

Контрольная работа по дисциплине «Математика»

Часть 1

Тема: Комплексные числа.

Выполнить задания №1-5 (стр. 16) из методических указаний «Комплексные числа»

Часть 2

Тема: Линейная алгебра.

Задача 1. Решить систему линейных уравнений методом Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Жордана-Гаусса.

$$1. \begin{cases} x + 2y + 4z = 18 \\ 5x + y + 2z = 27 \\ 3x + 2y + 3z = 24 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 5x + 4y + 3z = 23 \\ 2x + 3y + z = 10 \\ 3x + 2y + 2z = 14 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x + y + z = 9 \\ -2x + 4y - z = 11 \\ 7x + 2y + 2z = 24 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x + 4y + 8z = 70 \\ 3x - 2y + z = 4 \\ -7x + 9y + 5z = 55 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 3x + 7y + 2z = 31 \\ 5x + 3y + z = 32 \\ 4x + 2y + 2z = 26 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 6x + 2y + 4z = 52 \\ 3x + 7y + 2z = 38 \\ 8x + 3y + 5z = 69 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 7x + 2y + 3z = 33 \\ 3x + 2y + 4z = 28 \\ 5x + 2y + z = 23 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 5x + y + 3z = 20 \\ 4x + 2y + z = 17 \\ 3x + 5y + 2z = 21 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 5x + 3y + 4z = 42 \\ 2x + 5y + z = 27 \\ 3x + 2y + 6z = 33 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 7x + 4y + 2z = 53 \\ 3x + 2y + z = 25 \\ 6x + 4y + 3z = 52 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x + 4y + 4z = 24 \\ 5x + 2y + 2z = 30 \\ 3x + 2y + 3z = 24 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x + 4y + 2z = 24 \\ 3x + 7y + 5z = 49 \\ 6x + 2y + z = 23 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 3x + 2y + z = 11 \\ 6x + 5y + 2z = 23 \\ 3x + 4y + 5z = 25 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 3x + 4y + 5z = 25 \\ x + 3y + 2z = 11 \\ 2x + 2y + 3z = 15 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x + 4y + 2z = 25 \\ 3x + 7y + 5z = 48 \\ 6x + 2y + z = 18 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x + 4y + 2z = 33 \\ 3x + 7y + 5z = 68 \\ 6x + 2y + z = 55 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 2x + y + 7z = 47 \\ 4x + 5y + 6z = 55 \\ 3x + 2y + z = 15 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 2x + y + 7z = 29 \\ 4x + 5y + 6z = 63 \\ 3x + 2y + z = 28 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 2x + y + 7z = 16 \\ 4x + 5y + 6z = 39 \\ 3x + 2y + z = 17 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 2x + 3y + z = 19 \\ 4x + 3y + 2z = 23 \\ 3x + 5y + 2z = 32 \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} 2x + 3y + z = 16 \\ 4x + 3y + 2z = 26 \\ 3x + 5y + 2z = 27 \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} x + 2y + 4z = 7 \\ 5x + y + 2z = 8 \\ 3x + 2y + 3z = 8 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} 2x + 7y + z = 10 \\ 4x + 5y + 2z = 11 \\ 3x + 7y + 4z = 14 \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} x + 3y + 5z = 29 \\ 5x + 2y + z = 21 \\ 2x + 2y + 3z = 29 \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} x + 3y + 5z = 37 \\ 5x + 2y + z = 26 \\ 2x + 2y + 3z = 33 \end{cases}$$

Тема: Векторная алгебра.

