

Задание 1

Таблица 1 Условие задания №1

вариант 21			$x = -2,35$		
x	-2,5	-2,1	-1,7	-1,3	-0,9
y	3,8	2,6	1,0	-0,3	-2,1

1. Найти аппроксимирующий многочлен не ниже второй степени, в декартовой системе координат отметить точки исходной функции и построить график аппроксимирующего многочлена, вычислить приближенное значение таблично заданной функции в заданной точке x ;
2. Найти интерполяционный многочлен Лагранжа, в декартовой системе координат отметить точки исходной функции и построить график интерполяционного многочлена, вычислить приближенное значение таблично заданной функции в заданной точке x ;
3. Сравнить полученные значения.

Решение:

1. Найдём аппроксимирующий многочлен

Система базисных функций для аппроксимирующего полинома принимаем в виде

$$\varphi_1(x) = 1; \varphi_2(x) = x; \varphi_3(x) = x^2$$

А сам полином определяется выражением

$$Q(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2$$

Сформируем матрицу планов Π

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & -2,5 & -2,5^2 \\ 1 & -2,1 & -2,1^2 \\ 1 & -1,7 & -1,7^2 \\ 1 & -1,3 & -1,3^2 \\ 1 & -0,9 & -0,9^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2,5 & 6,25 \\ 1 & -2,1 & 4,41 \\ 1 & -1,7 & 2,89 \\ 1 & -1,3 & 1,69 \\ 1 & -0,9 & 0,81 \end{bmatrix}$$

Вектор-столбец Y узловых значений аппроксимируемой функции

$$Y = [y_i] = \begin{bmatrix} 3,8 \\ 2,6 \\ 1 \\ -0,3 \\ -2,1 \end{bmatrix}$$

Построим основную матрицу W и вектор-столбец B правых частей нормальной системы уравнений

$$\begin{aligned}
W = \Pi^T \Pi &= \begin{bmatrix} 1 & -2,5 & 6,25 \\ 1 & -2,1 & 4,41 \\ 1 & -1,7 & 2,89 \\ 1 & -1,3 & 1,69 \\ 1 & -0,9 & 0,81 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -2,5 & 6,25 \\ 1 & -2,1 & 4,41 \\ 1 & -1,7 & 2,89 \\ 1 & -1,3 & 1,69 \\ 1 & -0,9 & 0,81 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2,5 & -2,1 & -1,7 & -1,3 & -0,9 \\ 6,25 & 4,41 & 2,89 & 1,69 & 0,81 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2,5 & 6,25 \\ 1 & -2,1 & 4,41 \\ 1 & -1,7 & 2,89 \\ 1 & -1,3 & 1,69 \\ 1 & -0,9 & 0,81 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 5 & -8,5 & 16,05 \\ -8,5 & 16,05 & -32,725 \\ 16,05 & -32,725 & 70,3749 \end{bmatrix}; \\
B = \Pi^T Y &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2,5 & -2,1 & -1,7 & -1,3 & -0,9 \\ 6,25 & 4,41 & 2,89 & 1,69 & 0,81 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3,8 \\ 2,6 \\ 1 \\ -0,3 \\ -2,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -14,38 \\ 35,898 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Расширенная матрица \ddot{W} нормальной системы уравнений имеет вид

$$\ddot{W} = [W : B] = \begin{bmatrix} 5 & -8,5 & 16,05 & 5 \\ -8,5 & 16,05 & -32,725 & -14,38 \\ 16,05 & -32,725 & 70,3749 & 35,898 \end{bmatrix}$$

Найдем решение системы нормальных уравнений с помощью алгоритма Гаусса-Жордана:

$$\begin{aligned}
\ddot{W} &= \begin{bmatrix} 5 & -8,5 & 16,05 & 5 \\ -8,5 & 16,05 & -32,725 & -14,38 \\ 16,05 & -32,725 & 70,3749 & 35,898 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1,7 & 3,21 & 1 \\ 0 & 1,6 & -5,44 & -5,88 \\ 0 & -5,44 & 18,8544 & 19,848 \end{bmatrix} \\
&\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1,7 & 3,21 & 1 \\ 0 & 1 & -3,4 & -3,675 \\ 0 & 0 & 0,3584 & -0,144 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1,7 & 0 & 2,2897 \\ 0 & 1 & 0 & -5,0411 \\ 0 & 0 & 1 & -0,4018 \end{bmatrix} \\
&\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -6,28 \\ 0 & 1 & 0 & -5,0411 \\ 0 & 0 & 1 & -0,4018 \end{bmatrix}; \\
&c_1 = -6,28; c_2 = -5,0411; c_3 = -0,4018
\end{aligned}$$

