52
2.3.2	Точки разрыва	53
2.3.3	Непрерывность функции на отрезке	54
2.4	Приёмы вычисления пределов	55
2.5	Задания для самостоятельного решения	55
2.6	Вопросы для самопроверки к разделу 2	55
3	Производная функции	56
3.1	Определение производной. Производные суммы, произведения и частного. Производная сложной функции. Производные основных элементарных функций	56
3.1.1	Определение производной	56
3.1.2	Правила дифференцирования	58
3.1.3	Таблица производных	58
3.2	Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций. Дифференциал функции. Производные высших порядков	59
3.2.1	Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций	59
3.2.2	Дифференциал функции	60
3.2.3	Производные высших порядков	61
3.3	Основные теоремы дифференциального исчисления. Правило Лопиталя. Формула Тейлора. Исследование функции на экстремум	61
3.4	Исследование функции	63
3.4.1	Схема исследования функции	63
3.4.2	Асимптоты	64
3.4.3	Монотонность и экстремумы	64

3.4.4	Выпуклость и перегибы	65
3.5	Задания для самостоятельного решения	65
3.6	Вопросы для самопроверки к разделу 3	66
4	Интеграл	67
4.1	Неопределённый интеграл: определение, свойства. Интегрирование по частям	67
4.1.1	Определение неопределённого интеграла . . .	67
4.1.2	Свойства неопределённого интеграла.	67
4.1.3	Таблица интегралов	68
4.1.4	Методы вычисления неопределённого интеграла: замена переменной, интегрирование по частям	69
4.2	Интегрирование некоторых видов функций	70
4.2.1	Интегрирование дробно-рациональных функций	70
4.2.2	Интегрирование тригонометрических функций	72
4.2.3	Интегрирование иррациональных функций . .	73
4.2.4	«Неберущиеся» интегралы	76
4.3	Определённый интеграл: определение, свойства. Формула Ньютона-Лейбница	76
4.3.1	Основные понятия	76
4.3.2	Формула Ньютона-Лейбница	78
4.3.3	Свойства определённого интеграла	78
4.4	Замена переменной и интегрирование по частям в определённом интеграле	79
4.4.1	Замена переменной	79
4.4.2	Интегрирование по частям	80
4.5	Несобственные интегралы	80
4.5.1	Несобственные интегралы 1 рода	80
4.5.2	Несобственные интегралы 2 рода	85
4.6	Геометрический смысл определённого интеграла. Физические приложения	87
4.6.1	Вычисление площади фигуры в декартовых координатах	87
4.7	Задания для самостоятельного решения	92
4.8	Вопросы для самопроверки к разделу 4	93

5	Функции нескольких переменных	94
5.1	Определение функции нескольких переменных (ФНП). Предел и непрерывность ФНП	94
5.1.1	Определение ФНП	94
5.1.2	Области на плоскости	94
5.1.3	Предел и непрерывность функции нескольких переменных	97
5.2	Дифференцирование ФНП	98
5.2.1	Частные производные	98
5.2.2	Полный дифференциал	99
5.3	Дифференцирование неявно заданной ФНП, диффе- ренцирование сложной функции	100
5.3.1	Производные высших порядков	101
5.4	Экстремум функции двух переменных. Касательная плоскость и нормаль	102
5.4.1	Экстремум функции двух переменных	104
5.5	Задания для самостоятельного решения	105
5.6	Вопросы для самопроверки к разделу 5	106

1 Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии

1.1 Матрицы. Определитель матрицы. Обратная матрица. Решение систем линейных уравнений (СЛУ) в матричном виде. Метод Крамера

1.1.1 Матрицы

Матрица - это прямоугольная таблица, заполненная элементами:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad (1)$$

a_i — i -я строка,
 a^j — j -й столбец,
 $n \times m$ — размер матрицы,
 a_{ij} — элемент матрицы.

Виды матриц

- *Нулевая матрица* - это матрица все элементы которой равны 0.
- *Квадратная матрица* - это матрица размера $n \times n$, элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ - *главная диагональ* матрицы.
- *Симметричная матрица* - это квадратная и $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$.
- *Треугольная матрица* - это квадратная матрица, у которой все элементы под (над) главной диагональю равны 0;
- *Диагональная матрица* - это квадратная, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали равны 0;
- *Единичная матрица* - это диагональная и все элементы главной диагонали равны 1.

1.1.2 Действия с матрицами

Компактная запись матрицы (1):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}}$$

Тогда и действия с матрицами можно сразу записать компактно:

Умножение матрицы на число - это умножение каждого её элемента на это число:

$$\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}} \quad (2)$$

Сложение матриц. Сумма матриц - это матрица, элементы которой получены сложением соответствующих элементов этих матриц:

$$C = A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}} \quad (3)$$

Транспонирование матрицы - это её "отражение" относительно главной диагонали:

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}}, \\ A^T = (a^T_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}, \quad a^T_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j \quad (4)$$

Умножение матриц. Пусть $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,k}}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,k} \\ j=\overline{1,m}}}$, Тогда

$$C = AB = (a_i \cdot b^j)_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}} \quad (5)$$

где

$$c_{ij} = a_i \cdot b^j = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ik}) \cdot (b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{kj}) = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj}.$$

Из формул (2) – (5) очевидны следующие замечания.

Замечание 1. Матрицы разного размера складывать нельзя.

Замечание 2. Сложение матриц коммутативно и ассоциативно:

$$A + B = B + A, \quad (A + B) + C = A + (B + C).$$

Замечание 3. $a \cdot b$ - скалярное произведение векторов.

Замечание 4. Умножение матриц не коммутативно : $AB \neq BA$.

Замечание 5. Умножение матриц ассоциативно: $(AB)C = A(BC)$.

Замечание 6. $(AB)^T = B^T A^T$.

Замечание 7. Умножение матриц дистрибутивно относительно сложения (и справа, и слева):

$$(A + B)C = AC + BC, \quad A(B + C) = AB + AC.$$

1.1.3 Обратная матрица

Обратная матрица к матрице — это матрица, произведение с которой равно единичной, т.е. выполняется равенство:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E. \quad (6)$$

Из формулы (6) следуют замечания.

Замечание 1. Обратная бывает только у квадратных, и то не у всех.

Замечание 2. Обратная к обратной равна исходной: $(A^{-1})^{-1} = A$.

Замечание 3. Обратная к транспонированной равна транспонированной обратной: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Замечание 4. Обратная произведения равна произведению обратных в обратном порядке: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Замечание 5. Обратная к умноженной на число равна обратной, деленной на это число: $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

1.1.4 СЛАУ - матричное представление

Пусть дана *система линейных алгебраических уравнений*:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2, \\ \dots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n. \end{cases} \quad (7)$$

Систему (7) можно представить в матричном виде $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

A — $n \times m$ - матрица коэффициентов;

X — $m \times 1$ - вектор-столбец неизвестных;

B — $n \times 1$ - вектор-столбец правых частей.

Если A квадратная, то уравнение легко решить: $X = A^{-1}B$.

Классификация СЛАУ

Различают следующие виды систем линейных уравнений:

однородная: $AX = 0$ (правые части всех уравнений равны 0);

совместная - это система, которая имеет решение;

определённая - это система, которая имеет единственное решение;

неоднородная - это система, которая имеет вид $AX = B$, $B \neq 0$;

несовместная - это система, которая не имеет решения;

неопределённая - это система, которая имеет бесконечно много решений.

1.1.5 Определитель матрицы

Определитель (детерминант) — это замечательная характеристика квадратной матрицы.

Определение будет длинным.

Зато обозначение короткое: $|A|$ или ΔA или $\det A$.

Рекуррентное определение с минорным отступлением.

$$1 \times 1: |a| = a$$

$$2 \times 2: \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$3 \times 3: \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Определение минора k -го порядка.

Выберем в произвольно k строк и k столбцов.

Элементы на пересечении выбранных строк и столбцов составляют матрицу размера $k \times k$.

$|M|$ и есть минор k -го порядка матрицы.

Различных миноров k -го порядка у матрицы много — $(C_n^k)^2$.

Определитель матрицы $n \times n$

Определитель, бОльшего, чем 3-го порядка, вычисляется с помощью миноров по любой из формул (8), (9):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}. \quad (8)$$

где i — любая фиксированная строка матрицы (**вычисление по строке**);

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}. \quad (9)$$

j — любой фиксированный столбец матрицы (**вычисление по столбцу**).

Свойства определителей

Свойство 1. Если две строки (столбца) матрицы совпадают, то определитель равен нулю.

Свойство 2. При добавлении к любой строке (столбцу) линейной комбинации других строк (столбцов) определитель не изменится.

Свойство 3. Если переставить две строки (столбца), то определитель меняет знак.

Свойство 4. Общий множитель элементов какого-либо ряда (строки или столбца) матрицы можно вынести за знак определителя.

Свойство 5. $\det A^T = \det A$.

Свойство 6. $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

Свойство 7. $\det AB = \det A \cdot \det B$.

1.1.6 Вычисление обратной матрицы

Пусть дана матрица $A - n \times n$. И определитель её не равен 0. Пусть M_{ij} - минор $(n - 1)$ -го порядка, полученный вычеркиванием из матрицы A элемента a_{ij} . Тогда *алгебраическое дополнение элемента a_{ij}* : $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Обратная матрица может быть вычислена по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots A_{nn} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

1.1.7 Метод Крамера для решения СЛАУ

Пусть $AX = B$ матричное представление СЛАУ (7), при $n = m$, тогда из (10) следует, что

$$A^{-1}B = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \text{следовательно, } x_i &= \frac{1}{\det A} (b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + \dots + b_n A_{ni}) = \\ &= \frac{1}{\det A} \left((-1)^{1+i} b_1 M_{1i} + (-1)^{2+i} b_2 M_{2i} + \dots + (-1)^{n+i} b_n M_{ni} \right) = \\ &= \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \end{matrix} \\ & \quad x_i = \frac{\Delta_i}{\det A}, \end{aligned} \quad (11)$$

где Δ_i - определитель матрицы, полученной из A заменой столбца a^i на столбец правых частей B .

Формулы (11) называются *формулами Крамера*.

1.1.8 Задания для самостоятельного решения

1) Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$.

2) Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

3) Решить систему уравнений по формулам Крамера $\begin{cases} 2x + y = 5, \\ x + 3z = 16, \\ 5y - z = 10. \end{cases}$

4) Найти произведения AB и BA : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

5) Решите систему уравнений: $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8, \\ 2x - 4y - 3z = -1, \\ x + 5y + z = 0 \end{cases}$. **Ответы к за-**

даниям: 1) 0; 2) 900; 3) (1;3;5); 4) $AB = \begin{pmatrix} 36 & 7 & 25 \\ -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, BA не существует; 5) (2; -1; 3);

1.2 Исследование СЛУ. Метод Гаусса

1.2.1 Метод Гаусса

Пусть $AX = B$ матричное представление СЛАУ (7).

Суть метода Гаусса в том, чтобы элементарными преобразованиями строк, привести матрицу A к треугольному виду.

Пример. Решить СЛУ: $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 0, \\ 5x + 6z = 7, \\ 8y - 9z = 10. \end{cases}$

Решение: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & -9 & 10 \end{array} \right) \Rightarrow a_1 : 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & -9 & 10 \end{array} \right) \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
a_2 - 5a_1 &\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 2 & 0 \\ 0 & \frac{15}{2} & -4 & 7 \\ 0 & 8 & -9 & 10 \end{array} \right) \Rightarrow a_2 : \frac{15}{2} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{15} & \frac{14}{15} \\ 0 & 8 & -9 & 10 \end{array} \right) \\
\Rightarrow \begin{array}{l} a_1 + \frac{3}{2}a_2 \\ a_3 - 8a_2 \end{array} &\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{18}{15} & \frac{21}{15} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{15} & \frac{14}{15} \\ 0 & 0 & \frac{-71}{15} & \frac{38}{15} \end{array} \right) \Rightarrow a_3 : \frac{-71}{15} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{18}{15} & \frac{21}{15} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{15} & \frac{14}{15} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{38}{71} \end{array} \right) \\
\Rightarrow \begin{array}{l} a_1 - \frac{18}{15}a_3 \\ a_2 + \frac{8}{15}a_3 \end{array} &\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{145}{71} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{46}{71} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{38}{71} \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \frac{145}{71} \\ \frac{46}{71} \\ -\frac{38}{71} \end{array} \right).
\end{aligned}$$

1.2.2 Исследование СЛУ

Рассмотрим систему линейных уравнений (СЛУ): $AX = B$, A — $n \times m$.

СЛУ будет *эквивалентна* исходной, если:

- переставлять уравнения местами,
- любое уравнение умножить на ненулевое число,
- прибавить к одному уравнению другое.

Действия с уравнениями равносильны элементарным преобразованиям строк *расширенной матрицы* системы $(A|B)$. Преобразованием строк приведём $(A|B)$ к виду, содержащему максимальное количество нулей в левой части (коэффициенты). В результате получим СЛУ $A'X = B'$, эквивалентную исходной, но в этой будут только *независимые* уравнения.

Вглядимся в $(A'|B')$ проанализируем то, что получилось:

1. Если число ненулевых строк в $A'|B'$ больше числа ненулевых строк в A' , то система несовместна (она содержит уравнение вида $0 = b$, $b \neq 0$);
2. Если число ненулевых строк в $(A'|B')$ равно числу ненулевых строк в A' , то система совместна;
3. Если система совместна и число ненулевых строк в $(A'|B')$ равно числу неизвестных, то она определённая;
4. Если система совместна и число ненулевых строк в $(A'|B')$ меньше числа неизвестных, то она неопределённая.

Других вариантов не бывает.

Пример 1. Найти решение СЛУ
$$\begin{cases} x + z = 3, \\ z + 2t = 0, \\ z - 2t = 0, \\ x - 2t = -1. \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 0 \\ 1 & 0 & -2 & | & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & -4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} x - 2t = 3, \\ z + 2t = 0, \\ -4t = 0, \\ 0 = -4. \end{cases}$$

Последнее уравнение противоречиво. **Система несовместна.**

Пример 2. Найти решение СЛУ
$$\begin{cases} x + z = 2, \\ y + z = 2, \\ y + 2z + t = 4, \\ x - t = 0. \end{cases}$$

Решение:

$$(A|B) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & | & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & | & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y - t = 0, \\ z + t = 2, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Независимых уравнений только три. Перенесём в каждом уравнении последнюю переменную в правую часть:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & t \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 - t \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = C, \\ z = 2 - C, \\ t = C, \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ C \\ 2 - C \\ C \end{pmatrix} - \text{общее решение, где } C = \text{const.}$$

1.2.3 Задания для самостоятельного решения

Исследовать систему уравнений:

$$\begin{aligned} 1) & \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases} \\ 2) & \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases} \\ 3) & \begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответы к заданиям: 1) Совместная и неопределенная; 2) Несовместная; 3) Совместная и неопределенная.

1.3 Векторное пространство. Операции над векторами. Базис

1.3.1 Вектор. Основные определения

Вектором называется направленный отрезок. Определяющие характеристики вектора: направление и длина. | Вектор обозначается как \vec{a} .

Вектор \vec{a} может быть отложен из любой точки. Фактически, вектор — это *класс направленных отрезков*.

Вектор с началом в точке А и концом в точке В обозначается \overline{AB} .

Длина $|\overline{AB}|$ вектора \overline{AB} — это длина отрезка АВ.

Единичный вектор — это вектор длина которого равна единице.

Нулевой вектор — это вектор длина которого равна нулю.

Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора \vec{a} , называется *ортом вектора \vec{a}* и обозначается \vec{a}_o .

Векторы *противоположны*, если они имеют одинаковую длину и противоположные направления. Вектор, противоположный вектору \vec{a} , обозначается $-\vec{a}$

Векторы *коллинеарны*, если они имеют одинаковое направление.

Векторы *равны*, если они коллинеарны и имеют равные длины.

Векторы *компланарны*, если они лежат в одной плоскости.

Угол между векторами \vec{a} и \vec{b} — это угол в треугольнике, построенном на векторах \vec{a} и \vec{b} , отложенных из одной точки.

1.3.2 Операции с векторами

Сумма двух векторов \vec{a} и \vec{b} — это вектор $\vec{a} + \vec{b}$, проведенный из начала \vec{a} к концу \vec{b} , если начало \vec{b} совпадает с концом \vec{a} . Сложение векторов выполняется по правилу параллелограмма.

Разность двух векторов \vec{a} и \vec{b} — это вектор $\vec{a} - \vec{b}$, проведенный из конца \vec{b} к концу \vec{a} , если начало \vec{a} совпадает с началом \vec{b} . Вычитание векторов выполняется по правилу треугольника.

Произведением вектора $\vec{a} \neq 0$ на число $\lambda \in \mathbb{R}$ называется вектор $\lambda\vec{a}$, который имеет длину $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$ и

- направление вектора \vec{a} , если $\lambda > 0$;
- направление вектора $-\vec{a}$, если $\lambda < 0$.

Замечание: $|\vec{a}| \cdot \vec{a}_o = \vec{a}$.

1.3.3 Проекция вектора на ось

Векторная проекция вектора \vec{a} на ось l — это вектор, началом и концом которого являются соответственно проекции начала и конца вектора \vec{a} на данную ось.

Скалярная проекция вектора \vec{a} на ось l — это число, модуль которого равен длине векторной проекции \vec{a} на ось l . Обозначение: $\text{pr}_l \vec{a}$.

Проекция вектора \vec{a} на вектор \vec{b} — это проекция вектора \vec{a} на ось, направление которой задает вектор \vec{b} . Обозначение: $\text{pr}_{\vec{b}} \vec{a}$.

Свойства проекций

- $|\text{pr}_l \vec{AB}| = |\vec{A'B'}|$;

- $\text{пр}_l (\lambda \cdot \overline{AB}) = \lambda \cdot \text{пр}_l \overline{AB}$;
- $\text{пр}_l (\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF}) = \text{пр}_l \overline{AB} + \text{пр}_l \overline{CD} + \text{пр}_l \overline{EF}$.

1.3.4 Понятие о базисе

Линейная комбинация векторов - это сумма этих векторов, умноженных на некоторые численные коэффициенты:

$$\bar{a} = x_1 \cdot \bar{a}_1 + x_2 \cdot \bar{a}_2 + \dots + x_n \cdot \bar{a}_n ,$$

x_1, x_2, \dots, x_n - коэффициенты.

Векторы *линейно зависимы* (между собой), если какой-либо из них является линейной комбинацией остальных.

Максимальная по размеру упорядоченная совокупность линейно независимых векторов называется *базисом*.

Если вектор представлен в виде линейной комбинации базисных векторов, то говорят, что он *разложен* по этому базису.

Коэффициенты x_1, x_2, \dots, x_n при разложении вектора $\bar{a} =$ по базису $\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n \rangle$ называются его *координатами* в этом базисе.

1.3.5 Декартова прямоугольная система координат

Базис называется *ортонормированным*, если все его вектора единичны и взаимно перпендикулярны.

Совокупность фиксированной точки О (начало координат) и ортонормированного базиса называется *прямоугольной декартовой системой координат* в пространстве.

Например,

О и орты \bar{i}, \bar{j} - прямоугольная декартова система координат на плоскости;

О и орты $\bar{i}, \bar{j}, \dots, \bar{k}$ - прямоугольная декартова система координат в пространстве.

Прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов называются *осями координат*.

Вектор, соединяющий начало координат и точку А называется её *радиус-вектором*. Скалярные проекции вектора на координатные оси — *декартовы координаты вектора*.

Направляющие косинусы вектора — углы, между вектором и осями координат.

Из определения проекции вектора на вектор следует, что для любого вектора $\bar{a} = (x, y, z)$, орт, дина и направляющие косинусы связаны соотношениями (12):

$$\bar{a}_0 = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \left(\frac{x}{|\bar{a}|}, \frac{y}{|\bar{a}|}, \frac{z}{|\bar{a}|} \right) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma). \quad (12)$$

Операции над векторами в координатах.

Пусть $\bar{a} = x_a \cdot \bar{i} + y_a \cdot \bar{j} + z_a \cdot \bar{k} = (x_a, y_a, z_a)$
и $\bar{b} = x_b \cdot \bar{i} + y_b \cdot \bar{j} + z_b \cdot \bar{k} = (x_b, y_b, z_b)$, тогда
 $\bar{a} \pm \bar{b} = (x_a \pm x_b) \cdot \bar{i} + (y_a \pm y_b) \cdot \bar{j} + (z_a \pm z_b) \cdot \bar{k}$;
 $\lambda \bar{a} = (\lambda x_a) \cdot \bar{i} + (\lambda y_a) \cdot \bar{j} + (\lambda z_a) \cdot \bar{k}$.

1.3.6 Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение векторов — это число $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| |\bar{b}| \cos \widehat{\bar{a}\bar{b}}$, равное произведению модулей векторов на косинус угла между ними. В декартовых координатах скалярное произведение векторов $\bar{a} = (x_a, y_a, z_a)$, $\bar{b} = (x_b, y_b, z_b)$ вычисляется по формуле:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b. \quad (13)$$

Свойства скалярного произведения

Из определения скалярного произведения и формулы (13) следует, что

1. $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$;
2. $\lambda(\bar{a} \cdot \bar{b}) = (\lambda \bar{a}) \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot (\lambda \bar{b})$;
3. $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$;
4. $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot \text{пр}_{\bar{a}} \bar{b} = |\bar{b}| \cdot \text{пр}_{\bar{b}} \bar{a}$;
5. $\cos \alpha = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$;
6. $\bar{a}^2 = \bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2$;
7. $\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0$.