Задача 2. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

1. $a = \{1, -2, 3\}, b\{3, 0, -1\}, c_1 = 2a + 4b, c_2 = 3b - a.$

2. $a = \{1, 0, 1\}, b\{-2, 3, 5\}, c_1 = a + 2b, c_2 = 3a - b.$

3. $a = \{-2, 4, 1\}, b\{1, -2, 7\}, c_1 = 5a + 3b, c_2 = 2a - b.$

4. $a = \{1, 2, -3\}, b\{2, -1, -1\}, c_1 = 4a + 3b, c_2 = 8a - b.$

5. $a = \{3, 5, 4\}, b\{5, 9, 7\}, c_1 = -2a + b, c_2 = 3a - 2b.$

6. $a = \{1, 4, -2\}, b\{1, 1, -1\}, c_1 = a + b, c_2 = 4a + 2b.$

7. $a = \{1, -2, 5\}, b\{3, -1, 0\}, c_1 = 4a - 2b, c_2 = b - 2a.$

8. $a = \{3, 4, -1\}, b\{2, -1, 1\}, c_1 = 6a - 3b, c_2 = b - 2a.$

9. $a = \{-2, -3, -2\}, b\{1, 0, -5\}, c_1 = 3a + 9b, c_2 = -a - 3b.$

10. $a = \{1, 4, 2\}, b\{3, -2, 6\}, c_1 = 2a - b, c_2 = 3b - 6a.$

11. $a = \{5, 0, -1\}, b\{7, 2, 3\}, c_1 = 2a - b, c_2 = 3b - 6a.$

12. $a = \{0, 3, -2\}, b\{1, -2, 1\}, c_1 = 5a - 2b, c_2 = 3a + 5b.$

13. $a = \{-2, 7, -1\}, b\{-3, 5, 2\}, c_1 = 2a + 3b, c_2 = 3a + 2b.$

14. $a = \{3, 7, 0\}, b\{1, -3, 4\}, c_1 = 4a - 2b, c_2 = b - 2a.$

15. $a = \{-1, 2, -1\}, b\{2, -7, 1\}, c_1 = 6a - 2b, c_2 = b - 3a.$

16. $a = \{7, 9, -2\}, b\{5, 4, 3\}, c_1 = 4a - b, c_2 = 4b - a.$

17. $a = \{5, 0, -2\}, b\{6, 4, 3\}, c_1 = 5a - 3b, c_2 = 6b - 10a.$

18. $a = \{8, 3, -1\}, b\{4, 1, 3\}, c_1 = 2a - b, c_2 = 2b - 4a.$

19. $a = \{3, -1, 6\}, b\{5, 7, 10\}, c_1 = 4a - 2b, c_2 = b - 2a.$

20. $a = \{1, -2, 4\}, b\{7, 3, 5\}, c_1 = 6a - 3b, c_2 = b - 2a.$

21. $a = \{3, 7, 0\}, b\{4, 6, -1\}, c_1 = 3a + 2b, c_2 = 5a - 7b.$

$$22. a = \{2, -1, 4\}, b\{3, -7, -6\}, c_1 = 2a - 3b, c_2 = 3a - 2b.$$

$$23. a = \{5, -1, -2\}, b\{6, 0, 7\}, c_1 = 3a - 2b, c_2 = 4b - 6a.$$

$$24. a = \{-9, 5, 3\}, b\{7, 1, -2\}, c_1 = 2a - b, c_2 = 3a + 5b.$$

$$25. a = \{4, 2, 9\}, b\{0, -1, 3\}, c_1 = 4b - 3a, c_2 = 4a - 3b.$$

$$26. a = \{2, -1, 6\}, b\{-1, 3, 8\}, c_1 = 5a - 2b, c_2 = 2a - 5b.$$

$$27. a = \{5, 0, 8\}, b\{-3, 1, 7\}, c_1 = 3a - 4b, c_2 = 12b - 9a.$$

$$28. a = \{-1, 3, 4\}, b\{2, -1, 0\}, c_1 = 6a - 2b, c_2 = b - 3a.$$

$$29. a = \{4, 2, -7\}, b\{5, 0, -3\}, c_1 = a - 3b, c_2 = 6b - 2a.$$

$$30. a = \{2, 0, -5\}, b\{1, -3, 4\}, c_1 = 2a - 5b, c_2 = 5a - 2b.$$

$$31. a = \{-1, 2, 8\}, b\{3, 7, -1\}, c_1 = 4a - 3b, c_2 = 9b - 12a.$$

$$32. a = \{1, -2, 3\}, b\{3, 0, -1\}, c_1 = 2a + 4b, c_2 = 3b - a.$$

Задача 3. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

- | | | | |
|---|---|---|---|
| 1. $A(1, -2, 3),$
$B(0, -1, 2),$
$C(3, -4, 5).$ | 9. $A(0, 1, -2),$
$B(3, 1, 2),$
$C(4, 1, 1).$ | 17. $A(0, 2, -4),$
$B(8, 2, 2),$
$C(6, 2, 4).$ | 25. $A(0, 3, -6),$
$B(9, 3, 6),$
$C(12, 3, 3).$ |
| 2. $A(0, -3, 6),$
$B(-12, -3, -3),$
$C(-9, -3, -6).$ | 10. $A(3, 3, -1),$
$B(1, 5, -2),$
$C(4, 1, 1).$ | 18. $A(3, 3, -1),$
$B(5, 1, -2),$
$C(4, 1, 1).$ | 26. $A(3, 3, -1),$
$B(5, 1, -2),$
$C(4, 1, -3).$ |
| 3. $A(3, 3, -1),$
$B(5, 5, -2),$
$C(4, 1, 1).$ | 11. $A(2, 1, -1),$
$B(6, -1, -4),$
$C(4, 2, 1).$ | 19. $A(-4, 3, 0),$
$B(0, 1, 3),$
$C(-2, 4, -2).$ | 27. $A(-2, 1, 1),$
$B(2, 3, -2),$
$C(0, 0, 3).$ |
| 4. $A(1, -2, 3),$
$B(0, -1, 2),$
$C(3, -4, 5).$ | 12. $A(-1, -2, 1),$
$B(-4, -2, 5),$
$C(-8, -2, 2).$ | 20. $A(1, -1, 0),$
$B(-2, -1, 4),$
$C(8, -1, -1).$ | 28. $A(1, 4, -1),$
$B(-2, 4, -5),$
$C(8, 4, 0).$ |
| 5. $A(-4, -20),$
$B(-1, -2, 4),$
$C(3, -2, 1).$ | 13. $A(6, 2, -3),$
$B(6, 3, -2),$
$C(7, 3, -3).$ | 21. $A(7, 0, 2),$
$B(7, 1, 3),$
$C(8, -1, 2).$ | 29. $A(0, 1, 0),$
$B(0, 2, 1),$
$C(1, 2, 0).$ |
| 6. $A(5, 3, -1),$
$B(5, 2, 0),$
$C(6, 4, -1).$ | 14. $A(0, 0, 4),$
$B(-3, -6, 1),$
$C(-5, -10, -1).$ | 22. $A(2, 3, 2),$
$B(-1, -3, -1),$
$C(-3, -7, -3).$ | 30. $A(-4, 0, 4),$
$B(-1, 6, 7),$
$C(1, 10, 9).$ |
| 7. $A(-3, -7, -5),$
$B(0, -1, -2),$
$C(2, 3, 0).$
$A(2, -4, 6),$ | 15. $A(2, -8, -1),$
$B(4, -6, 0),$
$C(-2, -5, -1).$ | 23. $A(2, 2, 7),$
$B(0, 0, 6),$
$C(-2, 5, 7).$ | 31. $A(-2, 4, -6),$
$B(0, 2, -4),$
$C(-6, 8, -10).$ |
| 8. $B(0, -2, 4),$
$C(6, -8, 10).$ | 16. $A(3, -6, 9),$
$B(0, -3, 6),$
$C(9, -12, 15).$ | 24. $A(-1, 2, -3),$
$B(0, 1, -2),$
$C(-3, 4, -5).$ | 32. $A(1, -2, 3),$
$B(0, -1, 2),$
$C(3, -4, 5).$ |

Задача 4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

1. $a = p + 2q, b = 3p - q; |p| = 1, |q| = 2, (p \wedge q) = \pi / 6.$
2. $a = 3p + q, b = p - 2q; |p| = 4, |q| = 1, (p \wedge q) = \pi / 4.$
3. $a = p - 3q, b = p + 2q; |p| = 1/5, |q| = 1, (p \wedge q) = \pi / 2.$
4. $a = 3p - 22q, b = p + 5q; |p| = 4, |q| = 1/2, (p \wedge q) = 5\pi / 6.$
5. $a = p - 2q, b = 2p + q; |p| = 2, |q| = 3, (p \wedge q) = 3\pi / 4.$
6. $a = p + 3q, b = p - 2q; |p| = 2, |q| = 3, (p \wedge q) = \pi / 3.$
7. $a = 2p - q, b = p + 3q; |p| = 3, |q| = 2, (p \wedge q) = \pi / 2.$
8. $a = 4p + q, b = p - q; |p| = 7, |q| = 2, (p \wedge q) = \pi / 4.$
9. $a = p - 4q, b = 3p + q; |p| = 1, |q| = 2, (p \wedge q) = \pi / 6.$
10. $a = p + 4q, b = 2p - q; |p| = 7, |q| = 2, (p \wedge q) = \pi / 3.$
11. $a = 3p + 2q, b = p - q; |p| = 10, |q| = 1, (p \wedge q) = \pi / 2.$
12. $a = 4p - q, b = p + 2q; |p| = 5, |q| = 4, (p \wedge q) = \pi / 4.$
13. $a = 2p + 3q, b = p - 2q; |p| = 6, |q| = 7, (p \wedge q) = \pi / 3.$
14. $a = 3p - q, b = p + 2q; |p| = 3, |q| = 4, (p \wedge q) = \pi / 3.$
15. $a = 2p + 3q, b = p - 2q; |p| = 2, |q| = 3, (p \wedge q) = \pi / 4.$
16. $a = 2p - 3q, b = 3p + q; |p| = 4, |q| = 1, (p \wedge q) = \pi / 6.$
17. $a = 5p + q, b = p - 3q; |p| = 1, |q| = 2, (p \wedge q) = \pi / 3.$
18. $a = 7p - 2q, b = p + 3q; |p| = 1/2, |q| = 2, (p \wedge q) = \pi / 2.$
19. $a = 6p - q, b = p + q; |p| = 3, |q| = 4, (p \wedge q) = \pi / 4.$
20. $a = 10p + q, b = 3p - 2q; |p| = 4, |q| = 1, (p \wedge q) = \pi / 6.$
21. $a = 6p - q, b = p + 2q; |p| = 8, |q| = 1/2, (p \wedge q) = \pi / 3.$
22. $a = 3p + 4q, b = q - p; |p| = 2, 5, |q| = 2, (p \wedge q) = \pi / 2.$
23. $a = 7p + q, b = p - 3q; |p| = 3, |q| = 1, (p \wedge q) = 3\pi / 4.$
24. $a = p + 3q, b = 3p - q; |p| = 3, |q| = 5, (p \wedge q) = 2\pi / 3.$
25. $a = 3p + q, b = p - 3q; |p| = 7, |q| = 2, (p \wedge q) = \pi / 4.$
26. $a = 5p - q, b = p + q; |p| = 5, |q| = 3, (p \wedge q) = 5\pi / 6.$
27. $a = 3p - 4q, b = p + 3q; |p| = 2, |q| = 3, (p \wedge q) = \pi / 4.$
28. $a = 6p - q, b = 5q + p; |p| = 1/2, |q| = 4, (p \wedge q) = 5\pi / 6.$
29. $a = 2p + 3q, b = p - 2q; |p| = 2, |q| = 1, (p \wedge q) = \pi / 3.$