Построенный по методу наименьших квадратов аппроксимирующий полином для заданной функции будет иметь вид:

$$Q(x) = -6,28 - 5,0411x - 0,4018x^2$$

Вычислить приближенное значение таблично заданной функции в заданной точке x

$$Q(-2,35) = -6,28 - 5,0411 \times (-2,35) - 0,4018 \times (-2,35)^2 = 3,3476$$

Построим график полинома $Q(x)$

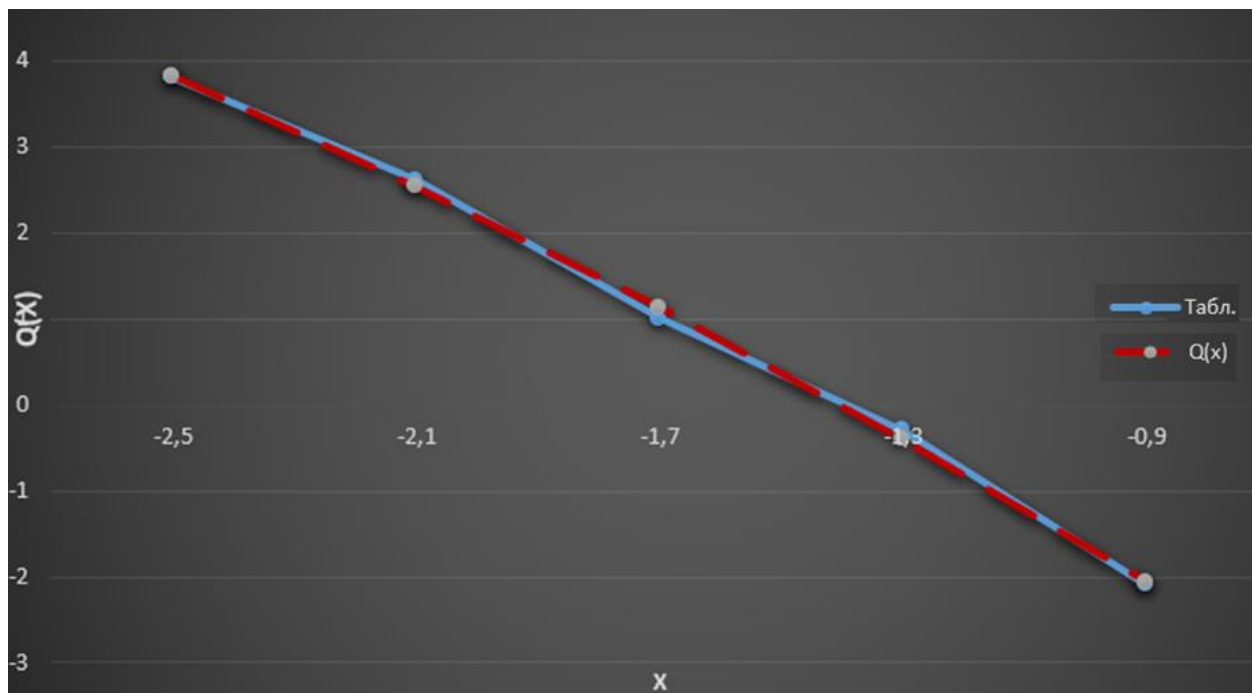


Рисунок 1.1 – График полинома $Q(x)$, аппроксимирующего по методу наименьших квадратов функцию заданную на сетке $R : \{[-2,5; 3,8], [-2,1; 2,6], [-1,7; 1], [-0,9; -2,1]\}$