1.3.7 Векторное произведение векторов

Векторное произведение векторов \bar{a}, \bar{b} — это вектор $\bar{a} \times \bar{b}$ длина которого равна: $|\bar{a}| |\bar{b}| \sin \widehat{\bar{a}\bar{b}}$, а направление перпендикулярно обоим векторам \bar{a}, \bar{b} , причём так, что тройка векторов $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{a} \times \bar{b})$ правая.

Тройка векторов $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ правая, если поворот от \bar{a} к \bar{b} , видимый с конца \bar{c} , осуществляется против хода часовой стрелки.

В декартовых координатах имеет место формула:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Свойства векторного произведения

Из определения векторного произведения и формулы (14), следует, что

1. $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$;
2. $\lambda(\bar{a} \times \bar{b}) = (\lambda\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda\bar{b})$;
3. $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$;
4. $|\bar{a} \times \bar{b}| = S_{ab}$;
5. $\bar{a} \parallel \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \times \bar{b} = 0$.

1.3.8 Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением векторов называется векторное произведение первых двух векторов, умноженное скалярно на третий: $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$.

В декартовых координатах смешанное произведение вычисляется по формуле:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}. \quad (15)$$

Свойства смешанного произведения

Из определения смешанного произведения и формулы (15), следует, что

1. При перестановке двух сомножителей местами, произведение меняет знак.
2. Если вектора компланарны, то их смешанное произведение равно 0.
3. Модуль смешанного произведения векторов равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

1.3.9 Важные факты

1. Вектора ортогональны \Leftrightarrow их скалярное произведение равно 0:

$$\bar{a} \perp \bar{b} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b = 0.$$

2. Вектора коллинеарны \Leftrightarrow их векторное произведение равно 0:

$$\bar{a} \parallel \bar{b} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b} = k \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} = 0.$$

3. Вектора компланарны \Leftrightarrow их смешанное произведение равно 0:

$$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \parallel P \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a} \bar{b} \bar{c} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix} = 0.$$

1.3.10 Задания для самостоятельного решения

1) - 5) Заданы векторы $\bar{a} = (-1, 2, 0)$, $\bar{b} = (3, 1, 1)$, $\bar{c} = (2, 0, 1)$ и $\bar{d} = \bar{a} - 2\bar{b} + \frac{1}{3}\bar{c}$. Вычислить:

1) длину $|\bar{a}|$;

2) координаты единичного вектора \bar{a}_0 вектора \bar{a} ;

3) $\cos(\bar{a}, \bar{j})$;

4) координату d_x вектора \bar{d} ;

5) проекцию $\text{pr}_{\bar{j}} \bar{d}$.

6) Даны две смежные вершины параллелограмма $A(-2, 6)$, $B(2, 8)$ и точка пересечения его диагоналей $M(2, 2)$. Найти две другие вершины.

7) Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, 4)$ и $C(4, 3, 2)$. Указание: использовать свойства векторного произведения векторов.

Ответы к заданиям. 1) $\sqrt{5}$; 2) $(-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 0)$; 3) $2/\sqrt{5}$; 4) $-19/3$; 5) 0; 6) $C(6, -2)$, $D(2, -4)$; 7) $2\sqrt{6}$.

1.4 Уравнение прямой на плоскости и в пространстве. Уравнение плоскости в пространстве. Исследование взаимного расположения точек, прямых и плоскостей

1.4.1 Прямая на плоскости

Для построения прямой (и её уравнения) необходим один из наборов данных:

- 1) две точки M_1 и M_2 ;
- 2) точка M_o и направление \vec{q} ;
- 3) точка M_o и нормаль \vec{n} .

Из этого мы составим:

- общее уравнение прямой на плоскости;
- уравнение прямой в отрезках;
- каноническое уравнение прямой;
- уравнение "через две точки";
- параметрические уравнения прямой;
- уравнение с угловым коэффициентом.

Общее уравнение прямой на плоскости

Пусть задана точка $M_o(x_o, y_o)$ и вектор нормали $\vec{n} = (x_n, y_n)$ (Рисунок 1.). Тогда для произвольной точки $M(x, y)$, лежащей на прямой, выполняется условие

$$\vec{n} \cdot \overline{M_oM} = 0,$$

Преобразуем это равенство:

$$\begin{aligned}\overline{M_oM} &= (x - x_o, y - y_o), \\ (x_n, y_n) \cdot (x - x_o, y - y_o) &= 0, \\ x_n(x - x_o) + y_n(y - y_o) &= 0, \\ \underbrace{A}_{x_n}x + \underbrace{B}_{y_n}y + \underbrace{C}_{-x_nx_o - y_ny_o} &= 0.\end{aligned}$$

Получим **общее уравнение прямой**:

$$Ax + By + C = 0. \quad (16)$$

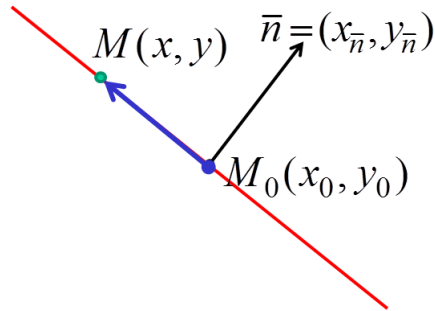


Рисунок 1 - Общее уравнение прямой на плоскости

Далее, вектор нормали будем обозначать $\bar{n} = (A, B)$.

Уравнение прямой в отрезках

Дано общее уравнение прямой (16): $Ax + By + C = 0$.

Если коэффициенты A , B , C не равны нулю, то преобразуем (16):

$$\frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1, \quad a = -C/A, \quad b = -C/B.$$

Получим **уравнение прямой в отрезках**:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (17)$$

Эта прямая проходит через точки $(a, 0)$, $(0, b)$ (Рисунок 2), т.е. отсекает отрезки длины a и b на координатных осях Ox , Oy .

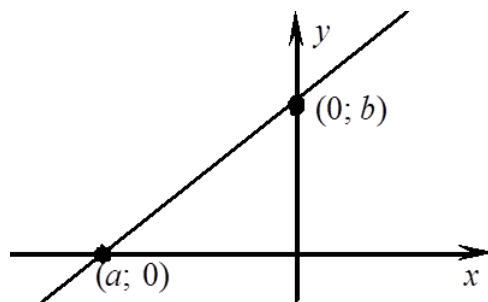


Рисунок 2 - Уравнение прямой в отрезках

Каноническое уравнение прямой

Пусть задана точка $M_o(x_o, y_o)$ и направляющий вектор $\bar{q} = (x_q, y_q)$ (Рисунок 3). Тогда для любой точки прямой координаты этих векторов пропорциональны, т.е. выполняется равенство $\overline{M_oM} \parallel \bar{q}$, преобразуя которое получаем **каноническое уравнение прямой**:

$$\frac{x - x_o}{x_q} = \frac{y - y_o}{y_q}. \quad (18)$$

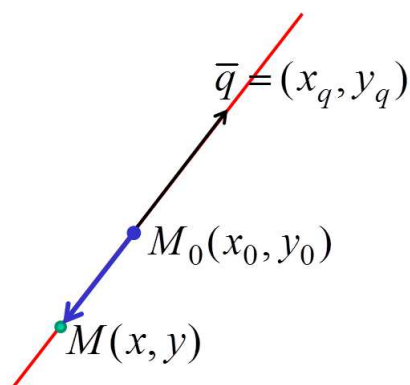


Рисунок 3 - Каноническое уравнение прямой

Уравнение "через две заданные точки"

Пусть даны две точки: $M_1(x_1, y_1)$ и точка $M_2(x_2, y_2)$ (Рисунок 4).

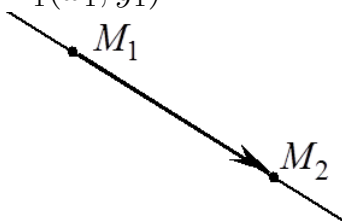


Рисунок 4 - Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

Мы можем воспользоваться каноническим уравнением (18), в качестве направляющего вектора можно взять вектор $\overline{M_1M_2}$, а в качестве "точки с прямой" $M_1(x_1, y_1)$ и получим **уравнение прямой, проходящей через две заданные точки:**

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (19)$$

Параметрические уравнения прямой

Преобразуем каноническое уравнение прямой (18):

$$\begin{aligned} \frac{x - x_o}{x_q} &= \frac{y - y_o}{y_q}, \\ \frac{x - x_o}{x_q} &= \frac{y - y_o}{y_q} = t, \\ \begin{cases} x - x_o = t x_q \\ y - y_o = t y_q, \end{cases} \end{aligned}$$

Параметрические уравнения прямой имеют вид:

$$\begin{cases} x = t x_q + x_o, \\ y = t y_q + y_o, \end{cases} \quad (20)$$

Уравнение с угловым коэффициентом

Преобразуем уравнение прямой в отрезках (17):

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= 1, \\ y &= -\frac{b}{a}x + b, \end{aligned}$$

$$k = -\frac{b}{a} \text{ - угловой коэффициент прямой,}$$

$y = kx + b$ - уравнение с угловым коэффициентом.

1.4.2 Взаимное расположение прямых

Пусть дана точка $M_o(x_o, y_o)$ и прямая $l : Ax + By + C = 0$, тогда расстояние от точки до прямой l равно длине векторной проекции любого вектора, соединяющего эту точку с прямой, на нормаль к l , (Рисунок 5):

$$\rho(M_o, l) = \text{пр}_{\vec{n}} \overline{MM_o} = \frac{|Ax_o + By_o + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (21)$$

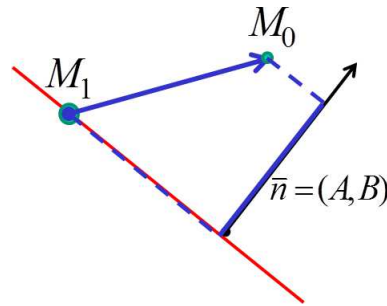


Рисунок 5 - Взаимное расположение прямых

Расстояние между параллельными прямыми можно вычислить используя формулу (21). Пусть даны две прямые l_1, l_2 , их векторы нормали \vec{n}_1, \vec{n}_2 , тогда

- 1) прямые параллельны, если их векторы нормали коллинеарны: $\vec{n}_1 = \alpha \vec{n}_2, \alpha \in \mathbb{R}$;
- 2) если прямые пересекаются, то угол φ между ними равен углу между их нормальными: $\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$.

Пусть даны две прямые l_1, l_2 и известны их направляющие векторы \vec{q}_1, \vec{q}_2 , тогда

- 1) прямые параллельны, если их направляющие векторы коллинеарны: $\vec{q}_1 = \alpha \vec{q}_2, \alpha \in \mathbb{R}$;
- 2) если прямые пересекаются, то угол φ между ними равен углу между их направляющими векторами: $\cos \varphi = \frac{\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2}{|\vec{q}_1| \cdot |\vec{q}_2|}$.

1.4.3 Плоскость в пространстве

Общее уравнение плоскости в пространстве

Дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in P$ и вектор нормали $\bar{n}_P = (A, B, C)$ (Рисунок 6). Тогда для любой точки $M \in P$, выполняется условие $\bar{n}_P \cdot \overline{M_0M} = 0$, что дает **общее уравнение плоскости в пространстве**:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (22)$$

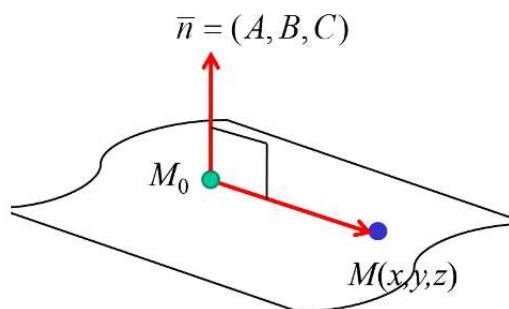


Рисунок 6 - Общее уравнение плоскости в пространстве

Уравнение плоскости в отрезках

Пусть дано общее уравнение плоскости (22): $Ax + By + Cz + D = 0$.

Если коэффициенты A, B, C, D не равны 0, то его можно привести к виду

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad (23)$$

где a, b, c отрезки, отсекаемые плоскостью на координатных осях (Рисунок 7).

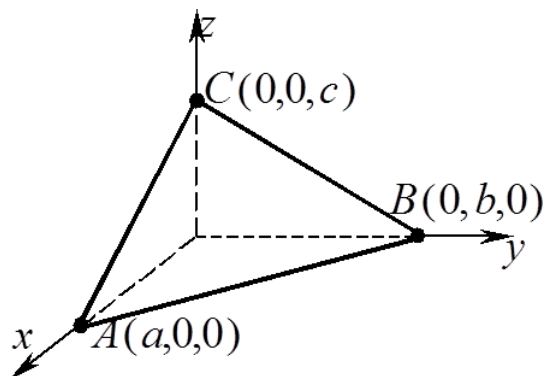


Рисунок 7 - Уравнение плоскости в отрезках

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Пусть даны три точки, принадлежащие плоскости и не лежащие на одной прямой (Рисунок 8): $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$.

Пусть $M(x, y, z)$ - произвольная точка плоскости. Тогда векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ компланарны, а значит их смешанное произведение равно нулю: $\overrightarrow{M_1M} \overrightarrow{M_1M_2} \overrightarrow{M_1M_3} = 0$

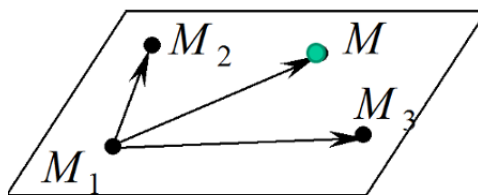


Рисунок 8 - Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

И уравнение плоскости, проходящей через три данные точки имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (24)$$

Замечание. Если вместо трёх точек заданы две точки и вектор из плоскости или точка и два вектора, то идея остается такая же - смешанное произведение равно 0.

1.4.4 Взаимное расположение плоскостей

Пусть даны общие уравнения двух плоскостей в пространстве:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Если плоскости параллельны (Рисунок 9, слева), то их нормали коллинеарны:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Если плоскости пересекаются (Рисунок 9, справа), то угол между ними равен углу между их нормальными векторами: $\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$.

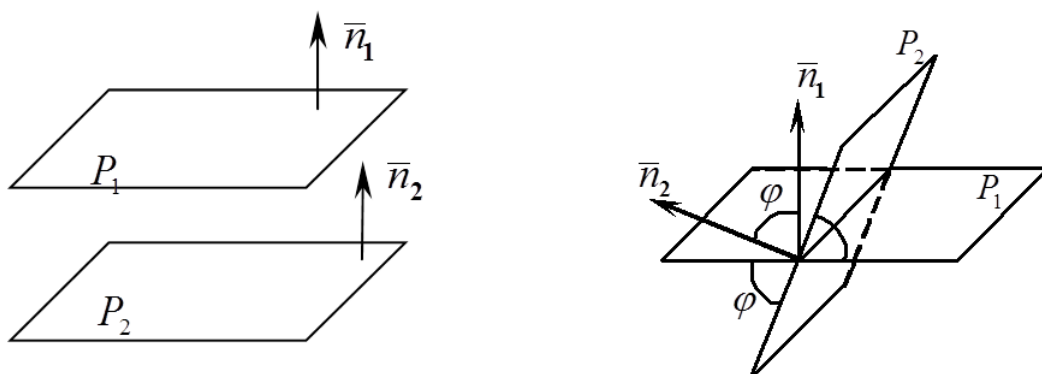


Рисунок 9 - Взаимное расположение плоскостей

1.4.5 Расстояние от точки до плоскости

Расстояние от точки $M_o(x_o, y_o, z_o)$ до плоскости $P : Ax + By + Cz + D = 0$, как и в (21), равно длине скалярной проекции любого вектора $\overline{M_oM_1}$, $M_1 \in P$ на нормаль к плоскости P :

$$d(M_o, P) = |\text{пр}_{\bar{n}} \overline{M_1M_o}| = \frac{|Ax_o + By_o + Cz_o + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (25)$$

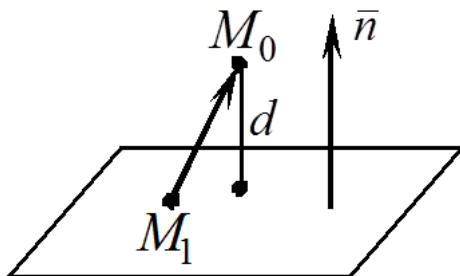


Рисунок 10 - Расстояние от точки до плоскости

1.4.6 Уравнения прямой в пространстве

Прямую в пространстве одним уравнением задать нельзя. Смириться. Необходимо ровно два уравнения. Ну в параметрическом случае - три. Поэтому везде далее используется множественное число "уравнениЯ". Следующие виды уравнений знать крайне полезно и даже необходимо.

Общие уравнения прямой.

Прямая может быть задана, как пересечение двух плоскостей:

$$l : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (26)$$

Канонические уравнения прямой

Если известна какая-либо точка $M_o(x_o, y_o, z_o)$, принадлежащая прямой и направляющий вектор прямой $\bar{q} = (x_q, y_q, z_q)$, то уравнение прямой можно записать в виде:

$$\frac{x - x_o}{x_q} = \frac{y - y_o}{y_q} = \frac{z - z_o}{z_q} \quad (27)$$

Параметрические уравнения прямой

Если известны канонические уравнения (27), то их можно быстро преобразовать в параметрические:

$$\frac{x - x_o}{x_q} = \frac{y - y_o}{y_q} = \frac{z - z_o}{z_q} = t \Rightarrow \begin{cases} x = x_o + t \cdot x_q \\ y = y_o + t \cdot y_q \\ z = z_o + t \cdot z_q \end{cases} \quad (28)$$

Уравнение "через две точки"

Пусть даны две точки: $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и точка $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Тогда, взяв в качестве направляющего вектор $\overline{M_1M_2}$, из (27) получим:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (29)$$

Переход от общих уравнений прямой к каноническим: инструкция

Пусть даны общие уравнения (22), а значит и нормали плоскостей. Для канонических уравнений требуется точка, принадлежащая прямой и направляющий вектор прямой. В качестве направляющего

вектора возьмите векторное произведение нормалей;

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \bar{q} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

в качестве "точки с прямой" — любое решение системы общих уравнений.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \sim \begin{cases} x_o := 0 \\ B_1y + C_1z = -D_1, \\ B_2y + C_2z = -D_2. \end{cases} \Rightarrow M_o(0, y_o, z_o)$$

Иногда $x = 0$ неудобно или невозможно. Пробуйте подставлять другие значения. Или вместо других переменных.

Готово. Полученные данные можно подставлять в формулу (27)

1.4.7 Расстояние от точки до прямой в пространстве

Пусть дана точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$, прямая

$$l: \frac{x - x_0}{x_q} = \frac{y - y_0}{y_q} = \frac{z - z_0}{z_q},$$

и требуется найти расстояние между ними. Для этого надо провести перпендикуляр от точки к прямой и вычислить его длину (Рисунок 11). Из уравнения прямой имеем точку, лежащую на прямой M_o и направляющий вектор \bar{q} .