$$30. a = 2p - 3q, b = 5p + q; |p| = 2, |q| = 3, (p \wedge q) = \pi / 2.$$

$$31. a = 3p + 2q, b = 2p - q; |p| = 4, |q| = 4, (p \wedge q) = 3\pi / 4.$$

$$32. a = p + 2q, b = 3p - q; |p| = 1, |q| = 2, (p \wedge q) = \pi / 6.$$

Задача 5. Компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

$$1. a = \{2, 3, 1\}, b = \{-1, 0, -1\}, c = \{2, 2, 2\}.$$

$$2. a = \{3, 2, 1\}, b = \{2, 3, 4\}, c = \{3, 1, -1\}$$

$$3. a = \{1, 5, 2\}, b = \{-1, 1, -1\}, c = \{1, 1, 1\}.$$

$$4. a = \{1, -1, -3\}, b = \{3, 2, 1\}, c = \{2, 3, 4\}.$$

$$5. a = \{3, 3, 1\}, b = \{1, -2, 1\}, c = \{1, 1, 1\}.$$

$$6. a = \{3, 1, -1\}, b = \{-2, -1, 0\}, c = \{5, 2, -1\}.$$

$$7. a = \{4, 3, 1\}, b = \{1, -2, 1\}, c = \{2, 2, 2\}.$$

$$8. a = \{4, 3, 1\}, b = \{6, 7, 4\}, c = \{2, 0, -1\}.$$

$$9. a = \{3, 2, 1\}, b = \{1, -3, -7\}, c = \{1, 2, 3\}.$$

$$10. a = \{3, 7, 2\}, b = \{-2, 0, -1\}, c = \{2, 2, 1\}.$$

$$11. a = \{1, -2, 6\}, b = \{1, 0, 1\}, c = \{2, -6, 17\}.$$

$$12. a = \{6, 3, 4\}, b = \{-1, 2, -1\}, c = \{2, 1, 2\}.$$

$$13. a = \{7, 3, 4\}, b = \{-1, 2, -1\}, c = \{4, 2, 4\}.$$

$$14. a = \{2, 3, 2\}, b = \{4, 7, 5\}, c = \{2, 0, -1\}.$$

$$15. a = \{5, 3, 4\}, b = \{-1, 0, -1\}, c = \{4, 2, 4\}.$$

$$16. a = \{3, 10, 5\}, b = \{-2, -2, -3\}, c = \{2, 4, 3\}.$$

$$17. a = \{-2, -4, -3\}, b = \{4, 3, 1\}, c = \{6, 7, 4\}.$$

$$18. a = \{3, 1, -1\}, b = \{1, 0, -1\}, c = \{8, 3, -2\}.$$

$$19. a = \{4, 2, 2\}, b = \{-3, -3, -3\}, c = \{2, 1, 2\}.$$

$$20. a = \{4, 1, 2\}, b = \{9, 2, 5\}, c = \{1, 1, -1\}.$$

$$21. a = \{5, 3, 4\}, b = \{4, 3, 3\}, c = \{9, 5, 8\}.$$

$$22. a = \{3, 4, 2\}, b = \{1, 1, 0\}, c = \{8, 1, 6\}.$$

$$23. a = \{4, -1, -6\}, b = \{1, -3, -7\}, c = \{2, -1, -4\}.$$

$$24. a = \{3, 1, 0\}, b = \{-5, -4, -5\}, c = \{4, 2, 4\}.$$

$$25. a = \{3, 0, 3\}, b = \{8, 1, 6\}, c = \{1, 1, -1\}.$$

$$26. a = \{1, -1, 4\}, b = \{1, 0, 3\}, c = \{1, -3, 8\}.$$

$$27. a = \{6, 3, 4\}, b = \{-1, -2, -1\}, c = \{2, 1, 2\}.$$

$$28. a = \{4, 1, 1\}, b = \{-9, -4, -9\}, c = \{6, 2, 6\}.$$

$$29. a = \{-3, 3, 3\}, b = \{-4, 7, 6\}, c = \{3, 0, -1\}.$$

$$30. a = \{-7, 10, -5\}, b = \{0, -2, -1\}, c = \{-2, 4, -1\}.$$

$$31. a = \{7, 4, 6\}, b = \{2, 1, 1\}, c = \{19, 11, 17\}.$$

$$32. a = \{2, 3, 1\}, b = \{-1, 0, -1\}, c = \{2, 2, 2\}.$$

Задача 6. Найти угол между плоскостями.

$$1. x - 3y + 5 = 0, 2x - y + 5z - 16 = 0.$$

$$2. x - 3y + z - 1 = 0, x + z - 1 = 0.$$

$$3. 4x - 5y + 3z - 1 = 0, 2x - 4y - z + 9 = 0.$$

$$4. 3x - y + 2z + 15 = 0, 5x + 9y - 3z - 1 = 0.$$

$$5. 6x + 2y - 4z + 17 = 0, 9x + 3y - 6z - 4 = 0.$$

$$6. x - y\sqrt{2} + z - 1 = 0, 2x + y\sqrt{2} - z + 36 = 0.$$

$$7. 3y - z = 0, 2y - z = 0.$$

$$8. 6x + 3y - 2z = 0, x + 2y + 6z - 12 = 0.$$

$$9. x + 2y + 2z - 3 = 0, 16x + 12y - 15z - 1 = 0.$$

$$10. 2x - y + 5z + 16, x + 2y + 3z + 8 = 0.$$

$$11. 2x + 2y + z - 1 = 0, x + z - 1 = 0.$$

$$12. 3x + y + z - 4 = 0, y + z + 5 = 0.$$

$$13. 3x - 2y - 2z - 16 = 0, x + y - 3z - 7 = 0.$$

$$17. x - 3y - 2z - 8 = 0, x + y - z + 3 = 0.$$

$$18. 3x - 2y + 3z + 23 = 0, y + z + 5 = 0.$$

$$19. x + y + 3z - 7 = 0, 2y + z - 1 = 0.$$

$$20. x - 2y + 2z + 17 = 0, x - 2y - 1 = 0.$$

$$21. x - 2y + 2z + 17 = 0, x - 2y - 1 = 0.$$

$$22. 2x - z + 5 = 0, 2x + 3y - 7 = 0.$$

$$23. 5x + 3y + z - 18 = 0, 2y + z - 9 = 0.$$

$$24. 4x + 3z - 2 = 0, x + 2y + 2z + 5 = 0.$$

$$25. x + 4y - z + 1 = 0, 2x + y + 4z - 3 = 0.$$

$$26. 2y + z - 9 = 0, x - y + 2z - 1 = 0.$$

$$27. 2x - 6y + 14z - 1 = 0, 5x - 15y + 35z - 3 = 0.$$

$$28. x - y + 7z - 1 = 0, 2x - 2y - 5 = 0.$$

$$29. 3x - y - 5 = 0, 2x + y - 3 = 0.$$

$$14. 2x + 2y + z + 9 = 0, 2x - y + 3z - 1 = 0.$$

$$15. x + 2y + 2z - 3 = 0, 2x - y + 2z + 5 = 0.$$

$$16. 3x + 2y - 3z - 1 = 0, x + y + z - 7 = 0.$$

$$30. x + y + z\sqrt{2} - 3 = 0, x - y + z\sqrt{2} - 1 = 0.$$

$$31. x + 2y - 2z - 7 = 0, x + y - 35 = 0.$$

$$32. x - 3y + 5 = 0, 2x - y + 5z - 16 = 0.$$

Задача 7. Написать канонические уравнения прямой, заданной двумя плоскостями.

$$1. 2x + y + z - 2 = 0, 2x - y - 3z + 6 = 0.$$

$$2. x - 3y + 2z + 2 = 0, x + 3y + z + 14 = 0.$$

$$3. x - 2y + z - 4 = 0, 2x + 2y - z - 8 = 0.$$

$$4. x + y + z - 2 = 0, x - y - 2z + 2 = 0.$$

$$5. 2x + 3y + z + 6 = 0, x - 3y - 2z + 3 = 0.$$

$$6. 3x + y - z - 6 = 0, 3x - y + 2z = 0.$$

$$7. x + 5y + 2z + 11 = 0, x - y - z - 1 = 0.$$

$$8. 3x + 4y - 2z + 1 = 0, 2x - 4y + 3z + 4 = 0.$$

$$9. 5x + y - 3z + 4 = 0, x - y + 2z + 2 = 0.$$

$$10. x - y - z - 2 = 0, x - 2y + z + 4 = 0.$$

$$11. 4x + y - 3z + 2 = 0, 2x - y + z - 8 = 0.$$

$$12. 3x + 3y - 2z - 1 = 0, 2x - 3y + z + 6 = 0.$$

$$13. 6x - 7y - 4z - 2 = 0, x + 7y - z - 5 = 0.$$

$$14. 8x - y - 3z - 1 = 0, x + y + z + 10 = 0.$$

$$15. 6x - 5y - 4z + 8 = 0, 6x + 5y + 3z + 4 = 0.$$

$$16. x + 5y - z - 5 = 0, 2x - 5y + 2z + 5 = 0.$$

$$17. 2x - 3y + z + 6 = 0, x - 3y - 2z + 3 = 0.$$

$$18. 5x + y + 2z + 4, x - y - 3z + 2 = 0.$$

$$19. 4x + y + z + 2 = 0, 2x - y - 3z - 8 = 0.$$

$$20. 2x + y - 3z - 2 = 0, 2x - y + z + 6 = 0.$$

$$21. x + 5y - z + 11 = 0, x - y + 2z - 1 = 0.$$

$$22. 2x + y + z - 2 = 0, 2x - y - 3z + 6 = 0.$$

$$23. x - y + z - 2 = 0, x - 2y - z + 4 = 0.$$

$$24. 6x - 7y - z - 2 = 0, x + 7y - 4z - 5 = 0.$$

$$25. x + 5y + 2z - 5 = 0, 2x - 5y - z + 5 = 0.$$

$$26. x - 3y + z + 2 = 0, x + 3y + 2z + 14 = 0.$$

$$27. 2x + 3y - 2z + 6 = 0, x - 3y + z + 3 = 0.$$

$$28. 3x + 4y + 3z + 1 = 0, 2x - 4y - 2z + 4 = 0.$$

$$29. 3x + 3y + z - 1 = 0, 2x - 3y - 2z + 6 = 0.$$

$$30. 6x - 5y + 3z + 8 = 0, 6x + 5y - 4z + 4 = 0.$$

$$31. 2x - 3y - 2z + 6 = 0, x - 3y + z + 3 = 0.$$

$$32. 2x + y + z - 2 = 0, 2x - y - 3z + 6 = 0.$$

Задача 8. Найти точку пересечения прямой и плоскости.