2. Найдём интерполяционный многочлен Лагранжа

Сформируем для заданной функции интерполяционный полином Лагранжа L_4 (x)

$$\begin{aligned}
 L_4(x) &= \sum_{i=0}^4 \prod_{j=0, j \neq i}^4 \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} y_i = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)(x_0 - x_4)} y_0 \\
 &\quad + \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} y_2 \\
 &\quad + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} y_3 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_0)(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} y_4 \\
 &= \frac{(x + 2,1)(x + 1,7)(x + 1,3)(x + 0,9)}{(-2,5 + 2,1)(-2,5 + 1,7)(-2,5 + 1,3)(-2,5 + 0,9)} \times 3,8 \\
 &\quad + \frac{(x + 2,5)(x + 1,7)(x + 1,3)(x + 0,9)}{(-2,1 + 2,5)(-2,1 + 1,7)(-2,1 + 1,3)(-2,1 + 0,9)} \times 2,6 \\
 &\quad + \frac{(x + 2,5)(x + 2,1)(x + 1,3)(x + 0,9)}{(-1,7 + 2,5)(-1,7 + 2,1)(-1,7 + 1,3)(-1,7 + 0,9)} \times 1 \\
 &\quad + \frac{(x + 2,5)(x + 2,1)(x + 1,7)(x + 0,9)}{(-1,3 + 2,5)(-1,3 + 2,1)(-1,3 + 1,7)(-1,3 + 0,9)} \times (-0,3) \\
 &\quad + \frac{(x + 2,5)(x + 2,1)(x + 1,7)(x + 1,3)}{(-0,9 + 2,5)(-0,9 + 2,1)(-0,9 + 1,7)(-0,9 + 1,3)} \times (-2,1) \\
 &= -2,44141x^4 - 16,7318x^3 - 41,6699x^2 - 48,196x - 22,3194
 \end{aligned}$$

Вычислить приближенное значение таблично заданной функции в заданной точке x

$$\begin{aligned}
 L_4(-2,35) &= -2,44141 \times (-2,35)^4 - 16,7318 \times (-2,35)^3 - 41,6699 \times (-2,35)^2 \\
 &\quad - 48,196 \times (-2,35) - 22,3194 = 3,5042
 \end{aligned}$$

Построим полином Лагранжа $L_4(x)$

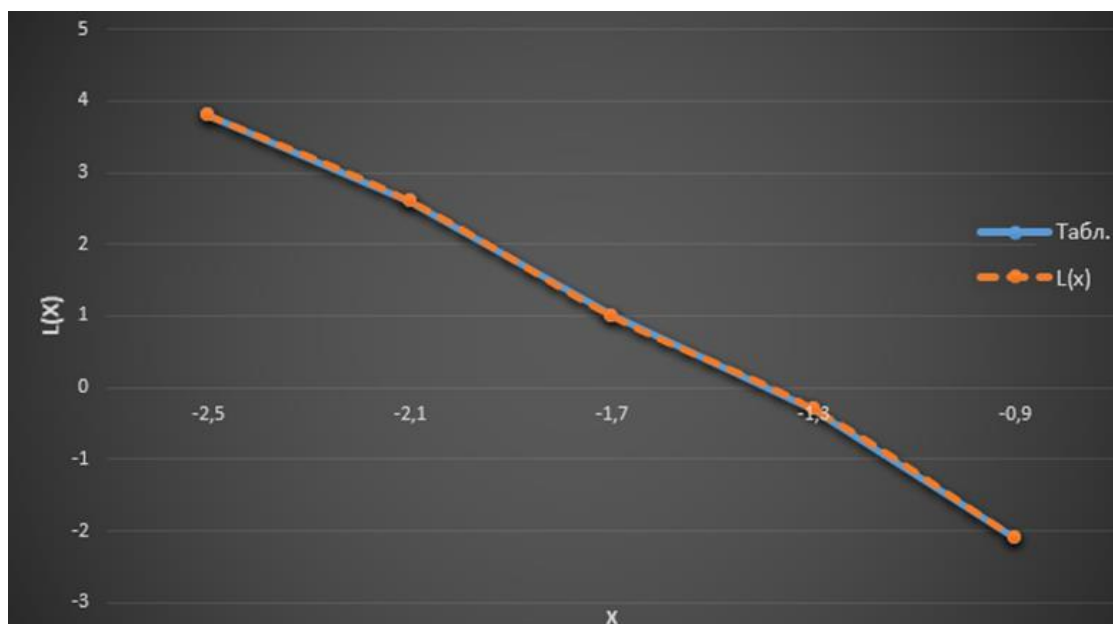


Рисунок 1.2 - График интерполирующего полинома Лагранжа для функции, заданной на сетке $R : \{[-2,5; 3,8], [-2,1; 2,6], [-1,7; 1], [-0,9; -2,1]\}$