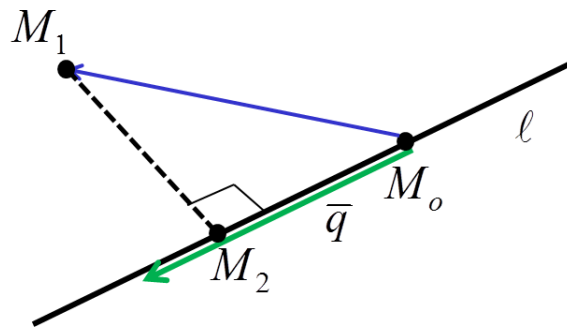


Рисунок 11 - Расстояние от точки до прямой в пространстве

Для того, чтобы найти $|\overline{M_1M_2}|$, найдём $|\overline{M_oM_1}|$, как длину вектора, затем вычислим длину скалярной проекции - $|\overline{M_oM_2}|$:

$$|\overline{M_oM_2}| = |\text{пр}_{\bar{q}} \overline{M_oM_1}|.$$

Теперь, по теореме Пифагора,

$$|\overline{M_1 M_2}| = \sqrt{|\overline{M_0 M_1}|^2 - |\overline{M_0 M_2}|^2}.$$

В общем виде:

$$\rho^2(M_1, l) = |\overline{M_o M_1}|^2 - \left(\frac{|\overline{M_o M_1} \cdot \bar{q}|}{|\bar{q}|} \right)^2. \quad (30)$$

Замечание: можно использовать формулу

$$\rho(M_1, l) = \frac{|\overline{M_o M_1} \times \bar{q}|}{|\bar{q}|}. \quad (31)$$

1.4.8 Взаимное расположение прямых в пространстве

Пусть заданы канонические уравнения прямых (27):

$$l_1 : \frac{x - x_1}{x_{q1}} = \frac{y - y_1}{y_{q1}} = \frac{z - z_1}{z_{q1}}, \quad l_2 : \frac{x - x_2}{x_{q2}} = \frac{y - y_2}{y_{q2}} = \frac{z - z_2}{z_{q2}}$$

Прямые параллельны, если их направляющие векторы коллинеарны:

$$\bar{q}_1 = \lambda \bar{q}_2, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Расстояние между параллельными прямыми — это расстояние от любой точки первой прямой до второй прямой, которое можно найти согласно (31):

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{|\overline{M_1 M_2} \times \bar{q}_1|}{|\bar{q}_1|} = \frac{|\overline{M_1 M_2} \times \bar{q}_2|}{|\bar{q}_2|}.$$

Если прямые не параллельны, то возможны два варианта: прямые скрещивающиеся или пересекающиеся. В первом случае можно найти угол и расстояние между ними, а во втором — только угол. Прямые пересекаются, если вектора $\overline{M_1 M_2}$, \bar{q}_1 , \bar{q}_2 компланарны:

$$l_1 \cap l_2 \neq \emptyset \Rightarrow \overline{M_1 M_2} \bar{q}_1 \bar{q}_2 = \begin{vmatrix} x_{q1} & y_{q1} & z_{q1} \\ x_{q2} & y_{q2} & z_{q2} \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \end{vmatrix} = 0$$

Угол между прямыми равен углу между их направляющими векторами:

$$\cos \widehat{l_1 l_2} = \frac{\bar{q}_1 \cdot \bar{q}_2}{|\bar{q}_1| \cdot |\bar{q}_2|}. \quad (32)$$

Если прямые в пространстве не параллельны и не пересекаются, то они *скрецаивающиеся*. Расстояние между скрецаивающимися прямыми — это модуль проекции любого вектора, соединяющего точки этих прямых на перпендикуляр к этим прямым (Рисунок 12):

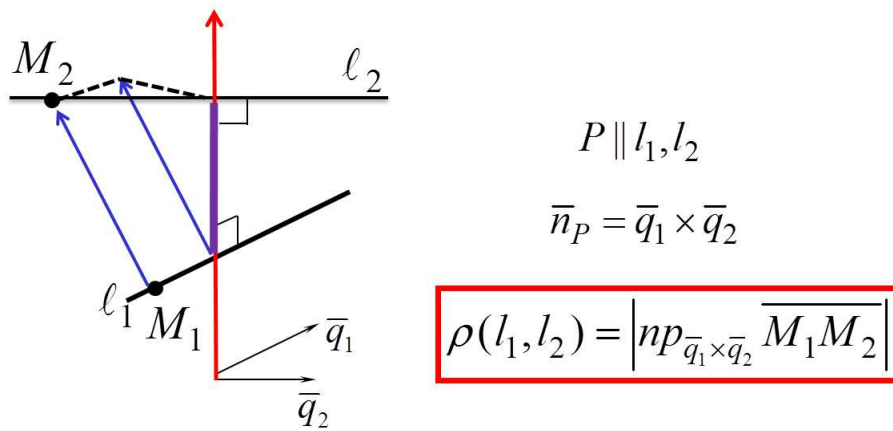


Рисунок 12 - Расстояние между скрецаивающимися прямыми

1.4.9 Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Пусть даны уравнения прямой (27) и плоскости (16):

$$l : \frac{x - x_0}{x_q} = \frac{y - y_0}{y_q} = \frac{z - z_0}{z_q} \quad P : Ax + By + Cz + D = 0.$$

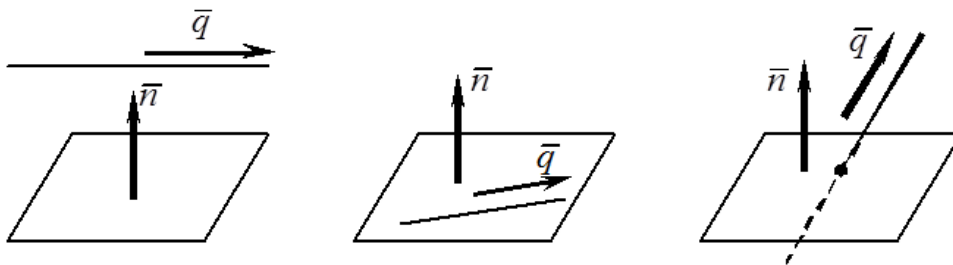


Рисунок 13 - Взаимное расположение прямой и плоскости

Взаимное расположение прямой и плоскости может быть следующим: прямая параллельна плоскости, прямая пересекает плоскость, прямая лежит в плоскости.

Если прямая параллельна плоскости, то её направляющий вектор перпендикулярен вектору нормали этой плоскости:

$$\cos \widehat{\bar{q}\bar{n}} = \frac{\bar{q} \cdot \bar{n}}{|\bar{q}| |\bar{n}|} = 0.$$

Расстояние между прямой и плоскостью равно расстоянию от любой точки прямой до плоскости (26):

$$\rho(l, P) = \rho(M_o, P) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Прямая лежит в плоскости, если она параллельна Р и расстояние до Р равно 0.

Прямая пересекает плоскость, если между ними есть угол (Рисунок 14). Угол между плоскостью и прямой можно найти зная направляющий вектор прямой и нормаль к плоскости (а их мы найдем из уравнений):

$$\begin{aligned} \cos \widehat{\bar{q}\bar{n}} &= \frac{\bar{q} \cdot \bar{n}}{|\bar{q}| |\bar{n}|} \neq 0, \\ \sin \widehat{l, P} &= \cos \widehat{\bar{q}\bar{n}} = \frac{\bar{q} \cdot \bar{n}}{|\bar{q}| |\bar{n}|}, \end{aligned}$$

Угол между прямой и плоскостью

$$\widehat{l, P} = \arcsin \left(\frac{\bar{q} \cdot \bar{n}}{|\bar{q}| |\bar{n}|} \right) \quad (33)$$

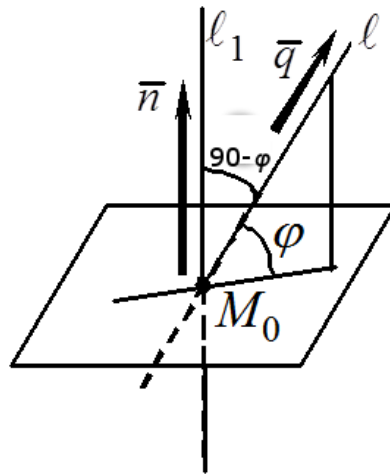


Рисунок 14 - Угол между прямой и плоскостью

1.4.10 Задания для самостоятельного решения

- 1) Заданы плоскость $P : -2x + y - z + 1 = 0$ и точка $M(1, 1, 1)$. Написать уравнение плоскости P' , проходящей через точку M параллельно плоскости P , и вычислить расстояние между плоскостями.
- 2) Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1, 2, 0)$ и $B(2, 1, 1)$ параллельно вектору $\vec{a} = (3, 0, 1)$.
- 3) Написать уравнения прямой, проходящей через две заданные точки $A(1, -2, 1)$ и $B(3, 1, -1)$.
- 4) Прямая L задана общими уравнениями:
$$\begin{cases} x + 2y - 3z - 5 = 0, \\ 2x - y + z + 2 = 0. \end{cases}$$
 Написать для нее канонические уравнения, найти направляющий вектор.
- 5) Найти координаты точки пересечения прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{1}$ с плоскостью $3x - y + 2z + 5 = 0$.

Ответы к заданиям. 1) $2x - y + z - 2 = 0$, $1/\sqrt{6}$; 2) $-x + 2y + 3z - 3 = 0$; 3) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-2}$; 4) $\vec{q} = (1, 7, 5)$; 5) $(-3; -4; 0)$.

1.5 Кривые второго порядка: геометрические и оптические свойства

1.5.1 Эллипс

Эллипс — геометрическое место точек (ГМТ) плоскости, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек - фокусов F_1, F_2 , постоянна (равна $2a$):

$$|\overline{F_1M}| + |\overline{F_2M}| = 2a.$$

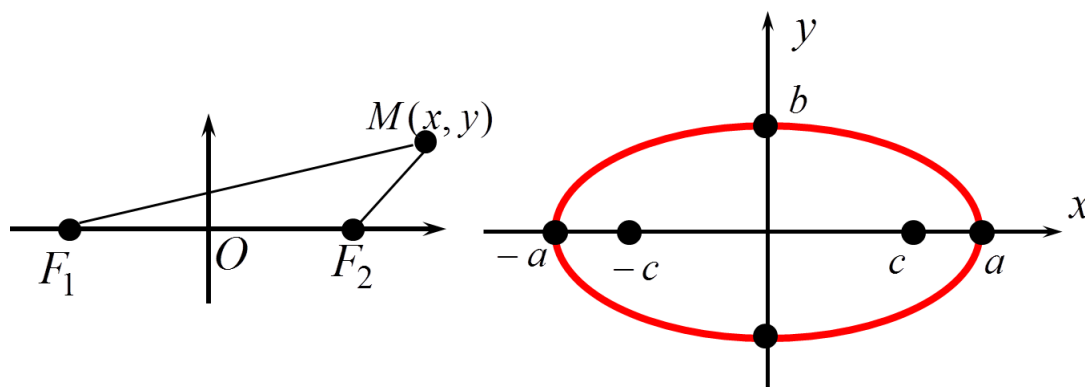


Рисунок 15 - Эллипс

Введем систему координат (Рисунок 15) и запишем уравнение в координатной форме:

$$\begin{aligned}
 |(x+c, y)| + |(x-c, y)| &= 2a, \\
 \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a, \\
 \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} &= 1, \\
 \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1, \quad c^2 = a^2 - b^2,
 \end{aligned} \tag{34}$$

где a , b - большая и малая полуоси, $e = \frac{c}{a}$ - эксцентриситет эллипса.

1.5.2 Гипербола

Гипербола — ГМТ плоскости, разность расстояний от которых до двух фиксированных точек - фокусов F_1 , F_2 постоянна и равна $2a$ (Рисунок 16).

$$||\overline{F_1 M}| - |\overline{F_2 M}|| = 2a.$$

В координатной форме уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad c^2 = a^2 + b^2. \tag{35}$$

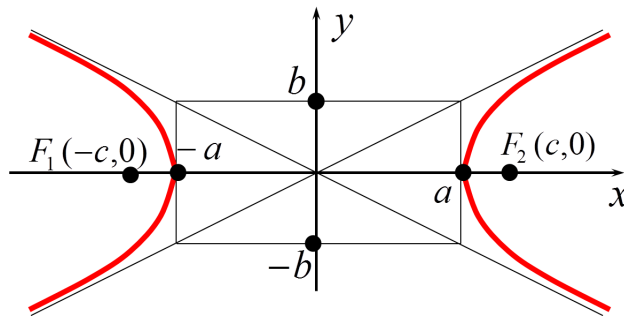


Рисунок 16 - Гипербола

$y = \pm \frac{b}{a}x$ - асимптоты гиперболы, $e = \frac{c}{a}$ - эксцентриситет.

1.5.3 Парабола

Парабола — ГМТ плоскости, расстояние от которых до фиксированной прямой d и до фиксированной точки F ($F \notin d$) одинаково (Рисунок 17); F — фокус параболы, d — директриса.

Уравнение в координатной форме:

$$y^2 = 2px \quad (36)$$

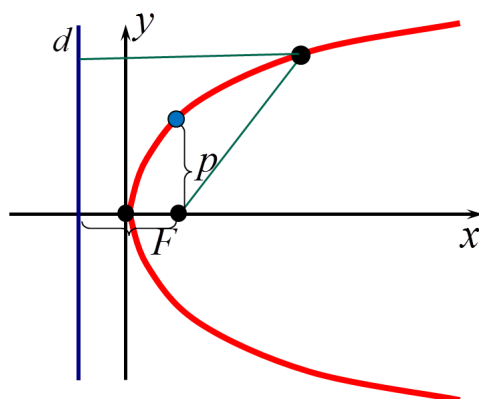


Рисунок 17 - Парабола

1.5.4 Оптические свойства

Если источник света находится в фокусе *эллиптического* зеркала, то лучи, отразившись от зеркала, собираются в другом фокусе (Рисунок 18, слева).

Если источник света находится в фокусе *гиперболического* зеркала, то лучи, отразившись от зеркала, идут так, как если бы они исходили из другого фокуса (Рисунок 18, в центре).

Если источник света находится в фокусе *параболического* зеркала, то лучи, отразившись от зеркала, идут параллельно оси (Рисунок 18, справа).

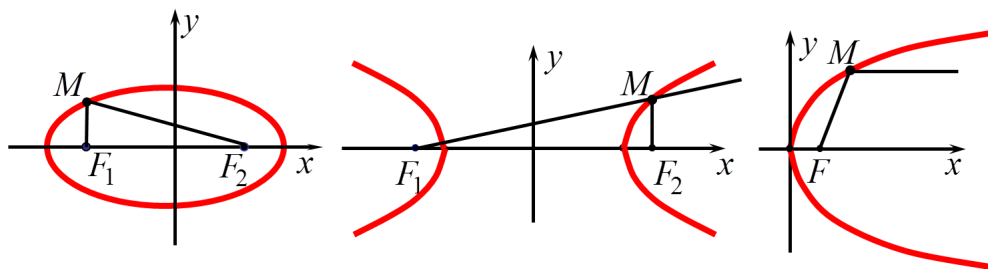


Рисунок 18 - Оптические свойства кривых второго порядка

1.5.5 Задания для самостоятельного решения

Написать каноническое уравнение эллипса, если

- 1) $a = 3, b = 2$;
- 2) $a = 5, c = 4$;
- 3) $c = 3, e = 3/5$;
- 4) $b = 5, e = 12/13$.

Написать каноническое уравнение гиперболы, если

- 5) $a = 2, b = 3$;
- 6) $b = 4, c = 5$;
- 7) $c = 3, e = 3/2$;
- 8) $a = 8, e = 5/4$;
- 9) $c = 10$ и уравнения асимптот $y = \pm \frac{4}{3}x$.

Ответы к заданиям: 1) $x^2/9 + y^2/4 = 1$; 2) $x^2/25 + y^2/9 = 1$;
3) $x^2/25 + y^2/16 = 1$; 4) $x^2/169 + y^2/25 = 1$. 5) $x^2/4 - y^2/9 = 1$;
6) $x^2/9 - y^2/16 = 1$; 7) $x^2/4 - y^2/5 = 1$; 8) $x^2/64 - y^2/36 = 1$; 9)
 $x^2/36 - y^2/64 = 1$.

1.6 Поверхности второго порядка

Поверхность второго порядка задаёт уравнение вида

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0.$$

С помощью линейной замены можно избавиться от смешанных слагаемых и привести уравнение к одному из следующих видов:

- 1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$;
- 2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$;
- 3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$;
- 4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$;
- 5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$;
- 6) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$;

7) одна из переменных полностью отсутствует

На рисунках 19-23 представлены уравнения основных поверхностей второго порядка и их схематические изображения.

1.6.1 Эллипсоид

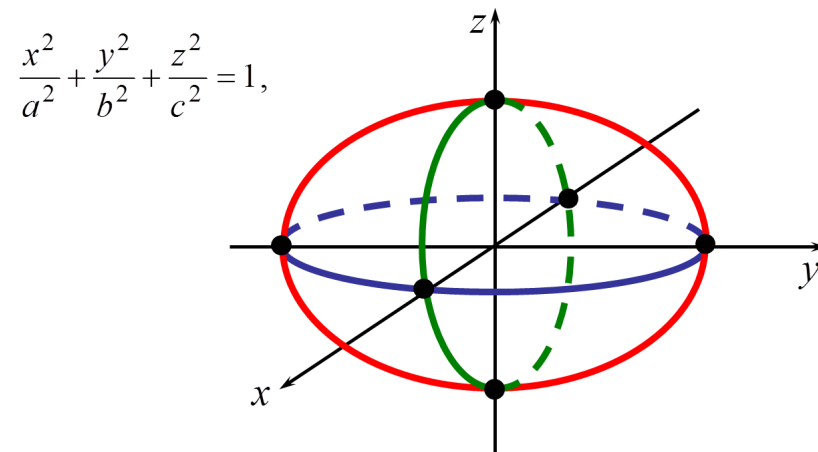


Рисунок 19 - Эллипсоид

1.6.2 Гиперболоиды: однополостный и двуполостный

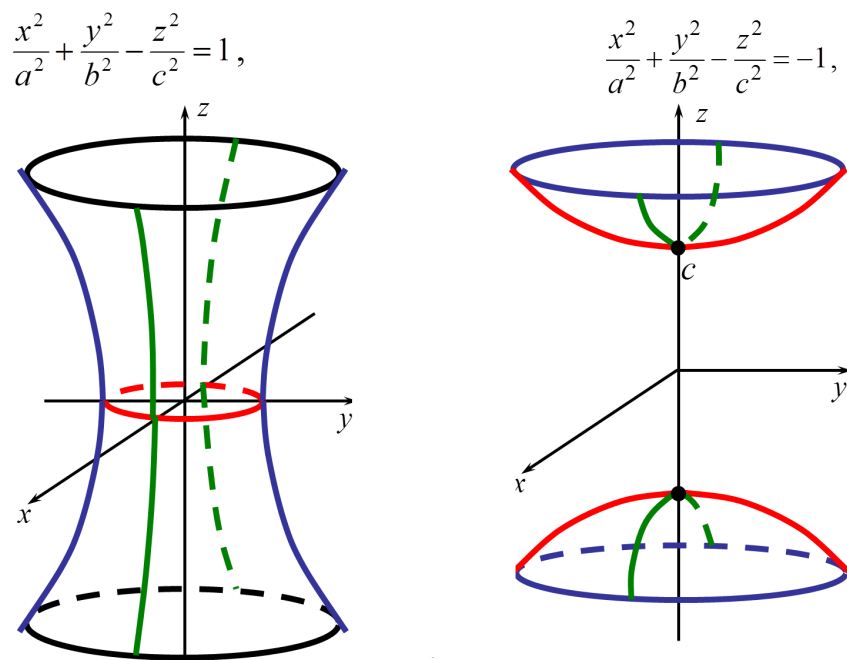


Рисунок 20 - Примеры гиперboloидов

1.6.3 Конус

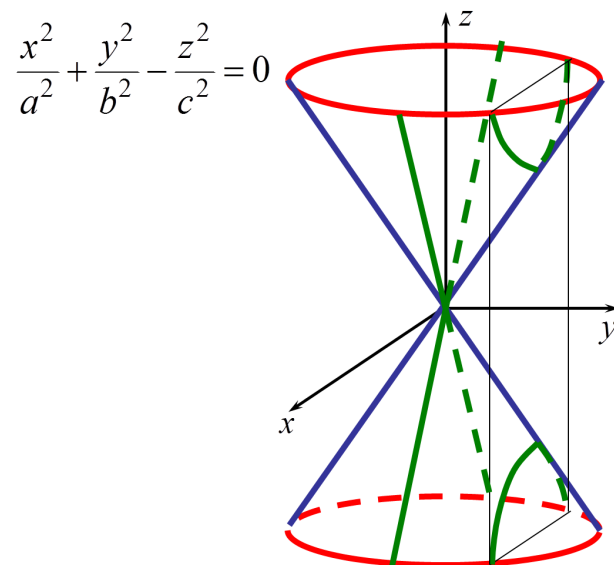


Рисунок 21 - Конус

1.6.4 Параболоиды: эллиптический и гиперболический

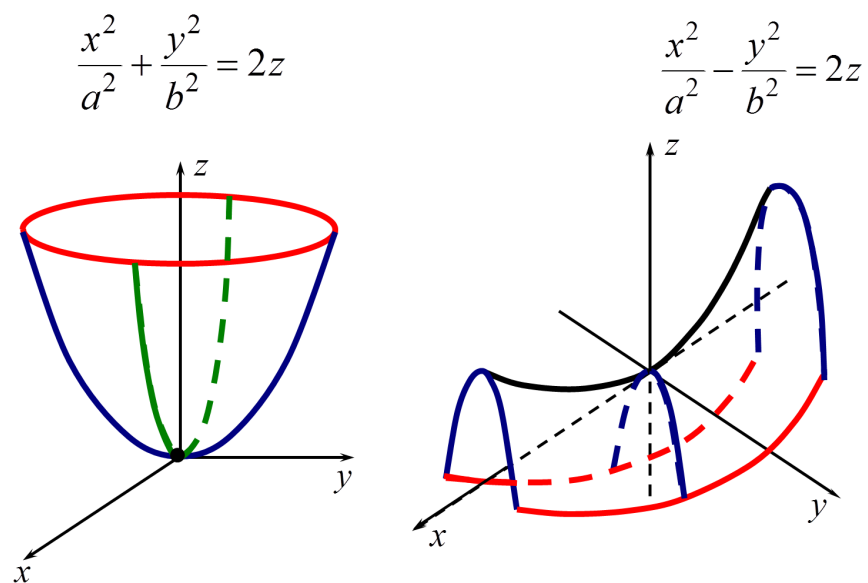


Рисунок 22 - Примеры параболоидов

1.6.5 Цилиндры

Цилиндрическая поверхность — поверхность, которую описывает прямая (образующая), перемещающаяся вдоль некоторой плоской кривой (направляющей).