$$1. \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{4}, x + 2y + 3z - 14 = 0.$$

$$2. \frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{5}, x + 2y - 5z + 20 = 0.$$

$$3. \frac{x-1}{-1} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{2}, x - 3y + 7z - 24 = 0.$$

$$4. \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{2}, 2x - y + 4z = 0.$$

$$5. \frac{x-5}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{0}, 3x + y - 5z - 12 = 0.$$

$$6. \frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-2}, x + 3y - 5z + 9 = 0.$$

$$7. \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}, x - 2y + 5z + 17 = 0.$$

$$17. \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{5}, 2x + 3y + 7z - 52 = 0.$$

$$18. \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{2}, 3x + 4y + 7z - 16 = 0.$$

$$19. \frac{x-5}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+4}{-1}, 2x - 5y + 4z + 24 = 0.$$

$$20. \frac{x-1}{8} = \frac{y-8}{-5} = \frac{z+5}{12}, x - 2y - 3z + 18 = 0.$$

$$21. \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{0}, x + 7y + 3z + 11 = 0.$$

$$22. \frac{x-5}{-1} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-1}{2}, 3x + 7y - 5z - 11 = 0.$$

$$23. \frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{-1}, 4x + y - 6z - 5 = 0.$$

$$8. \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-4}{1}, x-2y+4z-19=0.$$

$$9. \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+4}{-1}, 2x-y+3z+23=0.$$

$$10. \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+3}{0}, 2x-3y-5z-7=0.$$

$$11. \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{3}, 4x+2y-z-11=0.$$

$$12. \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{-1}, 3x-2y-4z-8=0.$$

$$13. \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{2}, x+2y-z-2=0.$$

$$14. \frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+2}{3}, 5x-y+4z=0.$$

$$15. \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{3}, x+3y+5z-42=0.$$

$$16. \frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-4}{2}, 7x+y+4z-47=0.$$

$$24. \frac{x-3}{7} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-8}{0}, 5x+9y+4z-25=0.$$

$$25. \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{3}, x+4y+13z-23=0.$$

$$26. \frac{x-1}{6} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{3}, 3x-2y+5z-3=0.$$

$$27. \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+3}{-2}, 3x-y+4z=0.$$

$$28. \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z-3}{-2}, x+2y-5z+16=0.$$

$$29. \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z+2}{-2}, 3x-7y-2z+7=0.$$

$$30. \frac{x+3}{0} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+5}{11}, 5x+7y+9z-32=0.$$

$$31. \frac{x-7}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}, 2x+y+7z-3=0.$$

$$32. \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{-1}, 3x-2y-4z-8=0.$$

Тема: Функции одной переменной.

Задача 9. Вычислить пределы функций

1. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 2}{2x^2 + 3x - 6}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{2x^2 - x - 6}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 4x + 7x^2}{2x - 3x^3 + 7}$;
г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$; д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 3x}$; е) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{3x-1}$.
2. а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x^2 + 3x - 4}{-3x + 2x^2 - 4}$; б) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{5 - 4x - x^2}{2x^2 + 15x + 25}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 9x + x^2}{-x^3 + 6x^2 + 7x}$;
г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$; д) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{ctg} 6x$; е) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+4} \right)^{2x+1}$.
3. а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x - 9}{x^2 + 4x - 6}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + x - 5}{x^2 - 2x + 1}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16 + 4x - 8x^3}{-x - 3x^2 + 4x^3}$;
г) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4}$; д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 7x}{\sin 9x}$; е) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{x} \right)^{5x+2}$.
4. а) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 7x - 2}{x^2 - x + 4}$; б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{2x^2 + 3x - 2}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{21 - 4x + 7x^3}{10x^2 - 3x^3 - 18}$;
г) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$; д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{3x}$; е) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+7}{x-2} \right)^{2x+4}$.
5. а) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{8x^2 - 15x + 3}{x^2 - 4x + 11}$; б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^3 - 27}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9 - 4x + 7x^4}{2x^2 - 3x^3 + 7x}$;
г) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{3 - \sqrt{2x+1}}$; д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\operatorname{arctg} 3x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{\frac{1}{4x}}$.
6. а) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-5x + 3x^2 - 8}{7x^2 - 4x + 6}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 + x - 3}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15 - 4x^3 + x^2}{9x - 3x^2 + 13}$;
г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - 2x}{3x+1}$; д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 8x}$; е) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x-4}{6x+2} \right)^{x-7}$.

$$7. \quad \begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 5x + 9}{9x^2 - 6x + 5}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - x - 6}; & \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 4x + 8x^2}{6x - 3x^2 + 7x^4}; \\ \text{г) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x} - 2}; & \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 9x}{\operatorname{tg} 5x}; & \text{е) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{6}{x}\right)^{7x+9}. \end{array}$$

$$8. \quad \begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{7x^2 + 6x - 5}{x^2 - 13x - 4}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 10x + 25}; & \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + x + 8x^2}{-3x - 3x^2 + 16}; \\ \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x-1} - 1}{\sqrt{3x+4} - 2}; & \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\arcsin 4x}; & \text{е) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{\frac{1}{5x}}. \end{array}$$

$$9. \quad \begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{5x - 2 + 7x^2}{2 + 3x^2 - x}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{6 - x - x^2}{3x^2 + 8x - 3}; & \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 4x - 3x^2}{6x + 3x^3 + 7x^4}; \\ \text{г) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2+x} + x}{x+1}; & \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x \cdot \cos x}{\sin 3x}; & \text{е) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-2}{4x+3}\right)^{8x}. \end{array}$$

$$10. \quad \begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x + 8x^2 - 1}{x^2 + 6 - 3x}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x - 8}{2x^2 + 5x + 2}; & \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12 + 2x + x^2}{2x^3 - 3x^2 + 17}; \\ \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x^2}; & \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} 3x \cdot \operatorname{ctg} 7x; & \text{е) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x}\right)^{6x}. \end{array}$$

$$11. \quad \begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -5} \frac{5x + 4x^2 - 1}{2 + 7x - 6x^2}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x - x^2 - 4}{x^2 - 2x - 8}; & \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 4x^3 + 7x^2}{x^3 - x^2 + 11}; \\ \text{г) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{3+x} - \sqrt{1-x}}; & \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{3x}; & \text{е) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+9}{x-3}\right)^{6x+4}. \end{array}$$

$$12. \quad \begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - x + 7}{x^2 - 8x + 10}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 7x + 2}{2x^2 - 5x + 2}; & \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 4x + 7x^3}{2x^4 - 3x^2 + 7x^3}; \\ \text{г) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{\sqrt{2x-1} - 3}; & \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} 5x \cdot \operatorname{tg} 8x; & \text{е) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{-x+1}. \end{array}$$

$$13. \quad \begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -6} \frac{7x^2 + 2x + 10}{x^2 - 9x + 11}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 + 4x - 1}{2x^2 + x - 1}; & \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 4x^2 - x}{-x - 3x - 4x^2}; \\ \text{г) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{7-x}}{x-4}; & \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}; & \text{е) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x}\right)^{5x+3}. \end{array}$$

$$14. \quad \begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - x + 9}{2x^2 + x - 7}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 10x + 8}{x^2 - 4}; & \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 4x^4 + 7x^3}{2x - 3x^3 + 7x^4}; \end{array}$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+2} - \sqrt{6-x}}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{\sin 3x}; \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x-1}.$$

$$15. \quad \begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{9x^2 - 10x + 1}{3x - 7 - 3x^2}; & \text{б)} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 4x + 3}{2x^2 + 5x - 3}; & \text{в)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9 + x - x^2}{2x^3 - 3x^2 + 1}; \\ \text{г)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{8-x}}{x-2}; & \text{д)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{1 - \cos 2x}; & \text{е)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3x}\right)^{7x+3}. \end{array}$$