3. Сравнение полученных данных

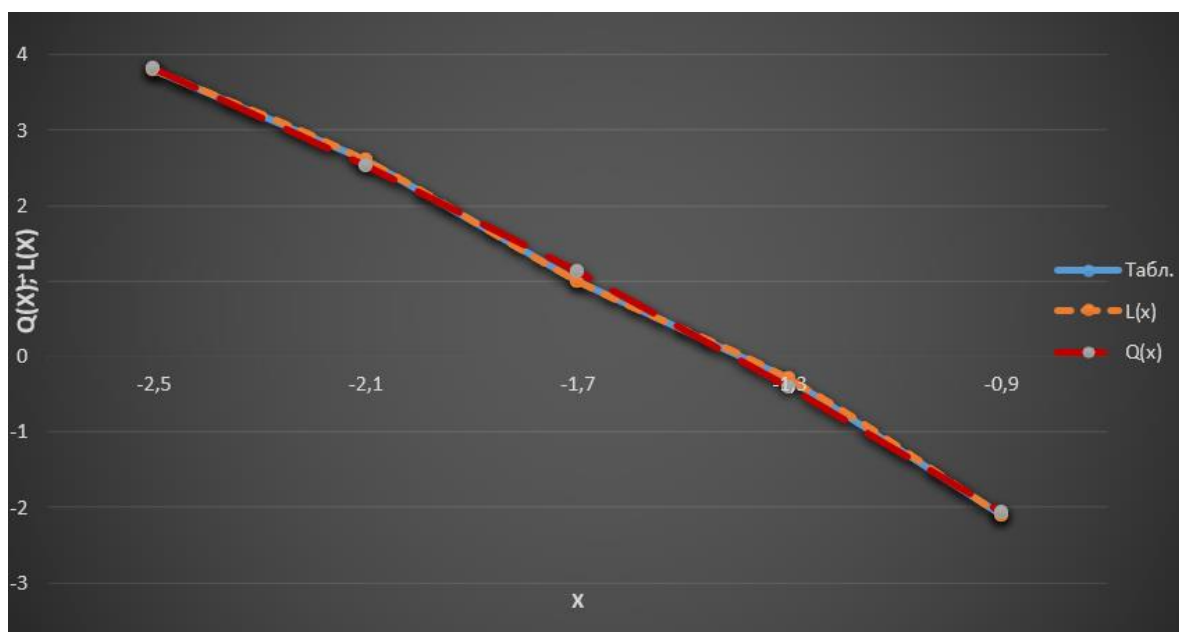


Рисунок 1.3 Сравнение данных

$$L_4(-2,35)=3,5042$$

$$Q(-2,35)=3,3476$$

Задание 2

Таблица 2 Условие задания №2

№ варианта	$yy' = -\frac{x}{2}, \quad M(4, 2).$
21	

- Используя метод Эйлера, найти приближенное решение задачи Коши на отрезке длины 2 единицы $[x_0, x_0+2]$ с шагом $h = 0,4$;
- Определить тип дифференциального уравнения и найти точное решение задачи Коши, если возможно;
- В противном случае (если точное решение не удастся найти) повторить пункт 1 с шагом $h = 0,2$;
- Сравнить полученные результаты, заполнив таблицу:

Таблица 3 Таблица с шагами для решения

x_i	y_i – решение задачи Коши методом Эйлера с шагом $h = 0,4$	y_i – решение задачи Коши методом Эйлера с шагом $h = 0,2$ или точное решение
x_0		
$x_0 + 0,2$		
$x_0 + 0,4$		
...		
$x_0 + 2$		

- построить графики ломаных Эйлера или ломаной Эйлера и точного решения.

Решение:

- Используя метод Эйлера, найдём приближенное решение задачи Коши на отрезке длины 2 единицы $[x_0, x_0+2]$ с шагом $h = 0,4$;

Из условия:

$$\begin{aligned}
 & y_0=2, \quad x_0=4; \\
 & yy' = -\frac{x}{2} \rightarrow y' = -\frac{x}{2y}; \\
 & y_0' = f(x_0, y_0) = -\frac{x_0}{2y_0} = -\frac{4}{2 \times 2} = -1 \\
 & y_1 = y_0 + h \times f(x_0, y_0) = 2 + 0,4 \times (-1) = 1,6 \\
 & x_1 = x_0 + h = 4 + 0,4 = 4,4 \\
 & y_1' = f(x_1, y_1) = -\frac{x_1}{2y_1} = -\frac{4,4}{2 \times 1,6} = -1,375 \\
 & y_2 = y_1 + h \times f(x_1, y_1) = 1,6 + 0,4 \times (-1,375) = 1,05 \\
 & x_2 = x_1 + h = 4,4 + 0,4 = 4,8
 \end{aligned}$$