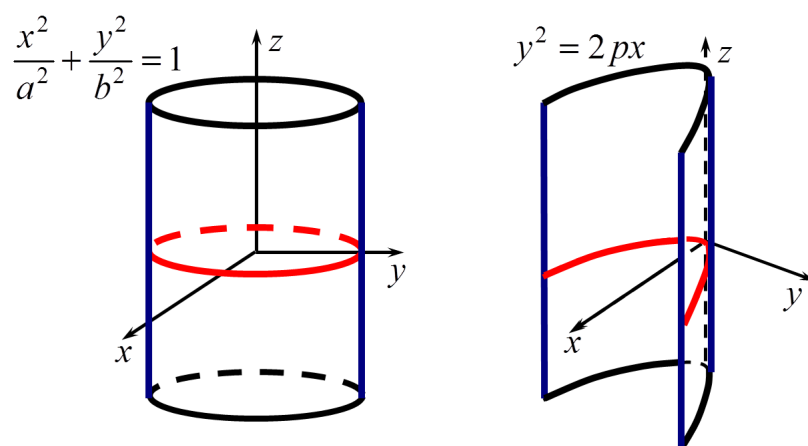


Рисунок 23 - Цилиндрические поверхности

На левом рисунке 23 направляющая - эллипс; на правом - парабола.

1.7 Вопросы для самопроверки к разделу 1

1. Что такое числовая матрица?
2. Как находят сумму и разность матриц?
3. Как производится операция умножения матрицы на число?
4. Что называется транспонированием матрицы?
5. Что называется главной диагональю квадратной матрицы?
6. Какие бывают специальные виды матриц?
7. Что такое обратная матрица?
8. Как вычисляется определитель матрицы 2го порядка?
9. Как вычисляется определитель матрицы 3го порядка?
10. Как вычисляется определитель матрицы 4го и выше порядка?
11. Какие вы знаете свойства определителя?
12. Что такое минор к-го порядка матрицы?
13. Как определяется алгебраическое дополнение элемента матрицы?
14. Как вычисляется обратная матрица?
15. Что такое СЛУ?
16. Что такое расширенная матрица СЛУ?
17. В чем заключается метод Крамера?
18. В чем заключается метод Гаусса?
19. Какие бывают типы СЛУ?
20. Что такое совместная СЛУ?

21. Что такое определенная СЛУ?
22. Что такое ранг матрицы?
23. Какая связь между рангом матрицы и совместностью СЛУ?
24. Что такое вектор?
25. Что такое проекция вектора на ось?
26. Что такое коллинеарные векторы?
27. Что такое компланарные векторы?
28. Что такое радиус-вектор?
29. Как определяется сумма/разность векторов?
30. Как определяется угол между векторами?
31. Что такое базис?
32. Что называют разложением вектора по базису?
33. Что такое декартова система координат?
34. Что такое орт?
35. Как определяются координаты вектора?
36. Как вычисляется косинус угла между векторами?
37. Что такое направляющие косинусы вектора?
38. Что такое скалярное произведение векторов?
39. Как вычисляется скалярное произведение в координатной форме?
40. Какие вы знаете свойства скалярного произведения?
41. Что такое векторное произведение векторов?
42. Как вычисляется векторное произведение в координатной форме?
43. Что такое смешанное произведение векторов?
44. Какие вы знаете свойства векторного произведения?
45. Какие вы знаете свойства смешанного произведения?
46. Что такое левая/правая тройка векторов?
47. Как задается линия на плоскости?
48. Как задается поверхность?
49. Как определяется линия в пространстве?
50. Как находится точка пересечения двух линий на плоскости?
51. Как находится точка пересечения линии и поверхности?
52. Что называется направляющим вектором прямой?
53. Что называется нормальным вектором прямой на плоскости?
54. Какие бывают типы уравнений прямой на плоскости?

55. Какие существуют случаи взаимного расположения двух прямых на плоскости?
56. Как определяется угол между двумя прямыми?
57. Как формулируется условие параллельности двух прямых на плоскости?
58. Как формулируется условие перпендикулярности двух прямых на плоскости?
59. Что называется нормальным вектором плоскости?
60. Какие бывают типы уравнений плоскости и какие параметры содержит каждое из них?
61. Какие существуют случаи взаимного расположения двух плоскостей?
62. Как определяется угол между двумя плоскостями?
63. Как формулируется условие параллельности двух плоскостей?
64. Как формулируется условие перпендикулярности двух плоскостей?
65. Какие бывают типы уравнений прямой в пространстве?
66. Какие существуют случаи взаимного расположения двух прямых в пространстве?
67. Как определяется угол между двумя прямыми в пространстве?
68. Какие существуют случаи взаимного расположения прямой и плоскости?
69. Как формулируется условие параллельности прямой и плоскости?
70. Как формулируется условие перпендикулярности прямой и плоскости?
71. Как находится точка пересечения прямой и плоскости?
72. Как определяется угол между прямой и плоскостью?
73. Какие кривые на плоскости являются кривыми второго порядка?
74. Какие параметры содержат канонические уравнения кривых второго порядка?
75. Сколько вершин у каждой кривой второго порядка?
76. Сколько фокусов у каждой кривой второго порядка?

77. Сколько осей симметрии у каждой кривой второго порядка?
78. Какие свойства кривых второго порядка связаны с их фокусами (фокальные свойства)?

2 Функции. Предел и непрерывность

2.1 Понятие функции. Основные элементарные функции. Предел функции в точке. Односторонние пределы. Бесконечно большая и бесконечно малая функции

Содержание следующих разделов - базовые "школьные" сведения, которые необходимо освежить в памяти перед изучением более сложных свойств и теорем.

2.1.1 Основные определения

Функция — правило, по которому переменной x соответствует определённое значение другой переменной y . При этом, $y = y(x)$ — **зависимая переменная** или **функция**, x — **независимая переменная** или **аргумент** функции.

Кроме того, используются следующие обозначения: $D(f)$ — **область определения** — значения аргумента, для которых определяются значения функции. $E(f)$ — **множество значений** зависимой переменной.

Естественная область определения — множество всех значений аргумента, при которых функция принимает действительные значения.

2.1.2 Типы функций

Четная функция удовлетворяет условию $f(-x) = f(x)$.

Нечетная функция удовлетворяет условию $f(-x) = -f(x)$.

Периодическая функция удовлетворяет условию $f(x+T) = f(x)$, где T — период функции.

Возрастающая функция — функция, у которой при возрастании аргумента возрастает и значение функции:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Убывающая функция — функция, у которой при убывании аргумента убывает и значение функции: $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Монотонная функция — функция, которая только возрастает или только убывает на всей области определения.

Ограниченная в области D функция — функция, значения которой не превосходят по абсолютной величине некоторого фиксированного конечного числа: $\exists A > 0 \mid |f(x)| \leq A, \forall x \in D(f)$.

Взаимно-однозначная функция — функция, у которой каждому значению y соответствует только одно значение аргумента x .

2.1.3 Способы задания функции

Аналитически функция может быть представлена в виде:

а) **явном:** $y = f(x)$;

б) **неявном:** $F(x, y) = 0$;

в) **параметрическом:** $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t); \end{cases}$

г) **разными формулами в области определения $(a, c]$:**

$$\begin{cases} f_1(x), & a < x \leq b; \\ f_2(x), & b < x \leq c; \end{cases}$$

График функции $f(x)$ — множество точек плоскости $(x, f(x))$.

Сложная функция — функция, аргумент которой также является функцией: $y = f(g(x))$, где $y = f(u)$, $u = g(x)$.

Взаимно-обратные функции — функции, последовательное действие которых на аргумент не приводит к его изменению на всей области определения: $x = f(f^{-1}(x))$.

2.1.4 Основные элементарные функции

● **Степенная функция:** $y = x^a, a \in \mathbb{R}$.

- **Показательная функция:** $y = a^x$, $0 < a < 1$, $a > 1$.

в частности, **экспонента:** $y = e^x$, где $e \approx 2,7183$ — число Эйлера.

- **Логарифмическая функция:** $y = \log_a x$, $0 < a < 1$, $a > 1$.

- **Тригонометрические функции:**

$$y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x.$$

- **Обратные тригонометрические функции:**

$$y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arcctg} x.$$

2.2 Основные теоремы о пределах. «Замечательные» пределы. Эквивалентности

2.2.1 Определение предела

Предел функции $y = f(x)$ при x стремящемся к x_o — это число A такое, что для любого сколь угодно малого значения $\varepsilon > 0$ найдется такое число δ , что для всех значений, отличных от x_o не более чем на δ , (кроме, может быть, самой точки x_o) все соответствующие значения функции отличаются от A не более чем на ε .

Далее нам понадобятся следующие обозначения:

- $0 < |x - x_o| < \delta$ — δ -окрестность точки x_o ("дельта-окрестность");
- $0 < x - x_o < \delta$ — правая полуокрестность точки x_o ;
- $0 < x_o - x < \delta$ — левая полуокрестность точки x_o ;
- $\lim_{x \rightarrow x_o}$ — "предел при x стремящемся к x_o ";
- \forall — квантор всеобщности ("для любого");
- \exists — квантор существования ("найдётся").

Теперь определение предела можно сформулировать более компактно:

$$A = \lim_{x \rightarrow x_o} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (0 < |x - x_o| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon). \quad (37)$$

2.2.2 Односторонние пределы

Число A_- — **предел функции** $y = f(x)$ **при** $x \rightarrow x_o$ **слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (0 < x_o - x < \delta \Rightarrow |f(x) - A_-| < \varepsilon).$$

Число A_+ — **предел функции** $y = f(x)$ **при** $x \rightarrow x_o$ **справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (0 < x - x_o < \delta \Rightarrow |f(x) - A_+| < \varepsilon).$$

Число A — **предел функции** $y = f(x)$ **при** $x \rightarrow \infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists R > 0 (x > R \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

Иногда используется следующая терминология:

$$A_- = \lim_{x \rightarrow x_o - 0} f(x) \text{ — левый предел в точке;}$$

$$A_+ = \lim_{x \rightarrow x_o + 0} f(x) \text{ — правый предел в точке;}$$

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \text{ — предел функции на бесконечности.}$$

2.2.3 Бесконечно малые и бесконечно большие величины

Величины, стремящиеся к нулю или бесконечности представляют особый интерес. Например, если числитель и знаменатель некоторой дроби стремятся к нулю, то как найти предел самой дроби? Или если и числитель и знаменатель стремятся к бесконечности? Именно в таких случаях задача вычисления предела становится непростой.

Величина (функция) $f(x)$ **бесконечно большая** (б.б.в.) при $x \rightarrow x_o$, если $\lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = \infty$:

$$\forall M : 0 < M < \infty \exists \delta > 0 (0 < |x - x_o| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M)$$

Величина (функция) $f(x)$ **бесконечно малая** (б.м.в.) при $x \rightarrow x_o$, если $\lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = 0$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (0 < |x - x_o| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$$

Величины $f(x)$ и $g(x)$ **одного порядка** при $x \rightarrow x_o$, если

$$\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = C,$$

$C = \text{const}, C \neq 0. f(x) = O(g(x)),$ ("о большое")

Величины $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны ($f(x) \sim g(x)$) при $x \rightarrow x_o$, если

$$\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Говорят, что $f(x)$ — б.м.в. **более высокого порядка** малости, чем $g(x)$ при $x \rightarrow x_o$, если $\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, f(x) = o(g(x))$ (читать "о малое").

2.2.4 Арифметические свойства пределов

Из определения (37) вытекают следующие свойства.

1. Предел суммы равен сумме пределов:

$$(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x). \quad (38)$$

2. Предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x). \quad (39)$$

3. Предел частного равен частному пределов, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0. \quad (40)$$

4. Числовой множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{x \rightarrow a} C f(x) = C \lim_{x \rightarrow a} f(x). \quad (41)$$

2.2.5 Основные теоремы о пределах

Основные теоремы о пределах Из свойств (38)-(41) и определения (37) не совсем очевидно, но всё же доступно, вытекают следующие теоремы.

- **Теорема 1. (о единственности предела)** Если предел существует, то он единственный.

- **Теорема 2. (о пределе монотонной функции)** Если функция $f(x)$ монотонна и ограничена при $x < a$ и/или при $x > a$, то существует, соответственно, её левый и/или правый пределы.
- **Теорема 3. (о предельном переходе в равенстве)** Если две функции равны в окрестности некоторой точки, то их пределы в этой точке равны:

$$f(x) = g(x), \quad |x - a| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

- **Теорема 4. (о предельном переходе в неравенстве)** Если значения функции $f(x)$ в окрестности точки не больше соответствующих значений $g(x)$, то предел $f(x)$ в этой точке не больше предела $g(x)$:

$$f(x) \leq g(x), \quad |x - a| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

- **Теорема 5. (о двух милиционерах)** Если значения функции заключены между значениями двух других функций, стремящихся к одному и тому же пределу в некоторой точке, то эта функция в данной точке имеет этот же предел:

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = b \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

- **Теорема 6. (о связи бесконечно малой с пределом)** Функцию в окрестности точки можно представить как сумму её предела в этой точке и бесконечно малой.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0.$$

- **Теорема 7. (о связи б.м.в. и б.б.в.)**

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\alpha(x)} = \infty.$$

2.2.6 Вычисление пределов. Неопределенности

При вычислении пределов возможны следующие ситуации.

- Если точка лежит в ОДЗ функции, то для вычисления предела в этой точке достаточно подставить её в формулу.

- Если при подстановке возникают проблемы вида:

$$\infty \cdot C, C \neq 0 \quad \infty + C, \quad \frac{\infty}{C}, \quad \infty + \infty, \quad \infty^\infty, \quad \frac{C}{\infty}, \quad C = \text{const}$$

то это не проблемы вовсе.

- Если при подстановке возникают проблемы вида:

$$\infty \cdot 0, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty^0, \quad 0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty - \infty$$

то это действительно проблемы.

И имя им **неопределённости**. Их **раскрывают**.

2.2.7 Первый замечательный предел

Рассмотрим угол величины $x \rightarrow 0$ на единичной окружности (Рисунок 24) и площади треугольников и секторов.

$$S_{\Delta OKH} < S_{\angle OKA} < S_{\Delta OLA},$$

$$\begin{aligned} \frac{OH \cdot KH}{2} &< \frac{\pi \cdot OA^2 \cdot x}{2\pi} < \frac{OA \cdot LA}{2}, \\ \frac{\cos x \cdot \sin x}{2} &< \frac{1^2 \cdot x}{2} < \frac{1 \cdot \operatorname{tg} x}{2} \quad \left| \cdot \frac{2}{\sin x} \right. \\ \cos x &< \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \end{aligned}$$

так как $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$,

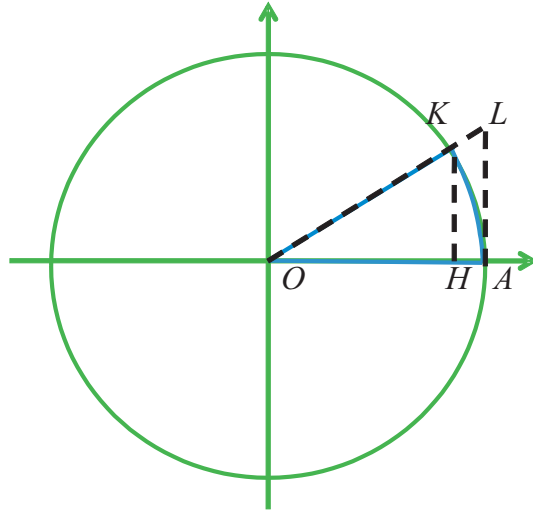


Рисунок 24 - Первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (42)$$

Первый замечательный предел (42) позволяет использовать в дальнейшем следующие эквивалентности:

$$\sin(x) \sim x, \quad \operatorname{tg} x \sim x, \quad \operatorname{arctg} x \sim x, \quad \cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}.$$

2.2.8 Второй замечательный предел

$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,72$ — число Эйлера (определение), $n \in \mathbb{N}$.

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Переходим к пределу: $\frac{e}{1} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq e \cdot 1$, по теореме "о двух милиционерах" получим:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad (43)$$

или

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \quad (44)$$

Второй замечательный предел (44) позволяет использовать следующие эквивалентности:

$$\ln(1+x) \sim x, \quad e^x \sim 1+x.$$

2.3 Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация. Основные теоремы

2.3.1 Определение непрерывности

Функция $f(x)$ **непрерывна** в некоторой точке x_o , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (0 \leq |x - x_o| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_o)| < \varepsilon), \quad (45)$$

т.е. предел функции (37) существует в этой точке и равен значению функции в этой точке: $\lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = f(x_o)$.

Условия непрерывности функции в точке. Функция непрерывна в точке, если выполняются **все** условия:

- 1) функция определена в данной точке;
- 2) существует и конечен левосторонний предел в этой точке;
- 3) существует и конечен правосторонний предел в этой точке;
- 4) односторонние пределы равны друг другу;
- 5) односторонние пределы равны значению функции в точке.

Функция непрерывна справа (слева) в точке, если предел справа (слева) в точке существует и равен значению функции.

Функция непрерывна на промежутке, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

2.3.2 Точки разрыва

Точка, в которой функция не является непрерывной, называется **точкой разрыва** этой функции. Различают следующие виды точек разрыва.

- т. x_o — **точка устранимого разрыва** $f(x)$, если предел $f(x)$ в т. x_o существует, но не равен $f(x_o)$ (не выполняется условие 1) и/или 5), рисунок 26)

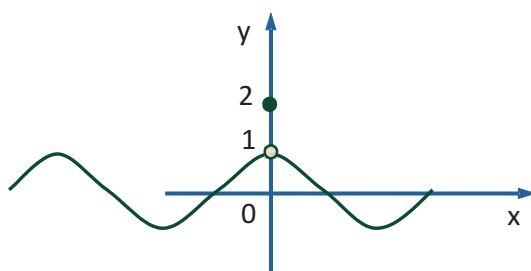


Рисунок 26 - Пример точки устранимого разрыва

- Точка x_o — **точка разрыва 1го рода (скачок)** $f(x)$, если односторонние пределы в т. x_o существуют, но не равны друг другу (не выполняется условие 4), рисунок 27).

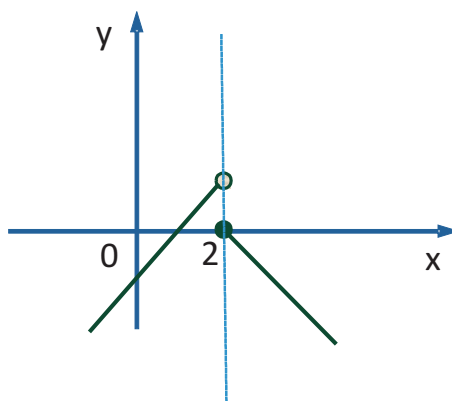


Рисунок 27 - Пример точки разрыва 1-го рода

- Точка x_o — **точка разрыва 2го рода**, во всех остальных случаях (не выполняется условие 2) и/или 3), рисунок 28).

Точка x_o — **точка бесконечного разрыва**, если какой-либо из односторонних пределов равен ∞ .

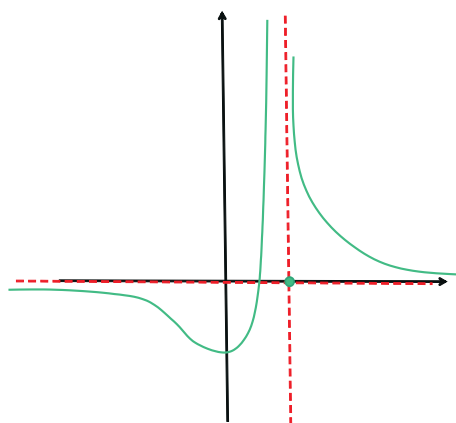


Рисунок 28 - Пример точки разрыва 2-го рода

2.3.3 Непрерывность функции на отрезке

- Теорема Вейерштрасса (о наибольшем и наименьшем).**
 Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значения (Рисунок 29, слева).
- Теорема Больцано – Коши (о промежуточных).** Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на его концах значения $f(a) = A$, $f(b) = B$, то на этом отрезке она принимает все значения между A и B (Рисунок 29, в центре).
- Следствие (о нуле).** Если $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на его концах значения разных знаков, то внутри отрезка найдется хотя бы одна точка c , в которой функция обращается в ноль: $f(c) = 0$ (Рисунок 29, справа).

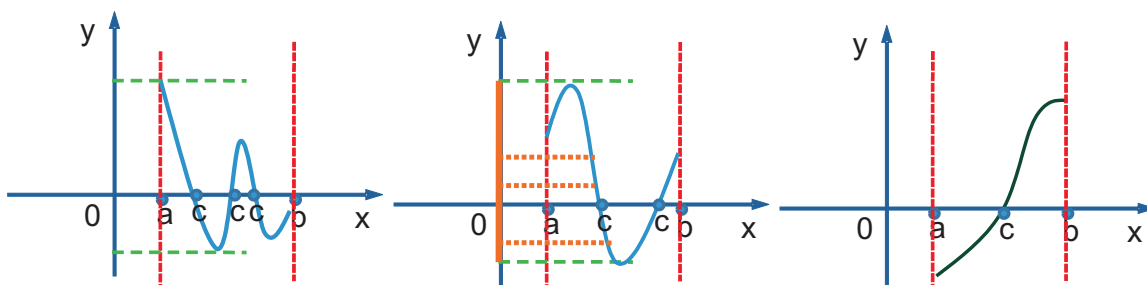


Рисунок 29 - Иллюстрации теорем непрерывности

2.4 Приёмы вычисления пределов

Для раскрытия неопределённостей при вычислении пределов используются различные приёмы: преобразование выражения, использование эквивалентностей, применение "замечательных" пределов, а так же комбинация всех упомянутых выше. Кроме того, для вычисления пределов можно использовать правило Лопиталя, которое будет изложено в следующем разделе.

