# Индивидуальное домашнее задание по «Марковским процессам».

**1.** Задан случайный процесс $\xi(t)$. Найдите: $M_\xi(t), D_\xi(t), Cov_\xi(t_1,t_2)$.

1) $\xi(t) = at\eta_1\cos(\nu t) + b\eta_2 t^2 + ct$, где $a$, $b$, $c$, $\nu$ –известные неслучайные параметры. Известно, что $M\eta_1 = \mu_1$, $D\eta_1 = \sigma_1$, $M\eta_2 = \mu_2$, $D\eta_2 = \sigma_2$, $\rho_{\eta_1\eta_2} = \rho$.
2) $\xi(t) = a\eta^2 t + bt + ct\eta^2 - d\eta t,\ \ t > 0$, где $\eta$ – случайная величина с плотностью распределения
$$p_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (d_1; d_2) \\ Ax, & x \in (d_1; d_2) \end{cases}$$
3) $\xi(t) = ae^{-bt\eta - ct} + dt,\ t > 0$, где $\eta$ имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda$ **(для нечетных вариантов)**
$\xi(t) = at\eta + bt\sin(c\pi + d\mu), t \in R$, где $\eta$ и $\mu$ – независимые случайные величины, $\eta \sim N(m,\sigma)$, $\mu$ имеет равномерное распределение на $[c_1,\ c_2]$ **(для четных вариантов).**

**2.** Запишите:

1) преобразование Лапласа $f(s)$ (используя таблицу преобразований Лапласа) заданной в варианте функции $f(t)$;
2) Найдите (используя таблицу преобразований Лапласа) вид функции $f(t)$, если ее преобразование Лапласа $f(s)$ имеет вид, заданный в варианте

**3.** Цепь Маркова задана матрицей переходных вероятностей $P$ и начальным распределением $\vec{p}(0)$

1) Классифицируйте каждое состояние, укажите классы эргодичности и найдите канонический вид матрицы переходных вероятностей, нарисуйте граф по матрице переходных вероятностей.
2) Найдите фундаментальную матрицу $N$ и матрицу $D$.
3) Пусть $\Theta$ – время пребывания в множестве несущественных состояний. Найдите $M\Theta$ и $D\Theta$.
4) Найдите вероятности перехода в поглощающие состояния и вероятности перехода к состояния эргодических классов.
5) Найдите вероятность того, что цепь Маркова покинет множество несущественных состояний на первом, втором и третьем шаге.

**4.** Найдите матрицы переходных вероятностей для Марковских цепей, описывающие следующие процессы.

**Пункт 1) для вариантов с номерами 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28**
**Пункт 2) для вариантов с номерами 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29**
**Пункт 3) для вариантов с номерами 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30**

1) В начальный момент времени в урне А содержится *к* шаров, а в урне В - (*N*–к) шаров. На каждом шаге с вероятностью, пропорциональной числу содержащихся в ней шаров, выбирается одна из урн (т.е. если в урне А *к* шаров, то урна А выбирается с вероятностью *к*/*N*, а урна В с вероятностью (*N*–*к*)/*N*). В выбранную урну кладется шар, который предварительно извлекается из урны А с вероятностью $p$ и из урны В с вероятностью $q$. Состояние цепи при каждом испытании—число шаров в урне А.
2) В начальный момент времени в урне А содержится *к* шаров, а в урне В - (*N*–к) шаров. На каждом шаге с вероятностью, пропорциональной числу содержащихся в ней шаров, выбирается одна из урн (т.е. если в урне А *к* шаров, то урна А выбирается с вероятностью *к*/*N*, а урна В с вероятностью (*N*–*к*)/*N*). В выбранную урну кладется шар, который предварительно извлекается из урны А с вероятностью, пропорциональной числу содержащихся в ней шаров, и из урны В с вероятностью, пропорциональной числу содержащихся в ней шаров. Состояние цепи при каждом испытании—число шаров в урне А.
3) В начальный момент времени *N* шаров размещены в двух урнах А и В поровну. На каждом шаге из общего числа *N* шаров случайно выбирается один шар и помещается с вероятностью $p$ в урну А и с вероятностью $q$ в урну В. Состояние цепи при каждом испытании — число шаров в урне А.

Для полученных матриц переходных вероятностей:

1. Постройте граф переходов цепи Маркова
2. Найдите матрицы переходных вероятностей за два и три шага;
3. Найдите распределение вероятностей состояний в моменты $n = 2$ и $n = 3$;
4. Вычислите вероятность того, что в моменты времени $n = 0,1,2,3$ состояниями цепи будут $i_0$, $i_1$, $i_2$ и $i_3$.