Так повторим до x_0+2 , а именно $x_5=6$, данные приведены ниже

S	T	U	V	W	X
h	i	x_i	y_i	$f(x,y)$	$hf(x,y)$
0,4	0	4	2	-1,000	-0,400
	1	4,4	1,60	-1,375	-0,550
	2	4,8	1,05	-2,286	-0,914
	3	5,2	0,14	-19,158	-7,663
	4	5,6	-7,53	0,372	0,149
	5	6	-7,38	0,407	0,163

Рисунок 2.1 Расчёты задачи Коши с шагом = 0,4

2. Определить тип дифференциального уравнения и найти точное решение задачи Коши, если возможно;

Проверяем есть ли возможность рассчитать точное решение:

$$yy' = -\frac{x}{2} \times 2$$

$$2yy' = -x$$

$$\frac{2ydy}{dx} = -x \times dx$$

$$2ydy = -x dx$$

Тип диф. уравнения – уравнение с разделяющимися переменными

$$\int ydy = \int -\frac{x}{2} dx$$

$$\frac{y^2}{2} = C - \frac{x^2}{4}$$

$$y^2 = 2\left(C - \frac{x^2}{4}\right)$$

Найдём C, при $y(4)=2$

$$2^2 = 2\left(C - \frac{4^2}{4}\right)$$

$$4 = 2C - 8$$

$$C = 6$$

Вычисленное решение ОДУ:

$$y^2 = 2\left(6 - \frac{x^2}{4}\right)$$

$$y = \sqrt{2(6 - \frac{x^2}{4})}$$

Подставляем x в формулу с шагом h до x₅

Z	AA
x _i	y
4,0	2,000000
4,4	1,523155
4,8	0,692820
5,2	#ЧИСЛО!
5,6	#ЧИСЛО!
6,0	#ЧИСЛО!

Рисунок 2.2 Вычислений значений ОДУ

С x₃ получаем иррациональные числа, отсюда следует что точное решение найти невозможно.

3. В противном случае (если точное решение не удастся найти) повторить пункт 1 с шагом $h = 0,2$;

Повторяем вычисления с пункта 1 с шагом 0,2, получаем:

AC	AD	AE	AF	AG	AH
h	i	x _i	y _i	f(x,y)	hf(x,y)
0,2	0	4	2	-1,000	-0,400
	1	4,2	1,60	-1,313	-0,525
	2	4,4	1,08	-2,047	-0,819
	3	4,6	0,26	-8,971	-3,588
	4	4,8	-3,33	0,720	0,288
	5	5,0	-3,04	0,821	0,329
	6	5,2	-2,72	0,958	0,383
	7	5,4	-2,33	1,158	0,463
	8	5,6	-1,87	1,498	0,599
	9	5,8	-1,27	2,284	0,914
	10	6,0	-0,36	8,423	3,369

Рисунок 2.3 Расчёты задачи Коши с шагом = 0,4

4. Сравнить полученные результаты, заполнив таблицу:

Таблица 4 Сравнение результатов

x_i	y_i – решение задачи Коши методом Эйлера с шагом $h = 0,4$	y_i – решение задачи Коши методом Эйлера с шагом $h = 0,2$
4,0	2	2
4,2		1,6
4,4	1,6	1,08
4,6		0,26
4,8	1,05	-3,33
5,0		-3,04
5,2	0,14	-2,72
5,4		-2,33
5,6	-7,53	-1,87
5,8		-1,27
6,0	-7,38	-0,36