2.5 Задания для самостоятельного решения

Вычислить пределы:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2}{3x^2 - 5x + 1}.$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2 - x} - \frac{3}{8 - x^3} \right).$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}.$
- 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1} \right).$
- 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 1}{5x + \sqrt[3]{x}}.$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{x^2 + 9} - 3}.$
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} kx}{x}.$
- 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x}{3x}.$
- 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin 2x}.$
- 10) $\lim_{x \rightarrow \alpha} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2\alpha} \sin \frac{x - \alpha}{2}.$

Ответы к заданиям: 1) -2 ; 2) ∞ ; 3) 6 ; 4) $1/4$; 5) $3/5$; 6) $3/2$;
7) k ; 8) $2/3$; 9) $3/4$; 10) $-\frac{\alpha}{\pi}.$

2.6 Вопросы для самопроверки к разделу 2

1. Что такое функция одной переменной?
2. Какие существуют способы задания функции?

3. Что такое область определения и значений функции?
4. Какая функция чётная? Нечётная?
5. Какие существуют основные элементарные функции?
6. Как определяется предел функции в точке?
7. Как определяется предел функции на бесконечности?
8. Как определяются односторонние пределы?
9. Какие существуют свойства пределов?
10. Какие отношения называются неопределённостями?
11. Что такое б.б.в.?
12. Что такое б.м.в.?
13. Как формулируются основные теоремы о пределах?
14. Как формулируется первый замечательный предел?
15. Как формулируется второй замечательный предел?
16. Как формулируется определение непрерывности?
17. Какие бывают точки разрыва?
18. Каковы условия непрерывности функции в точке?
19. Как формулируются теоремы о непрерывности функции?

3 Производная функции

3.1 Определение производной. Производные суммы, произведения и частного. Производная сложной функции. Производные основных элементарных функций

3.1.1 Определение производной

Производная функции в точке - это предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента:

$$f'(x_o) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_o)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}. \quad (46)$$

Составим уравнение прямой, проходящей через точки $M_0(x_o, f(x_o))$, $S(x_o + \Delta x, f(x_o + \Delta x))$,

$$l_{M_0 S} : \frac{x - x_o}{x_o + \Delta x - x_o} = \frac{y - f(x_o)}{f(x_o) - f(x_o + \Delta x)},$$

$$f(x_o) + \frac{f(x_o) - f(x_o + \Delta x)}{\Delta x(x - x_o)} = y.$$

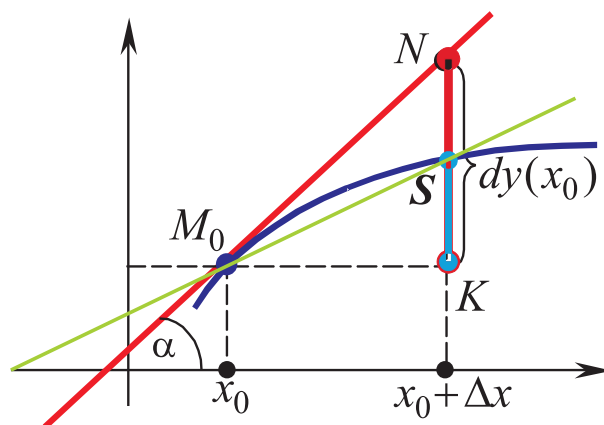


Рисунок 30 - Геометрический смысл производной

При сближении точек секущая приближается к касательной (Рисунок 30) $M_0S \rightarrow M_0N$, а дробь во втором слагаемом левой части приближается к производной (согласно определению (46)), и, получаем уравнение касательной к графику функции в заданной точке:

$$y_{кас} = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0). \quad (47)$$

Геометрический смысл производной: $f'(x_o)$ – угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_o(x_o; f(x_o))$ ($f'(x_o) = \operatorname{tg} \alpha$).

Физический смысл производной: $f'(x)$ – скорость изменения $y = f(x)$ относительно x .

Односторонние производные определяются следующим образом:

$$f'_+(x_o) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta f(x_o)}{\Delta x} \quad f'_-(x_o) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta f(x_o)}{\Delta x}$$

Функция дифференцируема в точке, если её производная определена в этой точке и некоторой её окрестности.

Теорема о непрерывности дифференцируемой функции. Если функция дифференцируема в точке, то функция в этой точке непрерывна.

3.1.2 Правила дифференцирования

- 1• $C' = 0, C = const;$
- 2• $(u \pm v)' = u' \pm v';$
- 3• $(uv)' = u'v + v'u, C = const;$
- 4• $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2};$
- 5• $(u(v(x)))'_x = u'_v v'_x.$

3.1.3 Таблица производных

Далее представлены производные основных элементарных функций (частично с обоснованием).

- 1• $(\ln(x))' = \frac{1}{x},$

$$\Delta x \rightarrow 0, \quad \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} \sim \frac{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} \rightarrow \frac{1}{x},$$

$$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \Rightarrow f'(x) = f(x) \cdot (\ln f(x))'.$$

Логарифмическое дифференцирование - это стильно!

- 2• $(x^n)' = nx^{n-1},$

$$(x^n)' = x^n \cdot (\ln x^n)' = x^n (n \ln x)' = x^n \cdot n \cdot \frac{1}{x} = nx^{n-1}.$$

- 3• $(a^x)' = a^x \ln a, a > 0, a \neq 1;$

$$(a^x)' = a^x \cdot (\ln a^x)' = a^x (x \ln a)' = a^x \ln a.$$

- 4• $(\sin x)' = \cos x,$

$$\begin{aligned} \Delta x \rightarrow 0, \quad \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} &= \frac{\sin x \cos \Delta x - \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} = \\ &= \frac{\sin x (\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} - \frac{\cos x \sin \Delta x}{\Delta x} \sim \frac{\sin x \frac{(\Delta x)^2}{2}}{\Delta x} - \cos x \cdot 1 \rightarrow \cos x. \end{aligned}$$

$$\bullet 5 \bullet (\cos x)' = -\sin x,$$

$$\bullet 6 \bullet (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$\bullet 7 \bullet (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$\bullet 8 \bullet (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$x = \sin y, \quad x'_y = \cos y,$$

$$y = \arcsin x, \quad y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\bullet 9 \bullet (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\bullet 10 \bullet (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\bullet 11 \bullet (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

3.2 Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций. Дифференциал функции. Производные высших порядков

3.2.1 Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций

Для вычисления производной взаимно обратных функций, т.е. функций вида $y = u(x)$, $x = v(y)$, можно использовать соотношение

$$u'_v = \frac{1}{v'_u}.$$

Пример 1. Найти y'_x , если $y = \sin x$, $x = \arcsin y$.

$$y' = \cos x,$$

$$x' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Если функция задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, то её производная вычисляется по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Пример 2. Найти y'_x , если $y = \sin t$, $x = t + \cos t$.

$$y'_t = \cos t, \quad x'_t = 1 - \sin t, \quad y'_x = \frac{\cos t}{1 - \sin t}.$$

Если функция задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$, то её производную находят из соотношения $F'(x, y) = 0$, дифференцируя это выражение как сложную функцию с неизвестным y' , которое затем выражается линейным образом через переменные x и y .

Пример 3. Найти y'_x , если $x^2 + y^2 = 8$.

$$(x^2 + y^2)' = 8', \quad 2x + 2y \cdot y' = 0, \quad y' = -x/y.$$

3.2.2 Дифференциал функции

Дифференциал функции $y = f(x)$ - это линейная часть приращения функции при переходе от точки x_o к точке $x_o + \Delta x$:

$$df = f'(x_o)\Delta x. \quad (48)$$

Фактически, дифференциал (48) равен приращению касательной (47) к графику функции в точке x_o . С помощью дифференциала функции можно приближенно вычислять её приращение:

$$f(b) - f(a) \approx f'(a)(b - a),$$

чем ближе точки a и b , тем точнее результат.

Кроме того, можно использовать эту формулу для приближенного вычисления значения функции в точке, например, вычислим приближенно $\sqrt{10}$:

$$\sqrt{10} - \sqrt{9} \approx \frac{1}{2\sqrt{9}} \cdot (10 - 9),$$

$$\sqrt{10} \approx \sqrt{9} + \frac{1}{6} = 3\frac{1}{6} = 3,1(6).$$

Свойства дифференциала следуют из свойств производной функции.

3.2.3 Производные высших порядков

Второй производной функции называют производную от первой производной (которая, прошу заметить, является функцией, и для неё имеет место формула (46)): $y'' = (y')'$.

Пример:

$$(\ln x)'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Для обозначения производных используются римские цифры и цифры в скобках, например:

$$f'''(x) = f^{(3)}(x) \quad \text{— третья производная,}$$

$$f^{IV}(x) = f^{(4)}(x) \quad \text{— четвёртая производная.}$$

Производные высших порядков можно вычислять и для функций заданных неявно и параметрически.

3.3 Основные теоремы дифференциального исчисления. Правило Лопиталя. Формула Тейлора. Исследование функции на экстремум

Необходимо знать и всем сердцем любить следующие теоремы (особенно правило Лопиталя).

Теорема Ролля (о нуле производной). Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и дифференцируема на $(a; b)$. Если $f(a) = f(b)$, то существует хотя бы одна точка $c \in (a; b)$ такая, что $f'(c) = 0$ (Рисунок 31).

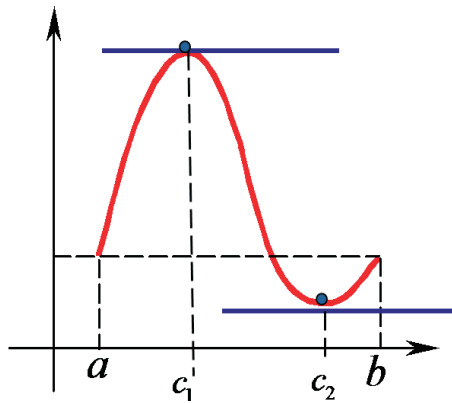


Рисунок 31 - Иллюстрация к теореме Ролля

Теорема Лагранжа (о конечном приращении). Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и дифференцируема на $(a; b)$. Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a; b)$ (Рисунок 32) такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

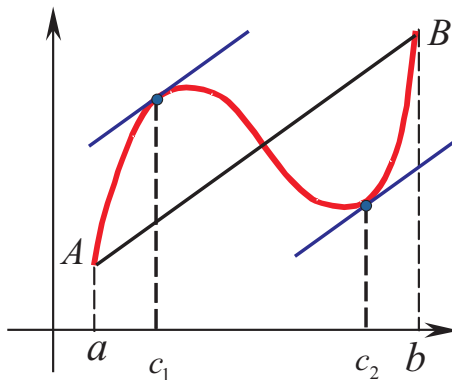


Рисунок 32 - Иллюстрация к теореме Лагранжа

Теорема Коши (об отношении приращений). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a; b]$ и дифференцируемы на $(a; b)$, $g'(x) \neq 0$ на $(a; b)$. Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a; b)$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Правило Лопиталя (для вычисления пределов). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ обе являются б.м.в или обе являются б.б.в. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Формула Тейлора. Пусть $y = f(x)$ непрерывна и дифференцируема в некоторой окрестности точки x_o , тогда имеет место следующая формула:

$$f(x) = f(x_o) + \frac{f'(x_o)}{1!}(x-x_o) + \frac{f''(x_o)}{2!}(x-x_o)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x-x_o)^n + \\ + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_o)^{n+1}, \quad c = x_o + \delta(x-x_o), \quad 0 < \delta < 1.$$

3.4 Исследование функции

3.4.1 Схема исследования функции

Данная *схема* исследования - не закон. Вы можете идти своим путём. Обязательными являются все пункты, кроме точек пересечения с осями и проверки на чётность и периодичность - они просто полезные.

Итак, ищем у функции следующие характеристики:

- ОДЗ, проверяем на четность, периодичность.
- Разрывы.

- Асимптоты.

Асимптота - прямая, расстояние от которой до графика функции стремится к 0 при удалении от начала координат. Бывают вертикальные, горизонтальные и наклонные.

- Экстремумы.

Точка экстремума - точка, в которой монотонность функции меняет направление.

- Перегибы.

Точка перегиба - точка, в которой выпуклость графика меняет направление.

График **выпуклый вверх/вниз** на промежутке, если касательная над/под графиком в каждой точке.

- Строим **эскиз графика** - рисунок *по найденным* точкам.

3.4.2 Асимптоты

Асимптота - это прямая, следовательно её уравнение

$$y_a = kx + b, \quad k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx). \quad (49)$$

Если хотя бы один из пределов в (49) равен ∞ , то наклонной асимптоты нет.

Если $k = 0$, то асимптота горизонтальная.

Вертикальные асимптоты - это прямые, проходящие через точки разрыва 2-го рода.

3.4.3 Монотонность и экстремумы

$f(x)$ возрастает на (a, b) , то $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} > 0$.

$f(x)$ убывает на (a, b) , то $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} < 0$.

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \rightarrow f'(x), \quad \Delta x \rightarrow 0$$

если функция дифференцируема, конечно ;)

Необходимое условие монотонности:

$y = f(x)$ возрастает на (a, b) , то на (a, b) $f'(x) \geq 0$;

$y = f(x)$ убывает на (a, b) , то на (a, b) $f'(x) \leq 0$

Достаточное условие монотонности:

$f'(x) > 0$ на $\forall x \in (a, b)$, то $y = f(x)$ возрастает на (a, b) ;

$f'(x) < 0$ на $\forall x \in (a, b)$, то $y = f(x)$ убывает на (a, b)

x_o - **точка максимума**, если $\exists \delta (\forall x \in (x_o - \delta, x_o + \delta) \Rightarrow f(x_o) > f(x))$.

x_o - **точка минимума**, если $\exists \delta (\forall x \in (x_o - \delta, x_o + \delta) \Rightarrow f(x_o) < f(x))$.

x_o - **стационарная точка**, если $f'(x_o) = 0$.

x_o - **критическая точка**, если $f'(x_o) = 0$ или не существует.

Необходимое условие экстремума: Точка экстремума является критической точкой функции.

Первое достаточное условие экстремума: при переходе через

точку экстремума производная функции меняет знак.

Минимум - если знак меняется с $-$ на $+$; максимум - с $+$ на $-$.

Второе достаточное условие экстремума: стационарная точка является точкой максимума/минимума, если вторая производная в этой точке отрицательна/положительна.

3.4.4 Выпуклость и перегибы

График **выпуклый вверх/вниз** на промежутке, если касательная над/под графиком в каждой точке.

Точки перегиба разделяют участки графика с разной выпуклостью.

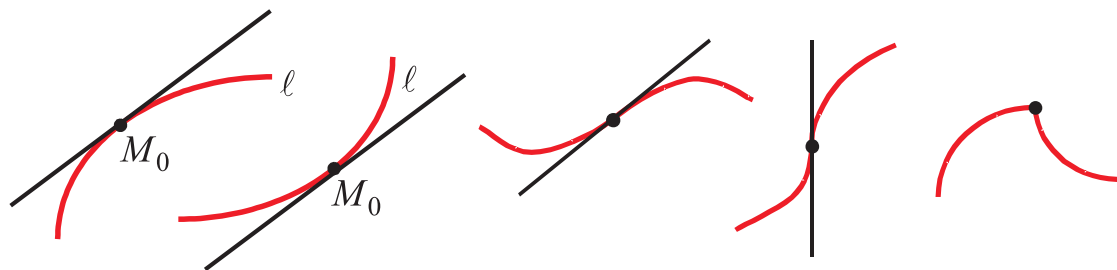


Рисунок 33 - Точки перегиба

Достаточное условие выпуклости: если вторая производная в точке отрицательна/положительна, то график функции в этой точке выпуклый вверх/вниз.

3.5 Задания для самостоятельного решения

Найти производные функций:

$$1) y = 3 - 2x + \frac{2}{3}x^4.$$

$$2) y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}.$$

$$3) y = \frac{x^2 + 1}{x^3 - x}.$$

$$4) y = \frac{1 + 3x^2}{\sqrt{2\pi}}.$$

$$5) y = \frac{a}{\sqrt[5]{x^3}} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{b}.$$

$$6) y = x^3 \operatorname{ctg} x.$$

$$7) y = \frac{\cos x}{1 + \sin x}.$$

$$8) y = 2 \sin x \cdot 3 \operatorname{tg} x.$$

$$9) y = \sin \frac{3x}{2}.$$

$$10) y = x \arcsin \ln x.$$

$$11) y = \operatorname{arctg}(x \sqrt{1+x^2}).$$

$$12) y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

$$13) y = \log_2 \ln 2x.$$

$$14) y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}).$$

Ответы к заданиям: 1) $-2 + \frac{8}{3}x^3$. 2) $-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4}$. 3) $\frac{1-4x^2-x^4}{(x^3-x)^2}$.

4) $\frac{6}{\sqrt{2\pi}}x$. 5) $-\frac{3}{5}\frac{a}{\sqrt[5]{x^8}} + \frac{2}{3b\sqrt[3]{x}}$. 6) $3x2\operatorname{ctg}x - \frac{x^3}{\sin^2x} = \frac{x^2(3\sin 2x-2x)}{2\sin^2x}$. 7) $-\frac{1}{1+\sin x}$.

8) $\frac{2\cos^3x-3}{\cos^2x}$. 9) $\frac{3}{2}\cos \frac{3x}{2}$. 10) $\arcsin \ln x + \frac{1}{\sqrt{1-\ln^2x}}$. 11) $\frac{1}{2(1+x^2)}$. 12) $\frac{1}{\cos x}$.

13) $\frac{1}{x \ln 2 \cdot \ln 2x}$. 14) $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

3.6 Вопросы для самопроверки к разделу 3

1. Как формулируется определение производной функции?
2. В чём заключается геометрический и физический смысл производной?
3. Как составляется уравнение касательной к линии?
4. Как формулируется теорема о непрерывности дифференцируемой функции?
5. Как вычисляется производная сложной функции?
6. Как вычисляется производная обратной функции?
7. Как вычисляется производная функции, заданной неявно?
8. Как вычисляется производная функции, заданной параметрически?
9. Как вычисляется производная логарифмической функции?
10. Как вычисляется производная степенной, показательной, показательностепенной функций, произведения и частного?
11. Как вычисляется производная тригонометрических функций?
12. Как вычисляется производная обратных тригонометрических функций?
13. Как находится дифференциал функции?
14. Как формулируется теорема Ролля о корнях производной?

15. Как формулируется теорема Лагранжа о конечном приращении?
16. Как формулируется формула Тейлора?
17. Как формулируется правило Лопиталя для раскрытия основных неопределенностей?
18. Как формулируется необходимое и достаточное условие монотонности функции в интервале?
19. Как определяется экстремум функции?
20. Что такое точка перегиба?
21. Как находят асимптоты кривой?

4 Интеграл

4.1 Неопределённый интеграл: определение, свойства. Интегрирование по частям

4.1.1 Определение неопределённого интеграла

Функция $F(x)$ — **первообразная** функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$ для каждого x из ОДЗ $f(x)$.

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется **неопределённым интегралом** от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$.

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad C - const, \quad (50)$$

где

$f(x)$ - подынтегральная функция,
 dx - дифференциал (приращение) аргумента,
 $F(x)$ - первообразная,
 $f(x)dx$ - дифференциал первообразной.

4.1.2 Свойства неопределённого интеграла.

Свойства интеграла (50) напрямую связаны со свойствами производной (46).

Перечислю только самые очевидные.

1. Производная от интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \quad d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

Это свойство позволит решать дифференциальные уравнения (упс. спойлеры)

2. Интеграл от дифференциала функции $d\varphi(x)$ равен этой функции с точностью до константы:

$$\int d\varphi(x) = \varphi(x) + C$$

Это свойство означает, что как только значок интеграла и дифференциала оказываются рядом - они исчезают.

3. Линейность:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$$

$$\int Cf(x)dx = C \int f(x)dx$$

Это значит, что а) интеграл от сумма равен сумме интегралов, б) постоянный множитель можно вынести за знак интеграла.

4.1.3 Таблица интегралов

1. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad (a \neq -1).$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

4. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

5. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

8. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$

$$9. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$10. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C.$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a}| + C.$$

4.1.4 Методы вычисления неопределённого интеграла: замена переменной, интегрирование по частям

Метод замены переменной

По определению дифференциала (48), $g'(x)dx = dg(x)$.

Следовательно, при вычислении интеграла можно преобразовать выражение как

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(g(x))dg(x) = F(g(x)) + C. \quad (51)$$

Пример 1. Вычислить $\int \sin x^2 \cdot x dx$.

Решение.

$$\int \sin x^2 \cdot x dx = \frac{1}{2} \int \sin x^2 \cdot 2x dx = \frac{1}{2} \int \sin x^2 dx^2 = -\frac{1}{2} \cos x^2 + C.$$

Иногда производная очевидно "подводится" под знак дифференциала. В некоторых случаях, приходится угадывать. Мастерство угадывания прямо пропорционально количеству решенных задач. Смееетесь?