$$16. \quad \begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{6x^2 - 2 + 8x}{9x^2 + 6 + 3x}; & \text{б)} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{8 - x^2 + 2x}; & \text{в)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 4x^3 + x^2}{x - 3x^2 - 4x^3}; \\ \text{г)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{5+x} - \sqrt{3-x}}{x+1}; & \text{д)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{7x}; & \text{е)} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{3}{4x}}. \end{array}$$

$$17. \quad \begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow -7} \frac{x^2 + 6x - 21}{2x^2 + 7x + 12}; & \text{б)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 + 7x - 10}{3x^2 - x - 10}; & \text{в)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 4x^3 - 9x}{2x^3 - 3x^2 - 4}; \\ \text{г)} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+2}{\sqrt{x+8} - \sqrt{4-x}}; & \text{д)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 8x}{3x}; & \text{е)} \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 4x)^{\frac{1}{x}}. \end{array}$$

$$18. \quad \begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 2 + 5x}{3x - 7x^2 - 12}; & \text{б)} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 5x - 14}{2x^2 + 3x - 2}; & \text{в)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 4x^4 + x^2}{2x^3 - 3x^2 + 8}; \\ \text{г)} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{\sqrt{9-x} - \sqrt{x-1}}; & \text{д)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x \cdot \sin 6x}{\operatorname{tg} 3x}; & \text{е)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+1}{5x-3}\right)^{-x-1}. \end{array}$$

$$19. \quad \begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow -6} \frac{x^2 + 3x - 25}{2x^2 - 4x - 31}; & \text{б)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - x - 4}{x^2 + 8x + 7}; & \text{в)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x^3 - 6x}{2x^3 - x^2 + 3}; \\ \text{г)} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{6-x}}{x-4}; & \text{д)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \cos 4x}{\operatorname{tg} 3x}; & \text{е)} \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 4x)^{\frac{2}{3x}}. \end{array}$$

$$20. \quad \begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow -8} \frac{x^2 + 5x - 14}{-x^2 - 3x + 16}; & \text{б)} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2 + 3x}{3x^2 - 2x - 16}; & \text{в)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 2x^3 + 7x^2}{-x - 3x^3 - x^2}; \\ \text{г)} \lim_{x \rightarrow 6} \frac{6-x}{\sqrt{x-3} - \sqrt{9-x}}; & \text{д)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\operatorname{arctg} 9x}; & \text{е)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-x+6}{-x-1}\right)^{2x+1}. \end{array}$$

Задача 10. Найти производные функций

$$1. \text{ а) } y = e^{\cos x} \cdot \sin 4x; \quad \text{б) } y = \frac{3x - 5 \cos 2x}{\sqrt{1 - 6x^2}}; \quad \text{в) } y = \ln [\arcsin(2x^2 - 4)];$$

$$\text{г) } y = (\operatorname{arctg} x)^{\sqrt{2x}} \quad \text{д) } e^y + 4xy + e^{2x} = 10; \quad \text{е) } \begin{cases} x(t) = \sin 2t - t^2, \\ y(t) = \sqrt{e^t - 5}. \end{cases}$$

$$2. \text{ а) } y = \cos 3x \cdot 2^{\lg x}; \quad \text{б) } y = \frac{\cos 3x - 8x^2}{\sqrt{x^2 - 2}}; \quad \text{в) } y = \cos [\ln(4x^3 - x + 1)];$$

$$\text{г) } y = (\sin \sqrt{x})^{\frac{1}{x^2}}; \quad \text{д) } 4^{y^2} - \frac{x}{2y} - \sqrt{x} = 0; \quad \text{е) } \begin{cases} x(t) = 2\sqrt{t^3} - \cos 5t, \\ y(t) = e^{\sin t}. \end{cases}$$

$$3. \text{ а) } y = e^{\sin x} \cdot \ln 4x; \quad \text{б) } y = \frac{7x + 4 \sin 3x}{\sqrt{2 + 3x^2}}; \quad \text{в) } y = \operatorname{arctg} [\ln(5x + 2)];$$

$$\text{г) } y = (\sqrt[3]{x} + 2)^{\cos 2x^2}; \quad \text{д) } 3^{\sin x} + \ln y - \frac{3y}{x^2} = 4x; \quad \text{е) } \begin{cases} x(t) = 7^{\arcsin t} + 5t, \\ y(t) = \sqrt[3]{\operatorname{tg} t - t}. \end{cases}$$

$$4. \text{ а) } y = \ln 5x \cdot 3^{\cos x}; \quad \text{б) } y = \frac{2 \sin 3x + 4x^2}{\sqrt{6x^2 - 4}}; \quad \text{в) } y = \ln [\arccos(5x^4 - 4x)];$$

$$\text{г) } y = (\arcsin x)^{\lg x^2}; \quad \text{д) } \sin y + 5^{\lg x + 1} - \frac{x\sqrt{y}}{2} = 1; \quad \text{е) } y = 2^{\ln(3x^2 - 7x)};$$

$$5. \text{ а) } y = \operatorname{arctg} 3x \cdot e^{\sin x}; \quad \text{б) } y = \frac{\sqrt{3 - 2x^2}}{\operatorname{tg} 2x - x^3}; \quad \text{в) } \begin{cases} x(t) = 2^{\sin t} - \frac{4}{t^2}, \\ y(t) = (2t^4 - 5)^{-\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

$$\text{г) } y = \left(\ln x - \frac{2}{x} \right)^{\cos^2 x}; \quad \text{д) } e^{x+2y} + 3y^3 = \sqrt{\cos x}; \quad \text{е) } \begin{cases} x(t) = \arcsin \frac{t}{3} + 5, \\ y(t) = 8 \cos^3 t. \end{cases}$$

$$6. \text{ а) } y = e^{\cos x} \cdot \arcsin 8x; \quad \text{б) } y = \frac{\sqrt{5 - 3x^2}}{3x^2 - \operatorname{ctg} 4x}; \quad \text{в) } y = 4^{\operatorname{arctg}(3x^2 + 2)};$$

$$\text{г) } y = (3 + \cos 5x)^{\arcsin 2x}; \quad \text{д) } \ln(3y^2 - \sqrt{x}) + 4^x = 12y; \quad \text{е) } \begin{cases} x(t) = 7 \ln t^2 + 2t, \\ y(t) = 5 \operatorname{tg} t - 3t^2. \end{cases}$$

$$7. \text{ a) } y = \ln 7x \cdot e^{\operatorname{ctg} x}; \quad \text{б) } y = \frac{\operatorname{tg} 3x + 9x^3}{\sqrt{4x^2 + 3x}}; \quad \text{в) } y = e^{\sqrt{3x^2 - 5\cos x}};$$

$$\text{г) } y = \sqrt[4]{e^{4x} - 2x}; \quad \text{д) } \arccos \sqrt{y + 2x^2} y^3 = \frac{7}{x^6}; \quad \text{е) } \begin{cases} x(t) = 4\sin^2 t - \frac{4}{t}, \\ y(t) = 6 - 6^{\cos t}. \end{cases}$$

$$8. \text{ a) } y = 4^{\cos x} \operatorname{arctg} 4x; \quad \text{б) } y = \frac{\sqrt{2 - 9x^2}}{1 - \arccos 2x}; \quad \text{в) } y = \ln^3 \sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}};$$

$$\text{г) } y = (\arccos \sqrt{x})^{\sqrt{x}}; \quad \text{д) } \ln \operatorname{tg} y - e^{\sin x} = xy; \quad \text{е) } \begin{cases} x(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{t}} + \cos 2t, \\ y(t) = \sqrt{\operatorname{ctg} t} - 4. \end{cases}$$

$$9. \text{ a) } y = 5^{\operatorname{tg} x} \cdot \operatorname{ctg} 8x; \quad \text{б) } y = \frac{\sqrt{7x - x^2}}{3x - \operatorname{tg} 3x}; \quad \text{в) } y = \ln(\arccos \sqrt{x^2 - 4});$$

$$\text{г) } y = (\ln x + 2x)^{x^2}; \quad \text{д) } 5^{\operatorname{ctg} \sqrt{x}} - 8xy^3 = \frac{y}{2}; \quad \text{е) } \begin{cases} x(t) = 3e^{\operatorname{tg} t} + 5t^2, \\ y(t) = 4t - \arcsin \sqrt{t}. \end{cases}$$

$$10. \text{ a) } y = \cos 3x \cdot e^{\operatorname{arctg} x}; \quad \text{б) } y = \frac{x^3 + \sin 3x}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}; \quad \text{в) } y = \ln^4 \sqrt{\frac{7x^2 - 1}{\cos x}};$$