5. построить графики ломаных Эйлера

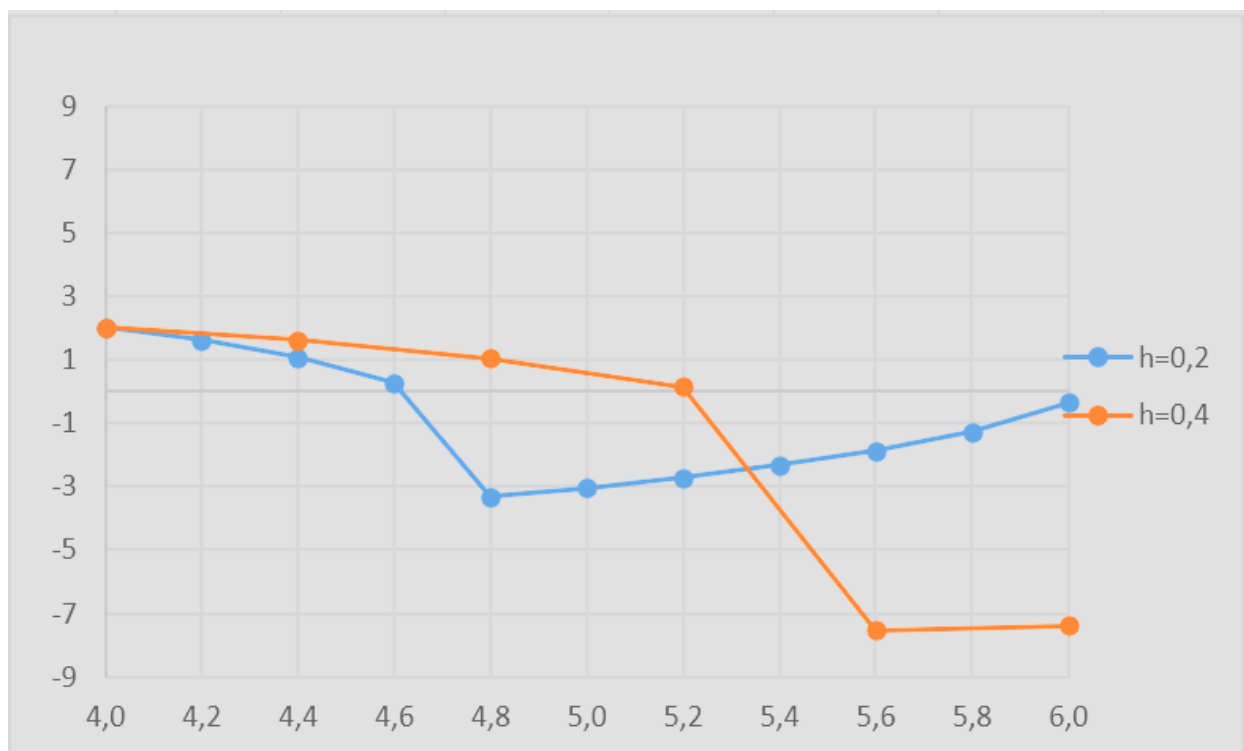


Рисунок 2.4 Сравнение ломаных

Задание 3. Применение методов численного интегрирования

Вычислить приближенное значение определенного интеграла, используя методы:

1. прямоугольников;
2. трапеций;
3. Симпсона (парабол).

Сравнить полученные результаты, сделать выводы.

Таблица 5 Условие задания №3

№ Варианта	Условие задания
28	$\int_{5/2}^{10/3} \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2})(x-2)^2}$

Решение:

1. Метод прямоугольника

Возьмём метод среднего прямоугольника так как он самый точный, на малой дистанции, погрешность численного интегрирования определяется шагом разбиения.

Разделим отрезок $[\frac{10}{3}, \frac{5}{2}]$ на 10 равных частей, то есть на 10 элементарных отрезков.

Длина каждого элементарного отрезка:

$$h = \frac{b-a}{N} = \frac{\frac{10}{3} - \frac{5}{2}}{10} = 0,0833$$

Найдём середину каждого отрезка, расчёты произведём только для первого.

$$x_{i-0,5} = x_0 + \frac{1}{2}h = 2,5 + 0,5 * 0,0833 = 2,5417$$

Таблица 6 Середины отрезков

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_{i-0,5}$	2,542	2,625	2,708	2,792	2,875	2,958	3,041	3,125	3,208	3,291

Подставим середину каждого отрезка в функцию и умножим её на ширину прямоугольника. Расчёты произведём только для первого.

$$\begin{aligned} f(x_{i-0,5})h &= f(2,5417)h = \frac{\sqrt{2,5417+2} + \sqrt{2,5417-2}}{(\sqrt{2,5417+2} - \sqrt{2,5417-2})(2,5417-2)^2} * 0,0833 \\ &= \frac{2,867}{0,409} * 0,0833 = 0,584 \end{aligned}$$

Таблица 7 Номер и площадь прямоугольника

№ Прямоугольника	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Площадь прямоугольника	0,584	0,461	0,377	0,315	0,269	0,233	0,205	0,182	0,163	0,148

Сложим площадь каждого прямоугольника и получим приближенное значение определённого интеграла.

$$\sum_{j=1}^{10} f(x_{i-0,5}) * h = 0,584 + 0,461 + \dots + 0,163 + 0,148 \approx 2,937$$

Методом среднего прямоугольника численного интегрирования получилось вычислить приближенное значение определенного интеграла, и оно приближённо равно 2,937.