Пример 2. Вычислить $\int x\sqrt{1-x^2}dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{1-x^2}dx &= [t = 1 - x^2, dt = -2x dx] = \\ &= -\frac{1}{2} \int \sqrt{t} dt = -\frac{1}{2} \int t^{0.5} dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^{1.5}}{1.5} + C = -\frac{(1-x^2)^{1.5}}{3} + C. \end{aligned}$$

Полезно помнить, что $dx = \frac{1}{a} da x$, $dx = d(x + b)$

Метод интегрирования по частям

Метод основан на формуле производной произведения:

$$\begin{aligned}(uv)' &= u'v + v'u, \\ uv' &= (uv)' - u'v, \\ \int uv'dx &= \int ((uv)' - u'v)dx, \\ \int uv'dx &= \int (uv)'dx - \int u'dx, \\ \int u'dx &= \int (uv)'dx - \int v'dx.\end{aligned}\tag{52}$$

Пример. Вычислить $\int x \cos x dx$.

Решение.

$$\begin{aligned}\int x \cos x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = \cos x dx \\ v = \sin x \end{array} \right| = \\ &= x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.\end{aligned}$$

4.2 Интегрирование некоторых видов функций

4.2.1 Интегрирование дробно-рациональных функций

Дробно-рациональная функция - это дробь, числитель и знаменатель которой многочлены $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$. Если степень числителя меньше, чем степень знаменателя, то **дробь правильная**.

Сейчас будем учиться брать интеграл $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$, $n < m$.

Страшно? Мне - да.

Многочлен можно "разложить на скобки" $(x - x_i)^{n_i}$, если найти корни x_i . Некоторые корни будут комплексные, и они всегда будут парами (число и сопряженное к нему). Пары таких корней будет соответствовать "скобка" второй степени: $(x^2 + ax + b)$. Осознайте это.

Итак, рассуждаем.

Если дана правильная дробь с составным знаменателем ab , то она получилась в результате суммы правильных дробей у которых знаменателями были a и b : $\frac{A}{ab} = \frac{B}{a} + \frac{C}{b}$. Логично?

А если правильная дробь со знаменателем a^2b ? То она могла получиться в результате суммы правильных дробей у которых знаменателями были a , a^2 , ab и b . Ну некоторых из них могло и не быть. Вот со знаменателем ab точно в расчёт брать не надо, она распадается на уже присутствующие.

Вот к чему всё это - правильную рациональную дробь всегда можно представить в виде суммы дробей четырёх типов:

$$I. \frac{A}{x-a}, \quad II. \frac{A}{(x-a)^k}, \quad III. \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad IV. \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}.$$

Посмотрим, как интегрировать каждую из них на примере.

Пример 1. Вычислить интеграл от дроби I типа: $\int \frac{1}{x-3} dx$.

Решение.

$$\int \frac{1}{x-3} dx = \int \frac{1}{x-3} d(x-3) = \ln|x-3| + C.$$

Пример 2. Вычислить интеграл от дроби II типа: $\int \frac{1}{(x-3)^6} dx$.

Решение.

$$\int \frac{1}{(x-3)^6} dx = \int (x-3)^{-6} d(x-3) = \frac{(x-3)^{-5}}{-5} + C.$$

Пример 3. Вычислить интеграл от дроби III типа: $\int \frac{1}{x^2-2x-3} dx$.

Решение.

$$\int \frac{1}{x^2-2x-3} dx = \int \frac{1}{(x-1)^2-4} d(x-1) =$$

$$\frac{1}{4} \ln \frac{(x-1)-1}{(x-1)+1} + C = \frac{1}{4} \ln \frac{x-2}{x} + C.$$

Пример 4. Разложите дробь на простейшие:

$$\frac{3x-2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Решение. Найдём A , B , C . Приведём дроби в правой части к общему знаменателю - он будет такой же, как и слева, и сравним числители.

$$\frac{3x - 2}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = \frac{Ax^2 + A + Bx^2 + Cx}{x(x^2 + 1)};$$

$$3x - 2 = (A + B)x^2 + Cx + A;$$

$$A = -2, C = 3, A + B = 0, \Rightarrow B = 2$$

В итоге

$$\frac{3x - 2}{x(x^2 + 1)} = -\frac{2}{x} + \frac{2x + 3}{x^2 + 1}.$$

4.2.2 Интегрирование тригонометрических функций

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ легким движением сводится к предыдущему случаю с помощью **универсальной тригонометрической подстановки (УТП)**:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2}. \quad (53)$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sin x}$, используя подстановку (53).

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{2dt}{1 + t^2} \cdot \frac{1}{\frac{2t}{1 + t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

Хотя иногда можно и обойтись и без подстановки (53). Рассмотрим несколько вариантов.

Пример 1 (удачная чётность степеней).

Вычислить интеграл $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx &= \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} d(\sin x) = \\ &= \int \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x} - \int d(\sin x) = \int \sin^{-2} x d(\sin x) - \sin x = \end{aligned}$$

$$= \frac{\sin^{-1} x}{-1} - \sin x + C = -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C.$$

Пример 2 (формула понижения степени).

Вычислить интеграл $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^2 x dx &= \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx = \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C. \end{aligned}$$

Пример 3 (связь тангенса и косинуса).

Вычислить интеграл $\int \operatorname{tg}^3 x dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^3 x dx &= \int \operatorname{tg} x \left(-1 + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = \\ &= - \int \operatorname{tg} x dx + \int \underbrace{\operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}_{d \operatorname{tg} x} dx = - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx + \int \operatorname{tg} x d \operatorname{tg} x = \\ &= \int \frac{d \cos x}{\cos x} + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C = \ln |\cos x| + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C. \end{aligned}$$

4.2.3 Интегрирование иррациональных функций

Далее, $R(x)$ - рациональная функция. Рассмотрим несколько ситуаций, когда приходится интегрировать функцию, содержащую иррациональное выражение.

Интеграл содержит корень из квадратного трехчлена:

$$\int R(x, \sqrt{x^2 + ax + b}).$$

В таком случае, следует выделить полный квадрат под корнем и сделать замену переменных. Если повезёт, то всё закончится быстро. Если жизнь готовит вас к подвигам, то будут громоздкие дроби и/или интегрирование по частям. Или даже тригонометрия.

Пример 1. Найти интеграл $\int \frac{3x - 6}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} dx$.

Решение.

$$\begin{aligned}\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx &= \int \frac{3(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2+1}}dx = [t=x-2, \quad dt=dx] = \\ &= 3 \int \frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{3}{2} \int \frac{d(t^2+1)}{\sqrt{t^2+1}} = 3\sqrt{t^2+1}+C = 3\sqrt{x^2-4x+5}+C.\end{aligned}$$

Разность или сумма "квадратов" под квадратным корнем:

$$\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})dx, \quad \int R(x, \sqrt{a^2+x^2})dx, \quad \int R(x, \sqrt{x^2-a^2})dx.$$

Такие интегралы можно получить после выделения полного квадрата в случае 1. Помогает избавиться от корня **рационализирующая замена** - это такая тригонометрическая подстановка, которая превращает разность квадратов в полный квадрат. Рационализирующие замены основаны на двух замечательных формулах:

$$\cos^2 \alpha x + \sin^2 \alpha = 1, \quad \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}. \quad (54)$$

Итак, рассмотрим все варианты.

Случай 1. Интегрирование выражения $\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})dx$ выполняется с помощью подстановки

$$x = a \sin z, \quad dx = a \cos z dz, \quad \sqrt{a^2-x^2} = a \cos z.$$

Случай 2. Интегрирование выражения $\int R(x, \sqrt{x^2-a^2})dx$, выполняется с помощью подстановки

$$x = \frac{a}{\cos z}, \quad dx = \frac{a \sin z dz}{\cos^2 z}, \quad \sqrt{x^2-a^2} = a \frac{\sin z}{\cos z} = a \operatorname{tg} z.$$

Случай 3. Интегрирование выражения $\int R(x, \sqrt{a^2+x^2})dx$, выполняется с помощью подстановки

$$x = a \operatorname{tg} z, \quad dx = \frac{a dz}{\cos^2 z}, \quad \sqrt{a^2+x^2} = \frac{a}{\cos z}.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx$.

Решение.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} x = \operatorname{tg} z, \quad dx = \frac{dz}{\cos^2 z} \\ \sqrt{x^2+1} = \sqrt{\operatorname{tg}^2 z + 1} = \frac{1}{\cos z} \end{array} \right| = \int \frac{dz}{\cos z \operatorname{tg}^2 z \cos^2 z} = \\
 &= \int \frac{dz}{\cos z \sin^2 z} = \int \frac{\sin^2 z + \cos^2 z}{\cos z \sin^2 z} dz = \int \frac{dz}{\cos z} + \int \frac{\cos z}{\sin^2 z} dz = \\
 &= \int \frac{\cos z dz}{\cos^2 z} + \int \sin^{-2} z d(\sin z) = \int \frac{d(\sin z)}{1 - \sin^2 z} - \frac{1}{\sin z} = \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin z}{1 - \sin z} \right| - \frac{1}{\sin z} + C = \\
 &= \left| \sin z = \frac{\operatorname{tg} z}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 z + 1}} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1} - x} \right| - \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C = \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(\sqrt{x^2+1} + x)^2}{x^2 + 1 - x^2} \right| - \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C = \ln \left| \sqrt{x^2+1} + x \right| - \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C.
 \end{aligned}$$

Интеграл содержит корни из одного и того же выражения
 $\frac{ax+b}{cx+d}$. Возможно знаменатель отсутствует ($c=0$, $d=1$).

$$\int R \left(x, \sqrt[n_i]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) dx.$$

Проблемы (с иррациональностью) решаются подстановкой $\frac{ax+b}{cx+d} = t^N$, где $N = \text{НОК}(n_i)$ - все корни в этом случае извлекаются.

Пример 3. Найти интеграл $\int \frac{1}{x} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx$.

Решение. Проведём замену переменных:

$$\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} = t, \quad t^3 = \frac{x+1}{x-1}, \quad t^3(x-1) = x+1, \quad x = \frac{t^3-1}{t^3+1}$$

$$dx = \frac{3t^2(t^3+1) - 3t^2(t^3-1)}{(t^3+1)^2} dt = \frac{6t^5 dt}{(t^3+1)^2}$$

$$\int \frac{1}{x} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx = \int \frac{t^3+1}{t^3-1} \cdot \frac{6t^5}{(t^3+1)^2} dt = \int \frac{6t^5 dt}{t^6-1} = \int \frac{dt^6}{t^6-1} =$$

$$= \int \frac{d(t^6 - 1)}{t^6 - 1} = \ln |t^6 - 1| + C = \ln \left| \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^2 - 1 \right| + C.$$

4.2.4 «Неберущиеся» интегралы

К «неберущимся» интегралам относятся нижеследующие интегралы, некоторые из них имеют большое значение в различных разделах математики и физики:

$$\begin{aligned} & \int \sqrt{x} \cdot \cos x dx, \quad \int \frac{\sin x}{x^7} dx, \\ & \int e^{-x^2} dx - \text{интеграл Пуассона (теория вероятностей)}, \\ & \int \frac{dx}{\ln x} - \text{интегральный логарифм (теория чисел)}, \\ & \int \cos x^2 dx, \quad \int \sin x^2 dx - \text{интегралы Френеля (физика)}, \\ & \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{\cos x}{x} dx - \text{интегральные синус и косинус}, \\ & \int \frac{e^x}{x} dx - \text{интегральная показательная функция}. \end{aligned}$$

Для них составлены подробные таблицы значений определенного интеграла при различных значениях пределов и построены графики.

4.3 Определённый интеграл: определение, свойства. Формула Ньютона-Лейбница

4.3.1 Основные понятия

Пусть дана функция $f(x)$ непрерывная на промежутке $[a; b]$.

Составим интегральную сумму, проделав следующие шаги (Рисунок 34):

1) разобьём $[a; b]$ на участки точками

$$x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b;$$

2) вычислим значение функции где-нибудь на каждом участке:

$$f(\xi_i), \quad \xi_i \in [x_{i-1}; x_i];$$

3) умножим длину участка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ на примерную высоту $f(\xi_i)$ (получим примерную площадь этого участка):

$$\Delta S_i = f(\xi_i) \Delta x_i;$$

4) составим **интегральную сумму**:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i;$$

5) найдём предел этой суммы, *равномерно* увеличивая количество участков при разбиении:

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

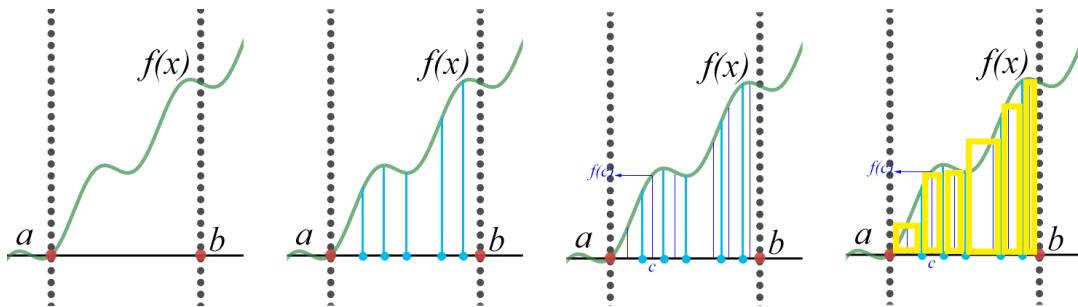


Рисунок 34 - Этапы построения интегральной суммы

Определенный интеграл функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ — это предел интегральной суммы, не зависящий от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на части и от выбора точек ξ_i :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (55)$$

Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$. Если функция имеет хоть одну первообразную, то она имеет бесконечно много первообразных (так как $(F(x) + C)' = f(x)$). На практике часто приходится искать разность значений первообразной в точках b и a . Эта разность не зависит от выбора произвольной постоянной C . В самом деле, если $\Phi(x) = F(x) + C$, то

$$\Phi(b) - \Phi(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a).$$

Поскольку разность значений первообразной в точках b и a не зависит от того, какую именно первообразную функции $y = f(x)$ мы выбираем, эту разность называют определённым интегралом от функции по отрезку $[a, b]$.

4.3.2 Формула Ньютона-Лейбница

Пусть функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$ и имеет на нем первообразную $y = F(x)$. Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (56)$$

Разность (56) записывают в виде $F(x) \Big|_a^b$, тогда

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b.$$

Числа a и b называют нижним и верхним **пределами интегрирования**.

4.3.3 Свойства определённого интеграла

Из определения (55) и свойств предела и суммирования вытекают следующие свойства определённого интеграла.

1. **Линейность.** $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$, где $\alpha = \text{Const}$.

2. **Линейность.** $\int_a^b (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx$.

3. **Аддитивность.** $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

4. **Зависимость от направления.** $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.

5. **Теорема о среднем.** $\exists c \in [a, b] : \int_a^b f(x) dx = (b - a)f(c)$.

Средним значением функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется число $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$. Среднее значение всегда заключено между наибольшим и наименьшим значениями функции.

4.4 Замена переменной и интегрирование по частям в определённом интеграле

4.4.1 Замена переменной

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция $x = \varphi(t)$ имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, причём множество значений функции $x = \varphi(t)$ при $t \in [\alpha, \beta]$ совпадает с отрезком $[a, b]$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

Тогда справедлива следующая формула замены переменной в определённом интеграле:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (57)$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x dx$.

Решение. Замена: $\sin x = t$.

Дифференцируем замену: $d(\sin x) = d(t)$, или $\cos x dx = dt$.

Изменяем пределы интегрирования: $0 \leq x \leq \pi/2$, при $x = 0$ имеем $t = 0$, а при $x = \pi/2$ имеем $t = 1$. Следовательно, $0 \leq t \leq 1$.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x dx = \int_0^1 t^2 dt = \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

При замене $t = \sin x$ пределы интегрирования в этом же интеграле изменились бы на $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

4.4.2 Интегрирование по частям

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a, b]$. Тогда справедлива формула

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (58)$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_1^2 xe^x dx$.

Решение. Пусть $u = x$, $dv = e^x dx$. Тогда

$$du = dx, \quad v = \int e^x dx = e^x.$$

$$\int_1^2 xe^x dx = xe^x \Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = xe^x \Big|_1^2 - e^x \Big|_1^2 = e^x(x-1) \Big|_1^2 = e^2.$$

4.5 Несобственные интегралы

Определённый интеграл $\int_a^b f(x) dx$ называется *несобственным*, если выполняется одно из следующих условий:

1) Нижний предел интегрирования a или верхний предел интегрирования b (или оба предела) равен бесконечности.

2) Отрезок $[a, b]$ содержит точки разрыва функции $f(x)$. В первом случае несобственный интеграл называется несобственным интегралом первого рода, во втором – несобственным интегралом второго рода.

4.5.1 Несобственные интегралы 1 рода

Предположим, что функция $f(x)$ задана на интервале $[a, +\infty)$ и интегрируема на любом отрезке $[a, n]$, где $n \in [a, +\infty)$

Предел

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^n f(x) dx$$

называется *несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом* или *несобственным интегралом первого рода функции $f(x)$ на $[a, +\infty)$* и обозначается как

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^n f(x) dx. \quad (59)$$

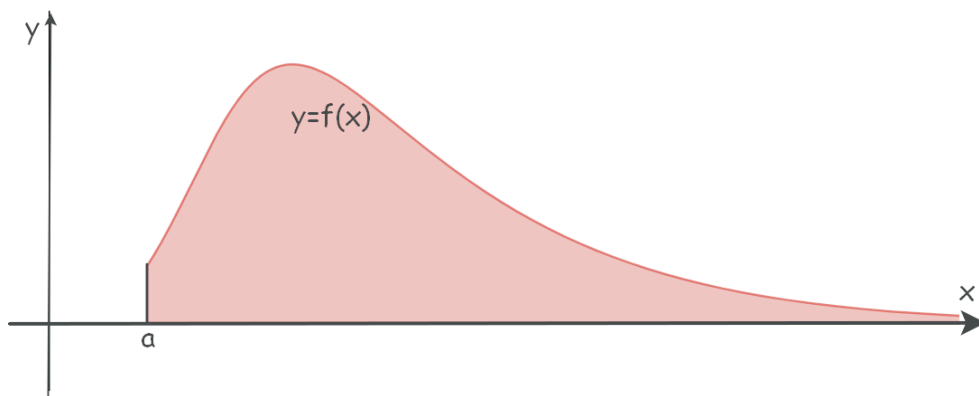


Рисунок 35 - Несобственный интегралом с бесконечным верхним пределом

Геометрически такой интеграл выражает площадь бесконечной вправо, криволинейной трапеции (Рисунок 35).

Несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ называется *сходящимся*, если соответствующий предел существует.

Если же предел не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ называется *расходящимся*.

Пример 1. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$.

Решение.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx = - \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-x} \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (1 - e^{-b}) = 1.$$

В этом примере предел существует и равен единице. Значит, интеграл является сходящимся и тоже равен единице.

Пример 2. Вычислить или доказать расходимость несобственного интеграла $\int_0^{+\infty} e^x dx$.

Решение.

$$\int_0^{+\infty} e^x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} e^x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (e^b - 1) = \infty.$$

Предел равен бесконечности, следовательно, интеграл расходится.

Если функция задана на бесконечном интервале $(-\infty, b]$ и интегрируема на любом конечном отрезке $[n, b]$, где $n \in (-\infty, b]$, то аналогичным образом определяется несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow -\infty} \int_n^b f(x) dx. \quad (60)$$

Геометрически такой интеграл выражает площадь бесконечной влево (Рисунок 36.) криволинейной трапеции.

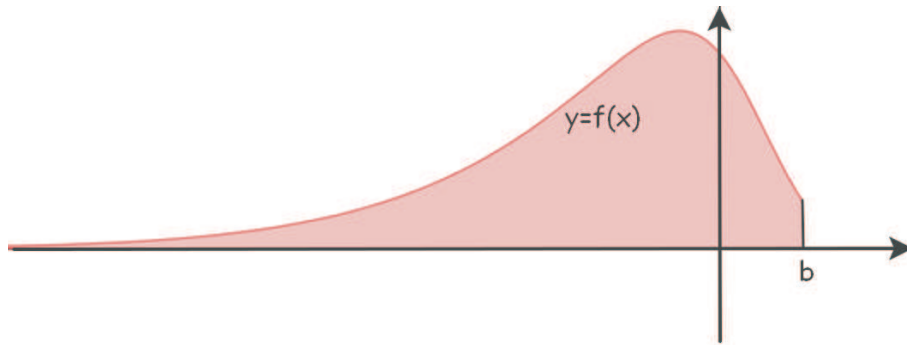


Рисунок 36 - Несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом

Несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом тоже относится к несобственным интегралам первого рода.

Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой оси $(-\infty, +\infty)$ и интегрируема на любом отрезке $[a, b]$. Тогда несобственный интеграл с бесконечными верхним и нижним пределами $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ опре-

деляется следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f(x) dx. \quad (61)$$

Последний интеграл можно вычислять так:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Несобственный интеграл с бесконечными верхним и нижним пределами тоже относится к несобственным интегралам первого рода. Геометрически этот интеграл определяет площадь бесконечной влево и вправо криволинейной трапеции (Рисунок 37).