**5.** Цепь Маркова задана матрицей $P$ вероятностей переходов и вектором начального распределения вероятностей $\vec{p}(0)$. Пусть $\tau_0 = 0$, $\tau_i$– момент $i$-го изменения состояния цепи Маркова, $i \geq 1$.

1) Вычислите матрицы вероятностей переходов за 2 и 3 шага и векторы вероятностей состояний после 1, 2, 3 шагов.
2) Определите, является ли эта цепь Маркова эргодической, и, если это так, найдите предельное распределение этой цепи.
3) Найдите вероятность того, что, исходя из состояния $i$, цепь достигнет состояние $j$ на первом, втором, третьем шаге.
4) Найдите вероятность того, что, исходя из состояния $i$, цепь впервые достигнет состояние $j$ на первом, втором, третьем шаге.
5) Найдите вероятность того, что цепь Маркова в моменты $\tau_0, \tau_1, \tau_3, \tau_4, \tau_5$ будет находиться в состояниях $k_0, k_1, k_3, k_4, k_5$

**6.** Марковский процесс $\{\eta(t), t \geq 0\}$ задан матрицей интенсивностей переходов А переходов А и вектором начального распределения $\vec{p}(0)$.
1) Составьте и решите систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей $p_i(t)$
2) Найдите предельные вероятности состояний Марковского процесса.

**7.** Марковский процесс $\{\eta(t), t \geq 0\}$ задан матрицей интенсивностей переходов А и вектором начального распределения $\vec{p}(0)$. Пусть $\tau_0 = 0$, $\tau_i$– момент $i$-го изменения состояния марковского процесса, , $i \geq 1$.
1) Найдите стационарное распределение марковского процесса
2) Запишите матрицу переходных вероятностей по вложенной цепи Маркова, найдите стационарное распределение по вложенной цепи Маркова.
3) Найдите вероятность того, что, исходя из состояния $i$, цепь достигнет состояние $j$ на первом, втором, третьем шаге.
4) Найдите вероятность того, что, исходя из состояния $i$, цепь впервые достигнет состояние $j$ на первом, втором, третьем шаге.
5) Найдите вероятность того, что цепь Маркова в моменты $\tau_0, \tau_1, \tau_3, \tau_4, \tau_5$ будет находиться в состояниях $k_0, k_1, k_3, k_4, k_5$

**Распределение баллов**

| **Задача 1** | **Задача 2** | **Задача 3** | **Задача 4** | **Задача 5** | **Задача 6** | **Задача 7** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 балла | 2 балла | 3 балла | 2 балла | 2 балла | 4 балла | 4 балла |

| № варианта | № задачи | Данные |
| --- | --- | --- |
| 30 | 1. | $\mathrm{a} = \frac{4}{5}, b = -\frac{2}{7}, \mathrm{c} = -\frac{3}{2}, \nu = \frac{1}{4}, \mu_1 = 5, \mu_2 = 14, \sigma_1 = \frac{5}{2}, \sigma_2 = 7, \rho = -\frac{8}{35}$ |
| | | $a = \frac{4}{3}, b = -\frac{1}{5}, c = -\frac{5}{2}, d = \frac{5}{3}, d_1 = \frac{3}{2}, d_2 = \frac{8}{3}$ |
| | | $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{4}, c = -\frac{1}{2}, d = 3, \quad m = 3, \sigma = \frac{3}{2}, \quad c_1 = -\frac{\pi}{6}, c_2 = \frac{5\pi}{6}$ |
| | 2. | $f(t) = t^2\left(\frac{3t}{8} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2t^2}\cos\frac{2}{3}t - \frac{3t}{5}e^{-\frac{1}{2}t}\right)$ |
| | | $f(s) = \frac{9s}{36s^2+25} + \frac{3}{2s+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{s-1}{(2s-1)^2+1}$ |
| | 3. | $P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0. & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix} \quad \vec{p}(0) = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.2 \\ 0.1 \\ 0.2 \\ 0 \\ 0.1 \\ 0.2 \\ 0 \end{pmatrix}$ |
| | 4. | $N = 8, \mathrm{p} = \frac{3}{8}, q = \frac{5}{8}, i_0 = 4; i_1 = 3; i_2 = 2; i_3 = 1$ |
| | 5. | $P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,6 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,5 & 0,1 & 0.4 \end{pmatrix} \quad \vec{p}(0) = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,3 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ <br> $i = 1, j = 3, \quad k_0 = 2, k_1 = 2, k_3 = 3, k_4 = 3, k_5 = 1$ |
| | 6. | Матрица интенсивностей Марковского процесса равна $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. . <br> Начальное состояние процесса - состояние 3 |
| | 7. | $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -6 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}(0) = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{pmatrix},$ <br> $i = 1, j = 2, \quad k_0 = 2, k_1 = 3, k_3 = 4, k_4 = 2, k_5 = 4$ |