$$\text{г) } y = (\operatorname{ctg} 4x)^{x^2}; \quad \text{д) } e^{\sin y} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt[3]{y^2 x^3}; \quad \text{е) } \begin{cases} x(t) = \frac{3}{\operatorname{arctg} t} + 3t^2, \\ y(t) = 5^{\cos t} - \sqrt{t+1}. \end{cases}$$

$$11. \text{ a) } y = e^{x^2+1} \cdot \arccos 9x; \quad \text{б) } y = \frac{\operatorname{arctg} 6x}{\sqrt{1 - 2x + x^2}}; \quad \text{в) } y = \ln(\sin 4^{2x-1});$$

$$\text{г) } y = \left(\frac{x}{4} - \cos x\right)^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}; \quad \text{д) } e^{x^2} - \frac{xy^3}{3} + \ln y = 15x; \quad \text{е) } \begin{cases} x(t) = \sin^2 t + 4t^2, \\ y(t) = \frac{1+t^2}{\sqrt{t}}. \end{cases}$$

$$12.a) y = 6^{x^2-1} \cdot \operatorname{tg} 2x; \quad б) y = \frac{2^x - 7x^2}{\sqrt{3x^2+1}}; \quad в) y = e^{\arcsin \sqrt{x^2+7}};$$

$$г) y = (x^3 + 2^x)^{\sqrt{x^2}}; \quad д) \sin(xy) + \arcsin \sqrt{x} = 7y; \quad е) \begin{cases} x(t) = e^{\cos t} - 2, \\ y(t) = \sqrt{\cos t}. \end{cases}$$

$$13.a) y = \cos 3x \cdot e^{\arccos x}; \quad б) y = \frac{\sqrt{1-2x^3}}{3^x - \sin 2x}; \quad в) y = \ln [\operatorname{arctg}(5-x^2)];$$

$$г) y = (\operatorname{arctg} \sqrt{x})^{\sin 4x}; \quad д) \ln(\cos y) + 4^{x^2} = e^{2y}; \quad е) \begin{cases} x(t) = (2t^3 - t)^5, \\ y(t) = \ln^2 t + 3t. \end{cases}$$

$$14.a) y = \sin 4x \cdot 4^{\lg 2x}; \quad б) y = \frac{4x^2 - 9x}{2^{3x} - 5x^2}; \quad в) y = \operatorname{tg}(\ln \sqrt{5x^2 - 4}).$$

$$г) y = (x + \ln x)^{\frac{1}{\cos x}}; \quad д) 2y\sqrt{x} + 4^{x^2} = \sqrt{e^x}; \quad е) \begin{cases} x(t) = \frac{\sin 2t}{\sqrt{t-2}}, \\ y(t) = \ln(\operatorname{tg} t) + e. \end{cases}$$

$$15.a) y = \sin 4x \cdot 4^{\ln x}; \quad б) y = \frac{x - \operatorname{arctg} 4x}{\sqrt{-x^2+5}}; \quad в) y = \ln \left(\arcsin \frac{3}{\sqrt{x+1}} \right).$$

$$г) y = (\sin 2x - \pi)^{\sin x}; \quad д) \sqrt{x} + \sqrt{y} - 3x^2 y^4 = \ln 2x; \quad е) \begin{cases} x(t) = 3^{\cos x} - t^{-2}, \\ y(t) = \sqrt[3]{\frac{t+1}{t-1}}. \end{cases}$$

$$16.a) y = e^{\arccos x} \cdot \ln 5x; \quad б) y = \frac{\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{tg} 4x}{\sqrt{2x^2-8}}; \quad в) y = \arccos \left(\ln \frac{6x^2-1}{4x} \right);$$

$$г) y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{\frac{1}{x^2}}; \quad д) e^{y^2} + \arcsin \frac{x}{3} = \sqrt{3+2y}; \quad е) \begin{cases} x(t) = \ln(\cos 3t) + t^3, \\ y(t) = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{t} - 2 \right). \end{cases}$$

$$17.a) y = \operatorname{ctg} 3x \cdot 3^{\ln 2x}; \quad б) y = \frac{4^{x-1} + 2x^2}{\sqrt{8-x^2}}; \quad в) y = 3^{\ln \sqrt{2x^2-2x+1}};$$

$$г) y = (3x^4 + \cos x)^{\ln x}; \quad д) e^{xy} - \operatorname{ctg} x^2 + \frac{y^2}{3} = x; \quad е) \begin{cases} x(t) = 7^{\sin t} + 4t^2, \\ y(t) = \frac{t^2-2}{\sqrt{t}}. \end{cases}$$

$$18. a) y = e^{\sin 4x} \cdot \arctg 4x; \quad б) y = \frac{\sin 3x - \cos 2x}{\sqrt{4x^2 + 5x}}; \quad в) y = \ln(\sin e^{1-2x});$$

$$г) y = \left(\sqrt[3]{x^4 + 1} \right)^{\sin^3 x}; \quad д) \ln \sqrt{4y+1} - \operatorname{tg} \sqrt{x} - 2; \quad е) \begin{cases} x(t) = \frac{3t^2 + 5}{\sqrt{1-t}}, \\ y(t) = e^{\operatorname{arctg} \sqrt{t}}. \end{cases}$$

$$19. a) y = \ln(4x+1) \cdot e^{\arccos x}; \quad б) y = \frac{2^{x-7} + \cos 2x}{\sqrt{1-3x^2}}; \quad в) y = 4^{\cos\left(\ln \frac{2x}{x-1}\right)};$$

$$г) y = (2^{\cos x} - e)^{\sqrt{x}}; \quad д) e^{\sin x} + \ln^2 y = 12xy + 6; \quad е) \begin{cases} x(t) = \sqrt[3]{\cos 3t} + 5, \\ y(t) = \frac{1-2t^4}{\sqrt{t^2+3}}. \end{cases}$$

$$20. a) y = 2^{\operatorname{arctg} x} \cdot \sin 5x; \quad б) y = \frac{9x - \operatorname{tg} 4x}{\sqrt{1+7x^3}}; \quad в) y = \operatorname{tg} \left(\ln \frac{3x^2+4}{\sqrt{x-1}} \right);$$

$$г) y = \left(\sin \frac{x^2}{2} \right)^{\sqrt{4x-1}}; \quad д) \operatorname{arctg} \sqrt{y} + x \ln y = 4y^2; \quad е) \begin{cases} x(t) = \frac{2t-t^2}{1+t}, \\ y(t) = e^{\ln t} + \frac{1}{2t}. \end{cases}$$

Задача 11. Найти производную функции в точке x_0 .

$$1. y = x^2 - 4x - (x-2)\ln(x-1), x_0 = 2.$$

$$17. y = 4x - x^2 + (x-2)\sin(x-2), x_0 = 2.$$

$$2. y = 4x - x^2 - 2\cos(x-2), x_0 = 2.$$

$$18. y = 6e^x - x^3 - 3x^2 - 6x - 5, x_0 = 0.$$

$$3. y = 6e^{x-2} - x^3 + 3x^2 - 6x, x_0 = 2.$$

$$19. y = x^2 - 2x - 2e^{x-2}, x_0 = 2.$$

$$4. y = 2\ln(x+1) - 2x + x^2 + 1, x_0 = 0.$$

$$20. y = \sin^2(x+2) - x^2 - 4x - 4, x_0 = -2.$$

$$5. y = 2x - x^2 - 2\cos(x-1), x_0 = 1.$$

$$21. y = \cos^2(x-1) + x^2 - 2x, x_0 = 1.$$

$$6. y = \cos^2(x+1) + x^2 + 2x, x_0 = -1.$$

$$22. y = x^2 - 2x - (x-1)\ln x, x_0 = 1.$$

$$7. y = 2\ln x + x^2 - 4x + 3, x_0 = 1.$$

$$23. y = (x-1)\sin(x-1) + 2x - x^2, x_0 = 1.$$

$$8. y = 1 - 2x - x^2 - 2\cos(x+1), x_0 = -1.$$

$$24. y = x^2 - 4x + \cos^2(x-2), x_0 = 2.$$

$$9. y = x^2 + 6x + 8 - 2e^{x+2}, x_0 = -2.$$

$$25. y = x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 24(x+1-e^x), x_0 = 0.$$

$$10. y = 4x + x^2 - 2e^{x+1}, x_0 = -1.$$

$$26. y = \sin^2(x-2) - x^2 + 4x - 4, x_0 = 2.$$

$$11. y = (x+1)\sin(x+1) - 2x - x^2, x_0 = -1.$$

$$27. y = 6e^{x+1} - x^3 - 6x^2 - 15x - 16, x_0 = -1.$$

$$12. y = 6e^{x-1} - 3x - x^3, x_0 = 1.$$

$$28. y = \sin x + \operatorname{sh} x - 2x, x_0 = 0.$$

13. $y = 2x + x^2 - (x+1)\ln(2+x), x_0 = -1.$

14. $y = \sin^2(x+1) - 2x - x^2, x_0 = -1.$

15. $y = x^2 + 4x + \cos^2(x+2), x_0 = -2.$

16. $y = x^2 + 2\ln(x+2), x_0 = -1.$

29. $y = \sin^2(x-1) - x^2 + 2x, x_0 = 1.$

30. $y = \cos x + chx, x_0 = 0.$

31. $y = x^2 - 2e^{x-1}, x_0 = 1.$

32. $y = 2x - x^2 - 2\cos(x-1), x_0 = 1.$

Задача 12. Провести полное исследование и построить графики функций.