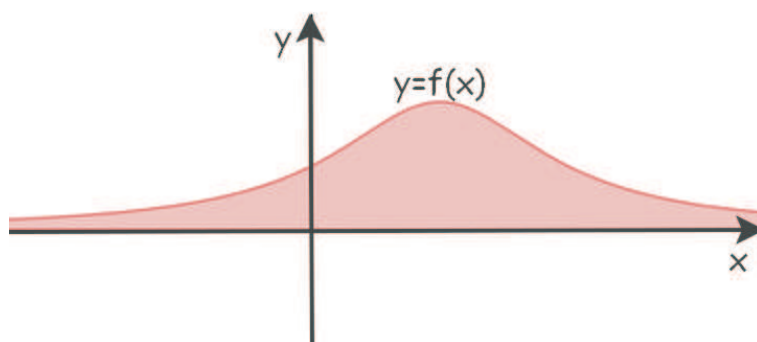


Рисунок 37 - Несобственный интеграл с бесконечными верхним и нижним пределами

ТЕОРЕМА. Пусть $a > 0$ и α — действительное число. Несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при любом $\alpha > 1$ и расходится при любом $\alpha \leq 1$.

Доказательство.

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_a^b & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_a^b & \text{при } \alpha = 1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{a^{1-\alpha}}{-\alpha+1} \Big|_a^b & \text{при } \alpha > 1, \\ \infty & \text{при } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Первая теорема сравнения. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, +\infty)$, причём $\forall x \in [a, +\infty)$ выполняется неравенство $0 \leq f(x) \leq g(x)$.

Тогда если интеграл $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ сходится, то и $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится;

если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ расходится, $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ расходится.

Пример. Исследовать сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$.

Решение. Рассмотрим функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}$ и $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$.

Очевидно, что $0 < f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}} = g(x)$.

Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx$ сходится (так как $\frac{3}{2} > 1$), значит,

сходится и $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$.

Вторая теорема сравнения. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и положительны на $[a, +\infty)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ ($0 < A < +\infty$).

Тогда несобственные интегралы $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Пример. Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} x \sin \frac{1}{x^3} dx$.

Решение. Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sin \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^2}} = 1 \Rightarrow$$

Интеграл $\int_1^{+\infty} x \sin \frac{1}{x^3} dx$ сходится.

4.5.2 Несобственные интегралы 2 рода

Пусть функция $f(x)$ определена на $[a, b)$, интегрируема на любом отрезке $[a, b - \varepsilon]$, где $b - \varepsilon \in [a, b)$, и имеет бесконечный разрыв в точке $x = b$, т.е. точка $x = b$ является особой для $f(x)$.

Предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$ называется несобственным интегралом от неограниченной функции $f(x)$ (с особой точкой $x = b$) на $[a, b)$ или несобственным интегралом второго рода: $\int_a^b f(x) dx$:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx. \quad (62)$$

Аналогично определяется несобственный интеграл от функции $f(x)$ с особой точкой $x = a$ на полуинтервале $(a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx.$$

Если функция $f(x)$ имеет особую точку $x = c$ внутри отрезка $[a, b]$, то несобственный интеграл второго рода определяется формулой

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

В этом случае интеграл слева называется сходящимся, если оба интеграла справа сходятся.

Пример. Вычислить несобственный интеграл от разрывной функции или установить его расходимость: $\int_0^2 \frac{x dx}{(x^2 - 1)^{4/5}}$.

Решение. Подынтегральная функция $\frac{x}{(x^2 - 1)^{4/5}}$ терпит разрыв при $x = 1$ и $x = -1$.

Вторая точка не входит в область интегрирования, а первая входит: $1 \in [0; 2]$.

Значит,

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{x dx}{(x^2 - 1)^{4/5}} &= \int_0^1 \frac{x dx}{(x^2 - 1)^{4/5}} + \int_1^2 \frac{x dx}{(x^2 - 1)^{4/5}} = \\ &= \lim_{b \rightarrow 1-0} \int_0^b \frac{d(x^2 - 1)}{2(x^2 - 1)^{4/5}} + \lim_{a \rightarrow 1+0} \int_a^2 \frac{d(x^2 - 1)}{2(x^2 - 1)^{4/5}} = \\ &= \lim_{b \rightarrow 1-0} \frac{5(x^2 - 1)^{1/5}}{2} \Big|_0^b + \lim_{a \rightarrow 1+0} \frac{5(x^2 - 1)^{1/5}}{2} \Big|_a^2 = \\ &= \lim_{b \rightarrow 1-0} \left(\frac{5(b^2 - 1)^{1/5}}{2} - \left(-\frac{5}{2} \right) \right) + \lim_{a \rightarrow 1+0} \left(\frac{5\sqrt[5]{3}}{2} - \frac{5(a^2 - 1)^{1/5}}{2} \right) = \\ &= \frac{5(1 + \sqrt[5]{3})}{2}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА. Несобственный интеграл второго рода

$$\int_a^b \frac{dx}{(x - a)^p} \quad (a < b, \quad p > 0) :$$

сходится при $0 < p < 1$; расходится при $p \geq 1$.

Сходимость или расходимость несобственных интегралов второго рода от неотрицательных функций часто можно установить с помощью теорем сравнения, аналогичных теоремам сравнения для несобственных интегралов первого рода.

4.6 Геометрический смысл определённого интеграла. Физические приложения

4.6.1 Вычисление площади фигуры в декартовых координатах

Если график функции $y = f(x)$ расположен выше оси Ox , то площадь криволинейной трапеции (Рисунок 38), образованной графиком функции, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$, равна определённому интегралу от этой функции на отрезке $[a, b]$:

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (63)$$

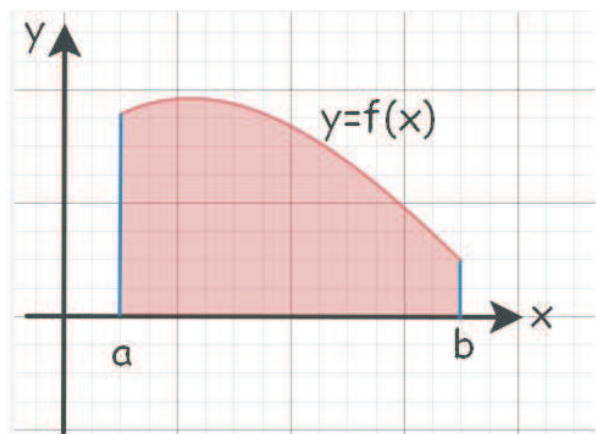


Рисунок 38 - Область, ограниченная кривой сверху

Если функция $y = f(x)$ задана явно и её график в прямоугольной (декартовой) системе координат расположен **ниже** оси Ox , то площадь соответствующей криволинейной трапеции (Рисунок 39) выражается формулой

$$S = - \int_a^b f(x) dx. \quad (64)$$

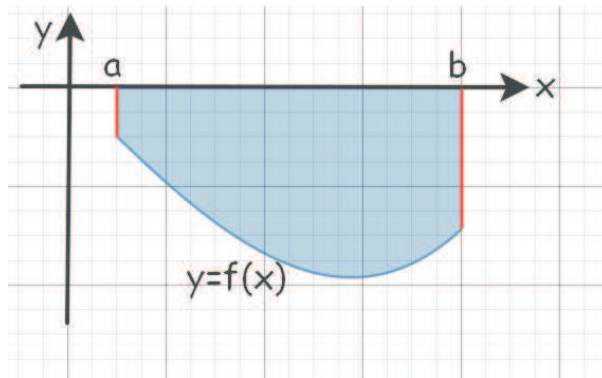


Рисунок 39 - Область, ограниченная кривой снизу

Если фигура ограничена графиками двумя явно заданных функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ (Рисунок 40), то, обобщая формулы (63) и (64), площадь этой фигуры в прямоугольных (декартовых) координатах вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx. \quad (65)$$

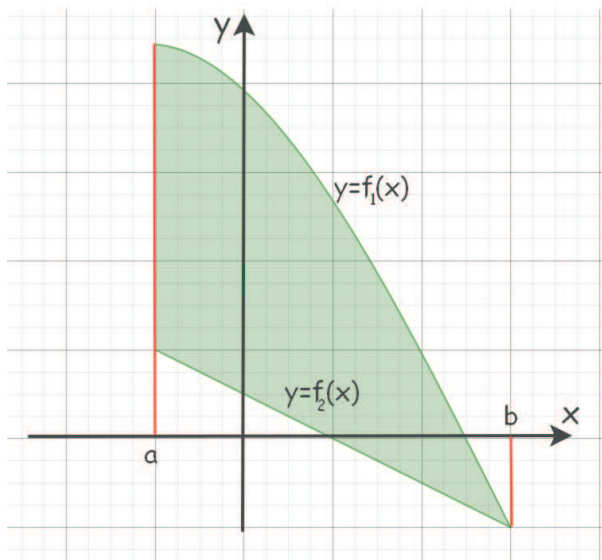


Рисунок 40 - Область, ограниченная кривыми сверху и снизу

Если криволинейная трапеция ограничена графиками функций $x = g_1(y)$ и $x = g_2(y)$ (Рисунок 41), то площадь фигуры выражается формулой

$$S = \int_c^d (g_1(y) - g_2(y)) dy. \quad (66)$$

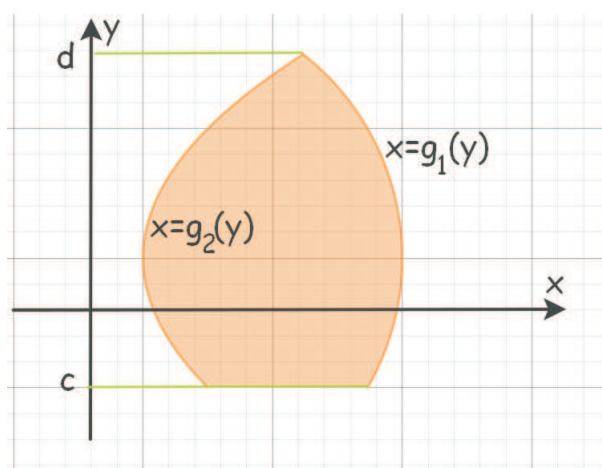


Рисунок 41 - Область, ограниченная кривыми слева и справа

Фигуры сложной формы (Рисунок 42) приходится разбивать на несколько, чтобы у каждой части был “верх”, задаваемый ровно одной функцией, и “низ”, тоже задаваемый ровно одной функцией.

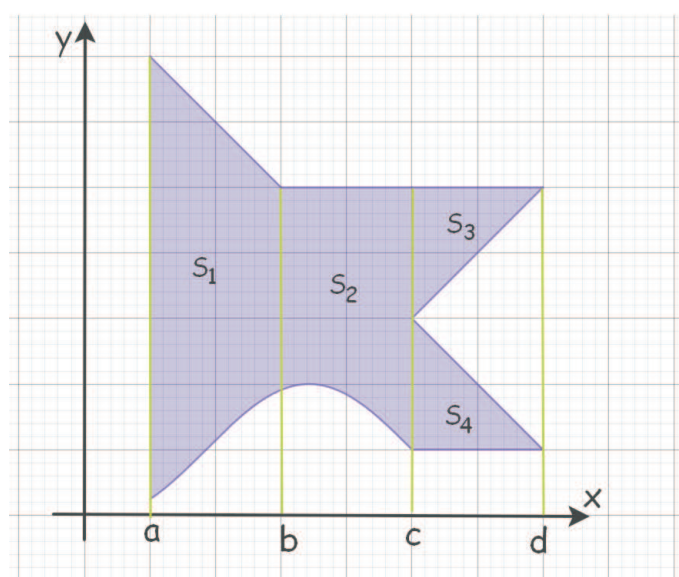


Рисунок 42 - "Сложная" область

Если фигура ограничена кривой, уравнение которой задано параметрически

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

то

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt. \quad (67)$$

Пример 1. Вычислить площадь области, ограниченной эллипсом (Рисунок 43): $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

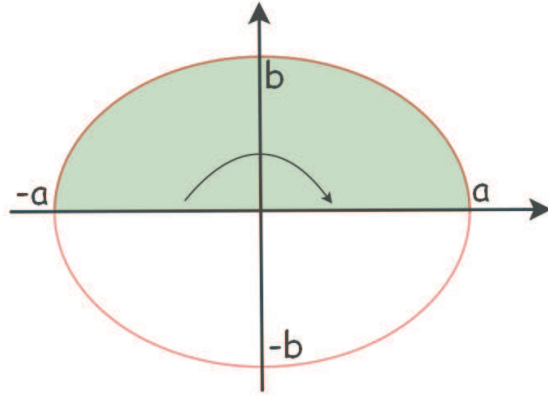


Рисунок 43 - Области, ограниченная эллипсом

Решение. Вычислим площадь верхней половины по формуле (67) и удвоим.

$$-a \leq x \leq a \Rightarrow \pi \leq t \leq 0;$$

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot \int_{\pi}^0 (b \sin t)(-a \sin t) dt = -2ab \int_{\pi}^0 \sin^2 t dt = \\ &= 2ab \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = 2ab \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right) \Bigg|_0^{\pi} = \pi ab. \end{aligned}$$

Если фигура ограничена **замкнутой** кривой, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta;$$

от α до β обход производится в положительном направлении, и

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt. \quad (68)$$

Пример 2. Найти площадь эллипса (Рисунок 44), ограниченного кривой $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

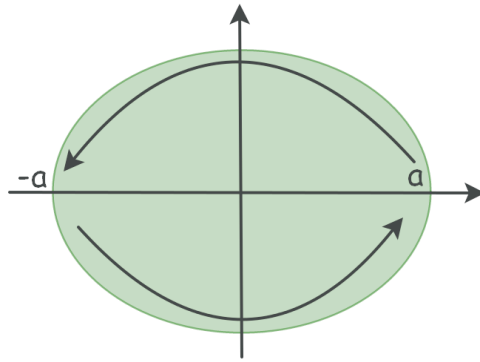


Рисунок 44 - Область, ограниченная замкнутой кривой

Решение. Значения пределов интегрирования: $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$, тогда

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t \cdot (b \sin t)' - b \sin t \cdot (a \cos t)') dt = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t \cdot b \cos t - b \sin t \cdot (-a \sin t)) dt = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} dt = \pi ab.
 \end{aligned}$$

Если кривая задана **в полярных координатах** (Рисунок 45) и требуется найти площадь S криволинейного сектора, ограниченного графиком функции $\rho = \rho(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$), то

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi. \quad (69)$$

В этом случае мы приближаем площадь криволинейного сектора суммой площадей секторов круга (аналогично тому, как мы приближали площадь криволинейной трапеции в прямоугольных координатах суммой площадей прямоугольников).

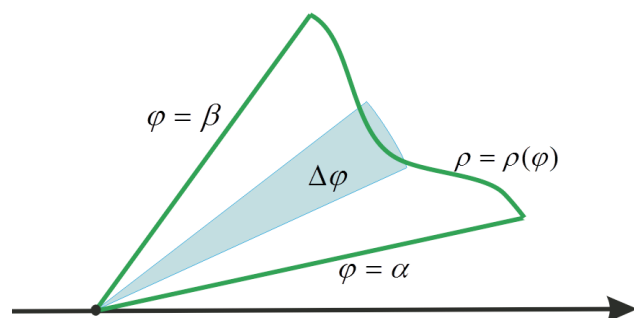


Рисунок 45 - Дифференциал площади в полярных координатах

4.7 Задания для самостоятельного решения

Найти интегралы:

1) $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+8} dx.$

2) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+a^2} dx.$

3) $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x} dx.$

4) $\int e^{-3x+1} dx.$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}.$

6) $\int \frac{x^2}{x^6+4} dx.$

7) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^4}}.$

8) $\int \frac{3x-1}{x^2+9} dx.$

Вычислить интегралы:

9) $\int_1^2 e^x dx.$

10) $\int_2^5 \frac{dx}{x}.$

11) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^6}.$

12) $\int_0^1 \frac{dx}{4x^2+4x+5}.$

Ответы к заданиям: 1) $\ln(x^2 - 3x + 8) + C$. 2) $\frac{1}{2} \ln(e^{2x} + a^2) + C$.
 3) $C - \ln(1 + \cos 2x)$. 4) $C - \frac{e^{-3x+1}}{3}$. 5) $\frac{1}{5} \arcsin 5x + C$. 6) $\frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{x^3}{2} + C$.
 7) $\frac{1}{4} \arcsin x^4 + C$. 8) $\frac{3}{2} \ln(x^2 + 9) - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C$. 9) $e^2 - e$. 10) $\ln 2, 5$.
 11) $\frac{\pi}{12}$. 12) $\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{4}{7}$.

4.8 Вопросы для самопроверки к разделу 4

1. Что называется первообразной функции?
2. Что называется неопределенным интегралом?
3. Какие элементы входят в запись (обозначение) неопределенного интеграла?
4. Что называется интегрированием?
5. Каков геометрический смысл определенного интеграла?
6. Чему равна производная неопределенного интеграла?
7. Чему равен дифференциал неопределенного интеграла?
8. Чему равен неопределенный интеграл от дифференциала функции?
9. Как формулируется свойство линейности неопределенного интеграла?
10. Что называется многочленом n -ой степени?
11. Как определятся определенный интеграл?
12. Какое различие между определенным и неопределенным интегралами?
13. Каков геометрический смысл определенного интеграла?
15. Какой интеграл называется несобственным?
16. Как определяется несобственный интеграл с бесконечными пределами интегрирования (несобственный интеграл первого рода)?
17. Как определяется несобственный интеграл от разрывной функции (несобственный интеграл второго рода)?
18. В каком случае несобственный интеграл сходится и в каком расходится?

5 Функции нескольких переменных

5.1 Определение функции нескольких переменных (ФНП). Предел и непрерывность ФНП

5.1.1 Определение ФНП

Что такое функция двух переменных (ФНП)?

Величины являются зависимыми от других величин, причём, как правило, от нескольких - это нормально.

Итак, если каждой паре (x, y) из множества $D \in Oxy$ соответствует единственное значение величины z то задана *функция двух переменных* $z(x, y)$.

Множество всех точек, для которых значение функции определено, называется её *областью определения*.

Графиком функции двух переменных служит поверхность в трёхмерном пространстве. Каждая точка этой поверхности имеет координаты $(x, y, z(x, y))$.

Функцией n независимых переменных называется правило, при котором каждой упорядоченной совокупности n чисел (x_1, x_2, \dots, x_n) ставится в соответствие некоторое число $z(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Примеры функций двух переменных:

- Расстояние от точки плоскости до начала координат (зависит от всех координат).
- Площадь плоской фигуры (если это не трапеция, то тоже зависит от двух направлений).
- Вес плоской пластины (плотность распределения массы зависит от двух переменных - координат точки пластины).

5.1.2 Области на плоскости

Немного о правилах поведения на плоскости. Если рассматривать различные области прямой, то это будут точки или отрезки. Больше ничего. А вот из плоскости можно выбирать прямые, ломаные, гладкие линии, круги, прямоугольники, сектора и прочие области. Что невообразимо разнообразит интегрирование функции двух переменных, например. Страшно? Правильно!

Приближаться к точке на прямой можно двумя способами: слева и справа. А на плоскости? Как минимум, по любому лучу, ведущему к точке. И ничто не остановит нас от приближения к цели по спирали, например. К чему это я? Предел у функции двух переменных бывает не только слева и справа. А особенности в определении предела неотвратимо приведут к особенностям в определении производной.

Но это всё потом. А пока давайте определимся с классификациями точек и областей.

Назовём **δ -окрестностью** точки $M_o(x_o, y_o)$ множество точек (x, y) , удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2} \leq \delta$. Очевидно, δ -окрестность представляет собой внутренность круга радиуса δ с центром в точке $M_o(x_o, y_o)$ (Рисунок 46.).

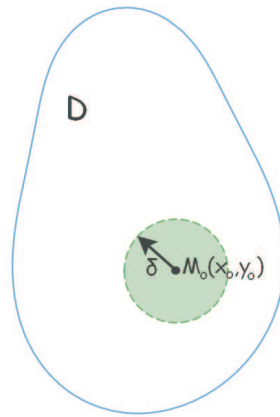


Рисунок 46 - δ -окрестность точки

Точка называется **внутренней точкой области D** , если эта точка принадлежит области D вместе с некоторой своей δ -окрестностью.

Область D называется **открытой**, если все её точки – внутренние (Рисунок 47.).

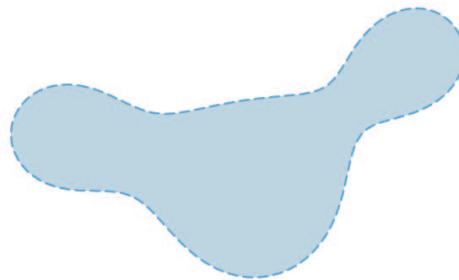


Рисунок 47 - Открытая линейно связная (односвязная) область

Точка называется **граничной точкой области** D , если любая δ -окрестность этой точки содержит как точки области D , так и точки не входящие в эту область (Рисунок 48).

Множество граничных точек области D образует её **границу** Γ_D .

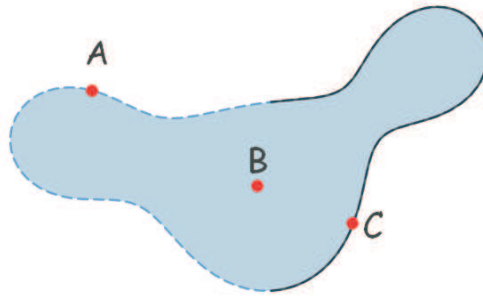


Рисунок 48 - A и C - граничные точки, B - внутренняя

Ограниченная область - это область, которая накрывается кругом достаточно большого радиуса (Рисунок 49).

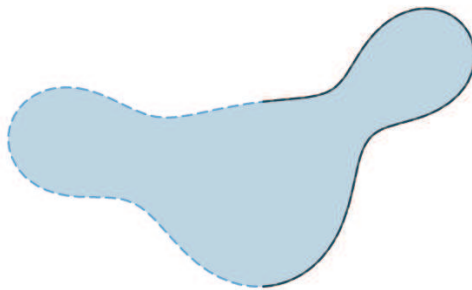


Рисунок 49 - Ограниченная линейно связная (односвязная) область

Замкнутым называется множество, которое содержит все свои граничные точки (Рисунок 50).

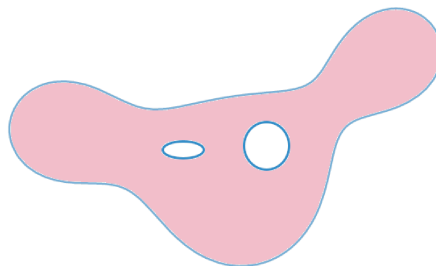


Рисунок 50 - Замкнутая линейно связная область

Область называется **линейно связной**, если любые две её точки можно соединить ломаной, все точки которой принадлежат этой области (Рисунки 47 - 50).

Односвязная область - это линейно связная область, у которой одна граница (т.е. множество граничных точек является связным) (Рисунки 47 - 49).

5.1.3 Предел и непрерывность функции нескольких переменных

Пусть функция $f(M)$ определена в некоторой области D , содержащей точку $M_o(x_o, y_o)$. Число называется **пределом функции в точке** M_o , если для любого положительного числа ε можно указать такое положительное число δ , что значения функции во всех точках M из δ -окрестности точки M_o , за исключением может быть самой M_o , отличаются от A не более чем на ε :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \quad 0 < |\overline{MM_o}| < \delta \Rightarrow |f(M_o) - A| < \varepsilon.$$

Иногда пишут $\lim_{\substack{x \rightarrow x_o \\ y \rightarrow y_o}} f(x, y) = A$

Для более чем двух переменных ничего не меняется - определение повторяется слово в слово.

Из определения предела следует, что если он существует, то он не зависит от способа стремления к точке.

Имеют место все свойства пределов, известные для функции одной переменной.

Пример: вычислить $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} y^2 \ln(y - 2x)$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} y^2 \ln(y - 2x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 3}} y^2 \ln(y - 2x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\lim_{y \rightarrow 3} y^2 \ln(y - 2x) \right) = \lim_{x \rightarrow 1} 9 \ln(3 - 2x) = 9 \ln 1 = 0. \end{aligned}$$

Функция $f(M)$ называется **непрерывной в точке** M_o , если ее предельное значение в этой точке существует и равно значению $f(M_o)$. Опять же, независимо от количества переменных.

А может быть функция непрерывна только по одной переменной? Например, только по x ? Может! Например, $z = \frac{x}{y}$ непрерывна по x для любого фиксированного y из ОДЗ, но при любом фиксированном x имеет бесконечный разрыв в точке $y = 0$.

5.2 Дифференцирование ФНП

5.2.1 Частные производные

Производная - это предел отношения приращения функции к приращению аргумента. Всё как и раньше. Только вот теперь предел можно считать по разным путям и для производной это всё меняет радикально.

Если приближаться к точке вдоль оси Ox , то получим производную "по x которая описывает скорость изменения функции по первому аргументу. Аналогично для y .

Если переменных больше, то это ничего не меняет, можно вычислять пределы в определении производной по любому направлению/пути.

А можно вообще не заикливаться на координатных осях и вычислять производную (т.е. скорость изменения функции) вдоль любого вектора. Но это (тссс!) спойлеры - тема совсем другого курса.

И, по прежнему, если производная отрицательна то функция убывает, положительна - возрастает.

Только вот в области функция по одной переменной может убывать, а по другой возрастать.

Частной производной функции $z = f(x, y)$ по переменной в точке $M_o(x_o, y_o)$ называется предел (если он существует и конечен):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x}. \quad (70)$$

Аналогично (70) определяется производная по y :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}. \quad (71)$$

И если функция зависит не от двух переменных, а от произвольного числа, то частные производные определяются точно так же - фиксируем все переменные, кроме той, по которой дифференцируем.

Нахождение частной производной по переменной называется дифференцированием по этой переменной.

Дифференцируя по одной переменной, все остальные рассматриваем как постоянные значения (константы).

Пример: найти частные производные $z = \ln(x^2 + y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (\ln(x^2 + y))'_x = \frac{(x^2 + y)'_x}{x^2 + y} = \frac{2x}{x^2 + y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (\ln(x^2 + y))'_y = \frac{(x^2 + y)'_y}{x^2 + y} = \frac{1}{x^2 + y}$$

5.2.2 Полный дифференциал

Если $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные в точке, то она дифференцируема в этой точке и имеет **полный дифференциал**:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y. \quad (72)$$

Дифференциал функции нескольких переменных определяется аналогично.

Дифференциал функции нескольких переменных обладает теми же свойствами, что и дифференциал функции одной переменной.

Полное приращение функции определяется как $\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y)$.

Как и ранее, дифференциал можно использовать для того, чтобы **приблизительно оценить приращение функции** при переходе от точки к точке:

$$f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y) \approx dz.$$

Или **приблизительно вычислить значение функции** в какой-нибудь "неудобной" точке, расположенной рядом с точкой "удобной" в которой значения вычисляются легко

$$f(x + \Delta x; y + \Delta y) \approx f(x; y) + dz. \quad (73)$$

Пример. Вычислить приближенно $\sqrt{3.01^2 + 4.02^2}$.

Рассмотрим функцию $z(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Заметим, что в точке $(3; 4)$ она вычисляется очень легко:

$$z(3, 4) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Нам необходимо вычислить её значение в точке рядом - $(3.01, 4.02)$.

Приготовимся к вычислению дифференциала - найдём приращения аргументов и частные производные функции (70, 71) и применим формулу (73):

$$x = 3; \quad \Delta x = 0.01; \quad x + \Delta x = 3.01;$$

$$y = 4; \quad \Delta y = 0.02; \quad y + \Delta y = 4.02$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z'_x(3, 4) = 0.6$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z'_y(3, 4) = 0.8$$

$$dz_{(3,4) \rightarrow (3.01, 4.02)} = z'_x(3, 4)\Delta x + z'_y(3, 4)\Delta y = 0.022$$

$$\sqrt{3.01^2 + 4.02^2} = z(3.01, 4.02) = 5.022$$

5.3 Дифференцирование неявно заданной ФНП, дифференцирование сложной функции

Функция $z(x, y)$ задана **неявно**, если она является решением уравнения $F(x, y, z) = 0$. Это очень популярная в жизни форма задания функции двух переменных. При этом заметьте, что одно уравнение может задавать несколько функций.

Пример 1: $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ уравнение сферы радиуса 1.

Это уравнение задает две функции:

$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ - уравнение верхней половинки сферы,

$z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ - уравнение нижней половинки сферы.

Но это нам удалось решить уравнение. А если вы уравнение $F(x, y, z) = 0$ решить не можете, то как найти производную z'_x в этом случае? Ну давайте представим, что вы мотивированы на поиск ;)

Первая мысль - продифференцировать то, что есть:

$$F'_x(x, y, z) = 0'_x.$$

Хм. Тут ведь от x ещё и z зависит... Давайте на примере.

Пример 2. $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, $z'_x = ?$

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 1)'_x = 0,$$

$$2x + 2zz'_x = 0$$

$$z'_x = -\frac{x}{z} - \text{Ура! Нашлась!}$$

А если теперь надо найти y'_x ? Снова по новой? Устанем ведь.

Чтоб каждый раз заново не выражать производную, позвольте подарить вам формулу:

$$F(x, y, z) = 0, \quad z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}. \quad (74)$$

Формула распространяется на любое число переменных.

Вывод формулы (74). Найдём дифференциал функции F , помня, что $F = 0$:

$$dF = F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz = 0.$$

Разделим обе части на F'_z :

$$\frac{F'_x}{F'_z} dx + \frac{F'_y}{F'_z} dy + dz = 0.$$

Выразим дифференциал z :

$$dz = -\frac{F'_x}{F'_z} dx - \frac{F'_y}{F'_z} dy.$$

По определению дифференциала, перед dx и dy стоят как раз искомые производные:

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

5.3.1 Производные высших порядков

У функции двух переменных $z = f(x, y)$ две производные первого порядка: z'_x , z'_y .

Каждая производная так же является функцией двух переменных и её можно дифференцировать по каждой из них: $(z'_x)'_x$, $(z'_x)'_y$, $(z'_y)'_x$, $(z'_y)'_y$.

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad z'_y = \frac{\partial z}{\partial y};$$

$$z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

$$z''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Можно продолжать и записать производные третьего и далее порядка - их число будет расти в геометрической прогрессии. Как только несколько одинаковых ∂ оказываются рядом, их можно "возводить в степень" (это ведь не возведение в степень, а просто обозначение, вы же поняли?)

Теорема Шварца. Если производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные (взятые по разным переменным), отличающиеся только порядком дифференцирования, равны между собой.

Если вкратце, то: $z''_{xy} = z''_{yx}$.

5.4 Экстремум функции двух переменных. Касательная плоскость и нормаль

Пусть функция двух переменных $F(x, y, z) = 0$ задает некоторую поверхность в пространстве. Пусть $F(x, y, z) = 0$ непрерывна и дифференцируема в точке M (визуально: целая и гладкая) (Рисунок 51).

Рассмотрим кривые - все возможные сечения поверхности плоскостями, проходящими через точку M (Рисунок 51).

Совокупность касательных прямых в точке образует касательную плоскость к поверхности в этой точке (Рисунок 51).

Нормаль к поверхности в этой точке - это прямая, перпендикулярная касательной плоскости.

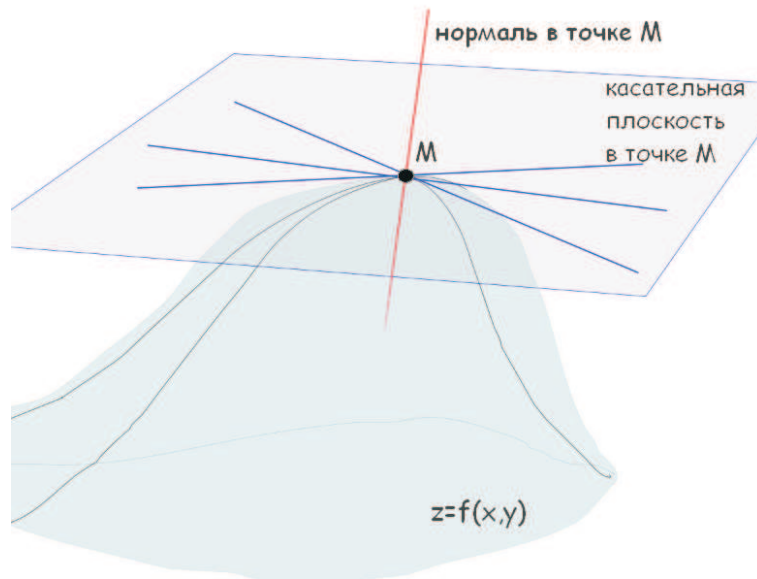


Рисунок 51 - Касательная плоскость и нормаль

Нормаль и касательная определяются точкой и вектором нормали, направленным перпендикулярно поверхности. Будем его искать.

Рассмотрим точку M_1 , очень близкую к $M(x_o, y_o, z_o)$, её координаты отличаются от координат M на приращения:

$$M_1(x_o + dx, y_o + dy, z_o + dz).$$

Тогда $\overline{MM_1} = (dx, dy, dz)$ и этот вектор, практически "лежит" на поверхности $F(x, y, z) = 0$ при стремлении приращений (дифференциалов) аргументов к нулям. Тогда вектор, перпендикулярный $\overline{MM_1} = (dx, dy, dz)$ и есть искомый вектор нормали (A, B, C) (Рисунок 52). Есть проверенный способ определять ортогональность векторов: скалярное произведение перпендикулярных векторов равно нулю. Составим уравнение:

$$(A, B, C) \cdot (dx, dy, dz) = Adx + Bdy + Cdz = 0.$$

Что-то такое мелькало на прошлой-позапрошлой страничке, нет?

Действительно, при выводе формулы (74) было:

$$F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz = 0.$$

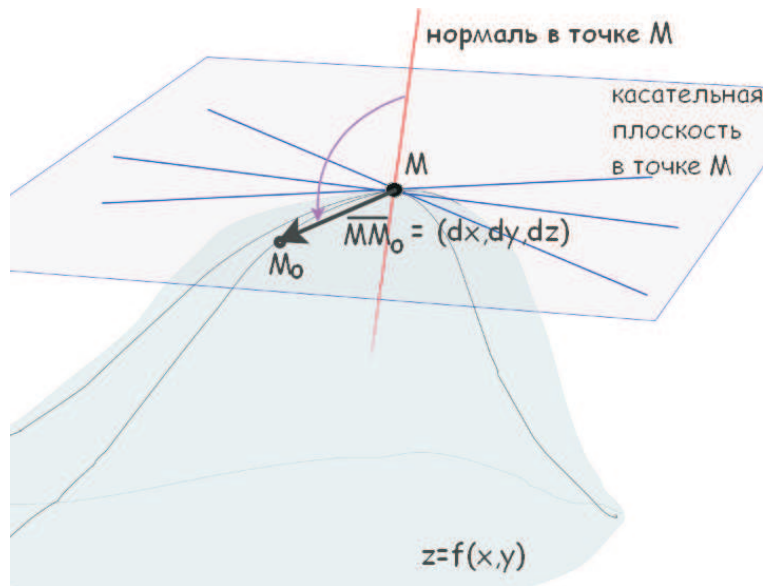


Рисунок 52 - Касательная плоскость и нормаль - 2

Значит в качестве вектора нормали можно взять

$$\bar{n} = (F'_x, F'_y, F'_z).$$

Как построить плоскость, зная точку и нормаль? А прямую, зная точку и направляющий? Эти уравнения (22), (27) были получены в самом первом разделе. Итак:

уравнение касательной плоскости:

$$P : F'_x(x - x_o) + F'_y(y - y_o) + F'_z(z - z_o) = 0; \quad (75)$$

уравнение нормали (прямой):

$$l : \frac{x - x_o}{F'_x} = \frac{y - y_o}{F'_y} = \frac{z - z_o}{F'_z}. \quad (76)$$

Замечание: вектор нормали можно разделить или умножить на любое ненулевое число, а ещё можно записать в виде $\bar{n} = (z'_x, z'_y, -1)$ (это из формул производной неявной функции следует).

5.4.1 Экстремум функции двух переменных

Точка M_o называется точкой максимума функции $z = f(x, y)$, если

$$\exists \delta > 0 \quad \forall M : |\overline{MM_o}| < \delta \Rightarrow f(M) < f(M_o).$$

Точка M_o называется точкой минимума функции $z = f(x, y)$, если

$$\exists \delta > 0 \quad \forall M : \quad |\overline{MM_o}| < \delta \Rightarrow f(M) > f(M_o).$$

Для тех, кто сейчас заплакал: если коротко, то первое определение гласит, что точка является точкой максимума, если хотя-бы на маленьком кусочке значение в этой точке выше, чем в остальных точках этого кусочка. Аналогично для минимума. И эти точки по прежнему называются точками экстремума.

Как определить, что вы нашли экстремум?

Во-первых, производная первого порядка в точке экстремума должна быть равна нулю или не существовать. Обе равны нулю или хотя бы одна не существовать. Ноль производной гарантирует горизонтальность касательной, отсутствие производной намекает на острый пик, как у конуса, например.

Во-вторых, график должен быть выпуклым или вогнутым - это определяли с помощью второй производной. И вот тут всё сложнее в пространстве. Вспомните хотя бы седло.

Теорема (достаточный признак экстремума). Пусть функция $z = f(x, y)$ дважды дифференцируема в точке $M(x_o, y_o)$ и первые производные в этой точке равны нулю. Если $M(x_o, y_o)$ точка экстремума, то имеет место неравенство:

$$\begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{yx} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{vmatrix} > 0 \text{ (в точке } M\text{)}.$$

При этом,

если $z''_{xx}(M) > 0$, то M - точка минимума,

если $z''_{xx}(M) < 0$, то M - точка максимума.

Если упомянутый выше определитель в точке M отрицателен, то вы нашли седловую точку (сердечно поздравляю).

5.5 Задания для самостоятельного решения

Найти область определения функции двух переменных:

1) $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$. 2) $z = \ln(y^2 - 4x + 8)$.

3) $z = \frac{1}{R^2 - x^2 - y^2}$. 4) $z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$.

Найти частные производные:

5) $z = \arctg \frac{x}{y}$. 6) $z = x^y$. 7) $z = \ln tg \frac{x}{y}$. 8) $z = e^{-x/y}$.

Ответы к заданиям: 1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$. 2) $y^2 > 4x + 8$. 3) Вся плоскость, за исключением точек окружности $x^2 + y^2 = R^2$. 4) Внутренняя часть правого вертикального угла, образованного биссектрисами координатных углов, включая сами биссектрисы. 5) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2}$. 6) $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$. 7) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2}{y \sin \frac{2x}{y}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x}{y^2 \sin \frac{2x}{y}}$. 8) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{y} e^{-x/y}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y^2} e^{-x/y}$.

5.6 Вопросы для самопроверки к разделу 5

1. Что такое функция двух переменных?
2. Каков геометрический смысл ФНП?
3. Как определяется предел ФНП?
4. Как определяется непрерывность функции двух переменных в точке и в области.
5. Как определяется дифференцирование функции нескольких переменных?
6. Что такое частное приращение и частная производная функции двух переменных?
7. Как определяется полный дифференциал функции двух переменных?
8. Как вычисляются частные производные неявной функции $F(x, y) = 0$?
9. Как составляется уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности?
10. Как вычисляются частные производные высших порядков.
11. Как находят экстремум функции двух переменных?
12. Что такое критические точки?
13. Что такое стационарные точки?
14. Что такое минимакс функции двух переменных?

Литература

Список основной литературы

Вся литература доступна на сайте СибГУТИ.

1. Трофимов, В. К. Дифференциальное исчисление [Текст] : учеб. пособие / В.К. Трофимов, В.И. Агульник ; Сиб. гос. ун-т телекоммуникаций и информатики. - Новосибирск : СибГУТИ, 2013. - 150, [2] с. : ил. - Библиогр.: с. 149-150.

2. Трофимов, В. К. Теория рядов [Текст] : учеб. пособие / В.К. Трофимов, Т.С. Мурзина, Т.Э. Захарова ; Сиб. гос. ун-т телекоммуникаций и информатики. - Новосибирск : СибГУТИ, 2013. - 144, [2] с. : ил. - Библиогр.: с. 144.

3. Захарова, Т. Э. Математический анализ [Текст] : учеб. пособие / Т. Э. Захарова; Сиб.гос.ун-т телекоммуникаций и информатики ; Сиб. гос. ун-т телекоммуникаций и информатики. - Новосибирск : СибГУТИ, 2013. - 50, [1] с.

4. Сборник задач по математическому анализу. 2 семестр [Текст] : учеб. пособие / О.Е. Дмитриева, Т.С.Мурзина, Л.А. Подмогаева, В.К. Трофимов; Сиб. гос. ун-т телекоммуникаций и информатики. - Новосибирск : [б. и.], 2011. - 94с.

5. Дмитриева, О. Е. Сборник задач по математическому анализу. 1 семестр [Текст] : учеб. пособие / О.Е. Дмитриева; Сиб. гос. ун-т телекоммуникаций и информатики. - Новосибирск : [б. и.], 2011. - 71с.

Список дополнительной литературы

1. Шапкин А.С. Задачи с решениями по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию [Электронный ресурс] : учебное пособие для бакалавров / А.С. Шапкин, В.А. Шапкин. — Электрон. текстовые данные. — М. : Дашков и К, 2015. — 432 с. — 978-5-394-01943-2. — Режим доступа:

<http://www.iprbookshop.ru/5103.html> по паролю

2. Головкин О.В. Высшая математика. Часть I. Матрицы и определители. Системы линейных уравнений. Векторная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс] : учебное пособие / О.В. Головкин, Г.Н. Дадаева, Е.В. Салтанова. — Электрон. текстовые дан-

ные. — Кемерово: Кемеровская государственная медицинская академия, 2006. — 56 с. — 2227-8397. — Режим доступа:

<http://www.iprbookshop.ru/6111.html> по паролю

3. Высшая математика. Часть II. Математический анализ [Электронный ресурс] : учебное пособие / В.И. Бухтоярова [и др.]. — Электрон. текстовые данные. — Кемерово: Кемеровская государственная медицинская академия, 2007. — 92 с. — 2227-8397. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/6112.html> по паролю