1. $f(x) = xe^{1/x}$

3. $f(x) = xe^{0,5(1-x^2)}$

5. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$

7. $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$

9. $f(x) = 1,5\sqrt[3]{x^2} - x$

11. $f(x) = \frac{3x-1}{x^2}$

13. $f(x) = e^{1/(2-x)}$

15. $f(x) = e^{2x-x^2}$

17. $f(x) = \frac{x^2}{2x-3}$

19. $f(x) = x\sqrt{8-x^2}$

2. $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$

4. $f(x) = \frac{e^{\ln x}}{x}$

6. $f(x) = x - 1,5\sqrt[3]{x^2}$

8. $f(x) = \frac{(1-x)^3}{x^2}$

10. $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 + 2x^3}$

12. $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 4}$

14. $f(x) = (x^2 + 2)e^{-x^2}$

16. $f(x) = x^2 e^{1-x^2}$

18. $f(x) = \frac{4x}{(x+1)^2}$

20. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$

Литература:

1. Шипачев В.С. Высшая математика: Учеб. для вузов / В.С. Шипачев. – 6-е изд.; стер.-М.:Высш.шк., 2003г. – 479 с: ил. ISBN 5-06-003959-5

2. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: Учеб. для вузов / В.С. Шипачев. – 5-е изд.; стер.-М.:Высш.шк., 2005г. – 304 с: ил. ISBN 5-06-003575-1

Бермант А.Ф. Краткий курс математического анализа для вузов. М., 1973 г., 720с с илл.

3. Элементы линейной алгебры: методические указания / Сост. Л.Н. Феофанова; Волгоград. Гос.тех.ун-т. – Волгоград, 1999 г. - 56с

4. Методические указания к типовой работе по теме «Линейная алгебра» / Сост. Л.А. Исаева., В.Ф. Исаев; Волгоград.гос.тех.ун-т – Волгоград, 1996г. – 20 с

5. Элементы линейной алгебры: стандартные задачи с основными приложениями теории: учебное пособие. / Феофанова Л. Н., Исаева Л. А., Исаев В. Ф. / ВолгГТУ – Волгоград, 2009. – 88 с.

6. Начала аналитической геометрии : учеб. пособие / Симонова И. Э., Тарасова И. А., Симонов Б. В., Ермакова А. А.; ВолгГТУ. - Волгоград: ВолгГТУ, 2010. - 48 с. : 1 электрон. опт. диск (CD.R)

Примеры решения некоторых задач

Задача 1. Решить систему линейных уравнений методом Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Жордана-Гаусса.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 9 \\ x - 2y + z = -2 \\ 3x + 2y + 2z = 7 \end{cases}$$

Решение:

Решение системы методом Крамера.

Найдем главный и вспомогательный определители системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 13; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -13;$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 26; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 39;$$

Так как $\Delta = 13 \neq 0$, то система имеет единственное решение:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-13}{13} = -1; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{26}{13} = 2; \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{39}{13} = 3.$$

Решение системы с помощью обратной матрицы.

Заданную систему запишем в матричной форме $AX=B$, где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Матрица A системы неособенная, так как $\det(A) = \Delta = 13 \neq 0$, значит, существует обратная

матрица $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \bar{A}$, где $\bar{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$.

Вычислим алгебраические дополнения A_{ij} :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 2 = -6; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 6 = 8;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 6 = 4; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 9 = -5; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 3 = -1;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 6 = 7; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 1 = -5.$$

Затем находим обратную матрицу $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \bar{A} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -6 & 4 & 7 \\ 1 & -5 & 1 \\ 8 & -1 & -5 \end{pmatrix}$

Искомая матрица

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -6 & 4 & 7 \\ 1 & -5 & 1 \\ 8 & -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -54 - 8 + 49 \\ 9 + 10 + 7 \\ 72 + 2 - 35 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -13 \\ 26 \\ 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Из условия равенства матриц $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ получим решение данной системы уравнений:

$$x_1 = -1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 3.$$

Решение системы методом Жордана-Гаусса.

Выпишем расширенную матрицу и элементарными преобразованиями над строками приведем ее к диагональному виду:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 7 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 2 & 7 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 1 & 13 \\ 0 & 8 & -1 & 13 \end{array} \right) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 1 & 13 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 13 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 13 \\ 0 & 1 & -5 & -13 \end{array} \right) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 8 & 26 \\ 0 & 1 & -5 & -13 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 8 & 26 \\ 0 & 0 & -13 & -39 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 8 & 26 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ответ: $x_1 = -1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 3.$

Задача 2. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

$$\vec{a} = \{-1, 2, 8\}, \quad \vec{b} = \{3, 7, -1\}, \quad \vec{c}_1 = 4\vec{a} - 3\vec{b}, \quad \vec{c}_2 = 9\vec{b} - 12\vec{a}.$$

Решение:

Найдем координаты векторов $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$.

$$\vec{c}_1 = \{4 \cdot (-1) - 3 \cdot 3, 4 \cdot 2 - 3 \cdot 7, 4 \cdot 8 - 3 \cdot (-1)\} = \{-13, -13, 35\},$$

$$\vec{c}_2 = \{9 \cdot 3 - 12 \cdot (-1), 9 \cdot 7 - 12 \cdot 2, 9 \cdot (-1) - 12 \cdot 8\} = \{39, 39, -105\}$$

Проверим условие коллинеарности векторов.

$$\frac{-13}{39} = \frac{-13}{39} = \frac{35}{-105} \Rightarrow -\frac{1}{3} = -\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

Так как условие выполняется, то векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$ коллинеарны.

Ответ: коллинеарны.

Задача 3. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

$$A(-2, 4, -6), \quad B(0, 2, -4), \quad C(-6, 8, -10).$$

Решение:

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = (0 - (-2), 2 - 4, -4 - (-6)) = (2, -2, 2), \quad \overrightarrow{AC} = (-6 - (-2), 8 - 4, -10 - (-6)) = (-4, 4, -4)$$

$$\begin{aligned} \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) &= \frac{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{2 \cdot (-4) - 2 \cdot 4 + 2 \cdot (-4)}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + (-4)^2}} = \\ &= \frac{-24}{\sqrt{12} \cdot \sqrt{48}} = \frac{-24}{2\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}} = \frac{-24}{24} = -1 \end{aligned}$$

Ответ: -1.

Задача 4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$$\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}, \quad \vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}; \quad |\vec{p}| = 4, \quad |\vec{q}| = 4, \quad (\vec{p} \wedge \vec{q}) = 3\pi/4.$$

Решение:

$$\begin{aligned} S &= |\vec{a} \times \vec{b}| = |(3\vec{p} + 2\vec{q}) \times (2\vec{p} - \vec{q})| = |3\vec{p} \times 2\vec{p} + 2\vec{q} \times 2\vec{p} - 3\vec{p} \times \vec{q} - 2\vec{q} \times \vec{q}| = \\ &= |6 \cdot \vec{0} + 4\vec{q} \times \vec{p} - 3\vec{p} \times \vec{q} - 2 \cdot \vec{0}| = |4\vec{q} \times \vec{p} + 3\vec{q} \times \vec{p}| = 7|\vec{q} \times \vec{p}| = 7 \cdot |\vec{q}| \cdot |\vec{p}| \cdot \sin(\vec{p} \wedge \vec{q}) = \\ &= 7 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin(3\pi/4) = 112 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 56\sqrt{2} \end{aligned}$$

Ответ: $56\sqrt{2}$.

Задача 5. Компланарны ли векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$.

$$\vec{a} = \{7, 4, 6\}, \quad \vec{b} = \{2, 1, 1\}, \quad \vec{c} = \{19, 11, 17\}.$$

Решение:

Вычислим смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$.

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= \begin{vmatrix} 7 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 19 & 11 & 17 \end{vmatrix} = 7 \cdot 1 \cdot 17 + 19 \cdot 4 \cdot 1 + 2 \cdot 11 \cdot 6 - 19 \cdot 1 \cdot 6 - 2 \cdot 4 \cdot 17 - 7 \cdot 11 \cdot 1 = \\ &= 119 + 76 + 132 - 114 - 136 - 77 = 327 - 327 = 0 \end{aligned}$$

Так как смешанное произведение векторов $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$, то векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

Ответ: компланарны.

Задача 6. Найти угол между плоскостями.

$$x + 2y - 2z - 7 = 0, \quad x + y - 3z = 0.$$

Решение:

Нормальные векторы плоскостей имеют координаты: $\vec{n}_1 = \{1, 2, -2\}$, $\vec{n}_2 = \{1, 1, 0\}$.

Угол между плоскостями равен углу между их нормальными векторами.

$$\begin{aligned} \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) &= \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 0}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \\ &= \frac{3}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2) = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

Задача 7. Написать канонические уравнения прямой, заданной двумя плоскостями.

$$2x - 3y - 2z + 6 = 0, \quad x - 3y + z + 3 = 0.$$

Решение:

Нормальные векторы плоскостей имеют координаты: $\vec{n}_1 = \{2, -3, -2\}$, $\vec{n}_2 = \{1, -3, 1\}$.

Определим направляющий вектор прямой

$$\begin{aligned} \vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = (-3 \cdot 1 - (-3) \cdot (-2)) \cdot \vec{i} - \\ &- (2 \cdot 1 - 1 \cdot (-2)) \cdot \vec{j} + (2 \cdot (-3) - 1 \cdot (-3)) \cdot \vec{k} = -9\vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k} \end{aligned}$$

Найдем координаты точки М, принадлежащей прямой. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 3y - 2z + 6 = 0, \\ x - 3y + z + 3 = 0. \end{cases}$$

Положим $z = 0$, тогда система примет вид $\begin{cases} 2x - 3y + 6 = 0, \\ x - 3y + 3 = 0. \end{cases}$

Вычитая из первого уравнения второе, получим $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

Подставляя найденное x во второе уравнение, найдем y : $-3 - 3y + 3 = 0 \Rightarrow y = 0$

Таким образом, точка М имеет координаты $(-3, 0, 0)$.

Запишем канонические уравнения искомой прямой:

$$\frac{x - (-3)}{-9} = \frac{y - 0}{-4} = \frac{z - 0}{-3} \text{ или } \frac{x + 3}{9} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$$

Ответ: $\frac{x + 3}{9} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$.

Задача 8. Найти точку пересечения прямой и плоскости.

$$\frac{x - 7}{3} = \frac{y - 3}{1} = \frac{z + 1}{-2}, \quad 2x + y + 7z - 3 = 0.$$

Решение:

Так как точка принадлежит и прямой, и плоскости, то ее координаты можно найти, решив

систему уравнений:
$$\begin{cases} \frac{x - 7}{3} = \frac{y - 3}{1} = \frac{z + 1}{-2}, \\ 2x + y + 7z - 3 = 0. \end{cases}$$

Запишем уравнение прямой в параметрическом виде и подставим в уравнение плоскости

$$\begin{cases} x = 3t + 7, \\ y = t + 3, \\ z = -2t - 1. \end{cases}$$

$$2(3t + 7) + (t + 3) + 7(-2t - 1) - 3 = 0 \Rightarrow t = 1$$

Подставляя найденное значение t в параметрические уравнения прямой, найдем координаты искомой точки:

$$\begin{cases} x = 3 \cdot 1 + 7 = 10, \\ y = 1 + 3 = 4, \\ z = -2 \cdot 1 - 1 = -3. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = 10, \\ y = 4, \\ z = -3. \end{cases}$

Задача 9. Найти пределы функций:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{7x-2}{x^2+1};$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x};$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x};$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x-2x^4}{4x^4+3x^2+1};$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x};$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{x^4+1}\right)^{5x^2}.$

Решение:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{7x-2}{x^2+1} = \frac{7 \cdot 2 - 2}{2^2 + 1} = \frac{12}{5};$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x} = \frac{3+3}{3} = 2;$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4})^2 - 2^2}{x(\sqrt{x+4}+2)} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x-2x^4}{4x^4+3x^2+1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 \left(\frac{7}{x^3} - 2 \right)}{x^4 \left(4 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2};$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] =$

$= | \text{сделаем замену } t = \arcsin x, \text{ тогда } x = \sin t, t \rightarrow 0 | =$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{1}{1} = 1$$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{x^4+1}\right)^{5x^2} = [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x^4+1}{x}}\right)^{\frac{x^4+1}{x}} \right]^{\frac{x}{x^4+1} \cdot 5x^2} =$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} (e)^{\frac{x}{x^4+1} \cdot 5x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} (e)^{\frac{5x^3}{x^4+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} (e)^{\frac{x^4 \left(\frac{5}{x} \right)}{x^4 \left(1 + \frac{1}{x^4} \right)}} = e^{\frac{0}{1}} = e^0 = 1$$

Задача 10. Найти производную функции в точке $x_0 : y = x^2 - 2e^{x-1}, x_0 = 1$.

Решение:

$$y' = (x^2 - 2e^{x-1})' = 2x - 2e^{x-1}(x-1)' = 2x - 2e^{x-1} \cdot 1 = 2x - 2e^{x-1},$$
$$y'(x_0) = 2 \cdot 1 - 2 \cdot e^{1-1} = 2 - 2 = 0.$$

Ответ: 0.

Задача 11. Найти производную функции: $y = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$.

Решение:

$$y' = (\sqrt[3]{x(x-1)^2})' = \frac{1}{3}(x(x-1)^2)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (x(x-1)^2)' = \frac{1}{3}(x(x-1)^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot ((x)' \cdot (x-1)^2 + ((x-1)^2)' \cdot x) =$$
$$= \frac{1}{3}(x(x-1)^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot (1 \cdot (x-1)^2 + 2 \cdot (x-1) \cdot (x-1)' \cdot x) = \frac{1}{3}(x(x-1)^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot ((x-1)^2 + 2 \cdot (x-1) \cdot 1 \cdot x) =$$
$$= \frac{1}{3}(x(x-1)^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x-1) \cdot ((x-1) + 2x) = \frac{1}{3}(x(x-1)^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x-1) \cdot (3x-1) = \frac{(x-1) \cdot (3x-1)}{3 \cdot \sqrt[3]{(x(x-1)^2)^2}}$$

Ответ: $\frac{(x-1) \cdot (3x-1)}{3 \cdot \sqrt[3]{(x(x-1)^2)^2}}$.

Задача 12. Найти производную функции: $y = \ln(\sqrt{2\operatorname{tg}x})$.

Решение:

Учитывая свойства логарифма: $y = \ln(\sqrt{2\operatorname{tg}x}) = \frac{1}{2}\ln(2\operatorname{tg}x)$.

$$y' = \left(\frac{1}{2}\ln(2\operatorname{tg}x)\right)' = \frac{1}{2}(\ln(2\operatorname{tg}x))' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\operatorname{tg}x} \cdot (2\operatorname{tg}x)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\operatorname{tg}x} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{2\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin 2x}$$

Ответ: $\frac{1}{\sin 2x}$.

Литература:

1. Шипачев, В. С. Высшая математика [Текст] : учеб. для студ. вузов / В. С. Шипачев. - 6-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2003. - 479 с.
2. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. [Текст]: учеб пособие для вузов/ П.Е. Данко, А. Г. Попов, Т.Я. Кожевников.- М.:ОНИКС, Мир и Образование, 2015. – 815 с.
3. Бугров, Я. С. Высшая математика в 3 т. Т. 2. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — 7-е изд., стер. — М. : Изд-во Юрайт, 2017. — 281 с. — (Серия : Бакалавр. Академический курс). — Режим доступа : www.biblio-online.ru/book/C01D91F4-9F0B-46C0-9D95-8E193AD1752B.
4. Бугров, Я. С. Высшая математика в 3 т. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление в 2 кн. [Электронный ресурс]: / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — 7-е изд., стер. — М. : Изд-во Юрайт, 2017. — 253 с. — Режим доступа: www.biblio-online.ru/book/412BE9F5-523F-4583-AC76-294E63DCD7EE.