2. Метод трапеции

Так же как и в методе среднего прямоугольника разделим отрезок на 10 равных частей, $h = 0,083$.

Найдём начало каждой части:

$$x_1 = x_0 + 0,0833 = \frac{5}{2} + 0,083 = 2,583$$

Таблица 8 Начало каждой части отрезка

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	2,500	2,583	2,667	2,750	2,833	2,917	3,000	3,083	3,166	3,250	3,333

Подставим данные в функцию

$$f(x_0) = f(2,5) = \frac{\sqrt{2,5+2} + \sqrt{2,5-2}}{(\sqrt{2,5+2} - \sqrt{2,5-2})(2,5-2)^2} = \frac{2,828}{0,354} = 8$$

Таблица 9 Данные функций начала каждой части отрезка

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x_i)$	8,000	6,199	4,985	4,123	3,486	3,000	2,619	2,314	2,066	1,860	1,688

Рассчитаем формулу трапеций для всего отрезка интегрирования $[\frac{10}{3}, \frac{5}{2}]$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sum_{j=1}^{10} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} h = \frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{N-1} + f_N) \\ &= \frac{0,0833}{2} (8 + 2 * 6,199 + \dots + 2 * 1,86 + 1,688) \approx 2,957 \end{aligned}$$

Методом трапеции численного интегрирования получилось вычислить приближенное значение определенного интеграла, и оно приближённо равно 2,957.

3. Метод Симпсона (парабол)

Разобьём отрезок на чётное число $2N$ равных частей с шагом:

$$h = \frac{b-a}{2N} = \frac{\frac{10}{3} - \frac{5}{2}}{2 * 5} = 0,0833$$

Шаг одинаковый, как и с методом трапеций, возьмём показания из таблицы 5 и подставим в формулу метода парабол.

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &\approx \frac{h}{3} (f(x_0) + f(x_{10}) + 2(f(x_2)+\dots+f(x_8)) + 4(f(x_1)+\dots+f(x_9))) = \\
&= \frac{0,0833}{3} * (8 + 1,688 + 2(4,985+\dots+2,066) + 4(6,199+\dots+1,86)) \approx 2,943
\end{aligned}$$

ВЫВОД

В рамках задания было найдено приближенное значение определенного интеграла, которое требовалось выполнить тремя различными методами численного интегрирования, в результате мы получили такие ответы: метод прямоугольников - 2,937, метод трапеций - 2,957 и метод Симпсона (парабол) – 2,943.

Нужно отметить, что все ответы получились разными, потому что мы ищем приближённое значение. В моём случае, со всеми одинаковыми условиями точнее всего был метод трапеций.

Помимо сравнения результатов, полученных различными методами, можно также рассмотреть их преимущества и недостатки. Например, метод средних прямоугольников прост в реализации, но имеет низкую точность. Метод трапеций более точен, но всё ещё может давать не точные результаты при использовании малого числа интервалов. Обычно метод парабол даёт наиболее точные результаты, но требуется больше вычислительных шагов.

Задание 4. Приближенное решение алгебраических уравнений

Найти все действительные корни уравнения:

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

С заданной точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, используя следующие 3 метода:

1. метод хорд
2. метод касательных
3. метод итераций

Таблица 10 Вариант задания №4

№ Варианта	Значение коэффициентов		
	a_1	a_2	a_3
28	-8,6	11,59	-3,51

Решение:

1. Отделение корней

Подставим в заданное уравнение значение коэффициентов № варианта:

$$x^3 - 8,6x^2 + 11,59x - 3,51 = 0$$

С помощью excel отделим корни, для этого протабулируем функцию и построить график при изменении x .

Возьму $x_{\text{нач.}} = 0$ и $x_{\text{кон.}} = 2$ с шагом 0,2.

x	$f(x)$
0	-3,51
0,2	-1,528
0,4	-0,186
0,6	0,564
0,8	0,77
1	0,48
1,2	-0,258
1,4	-1,396
1,6	-2,886
1,8	-4,68
2	-6,73

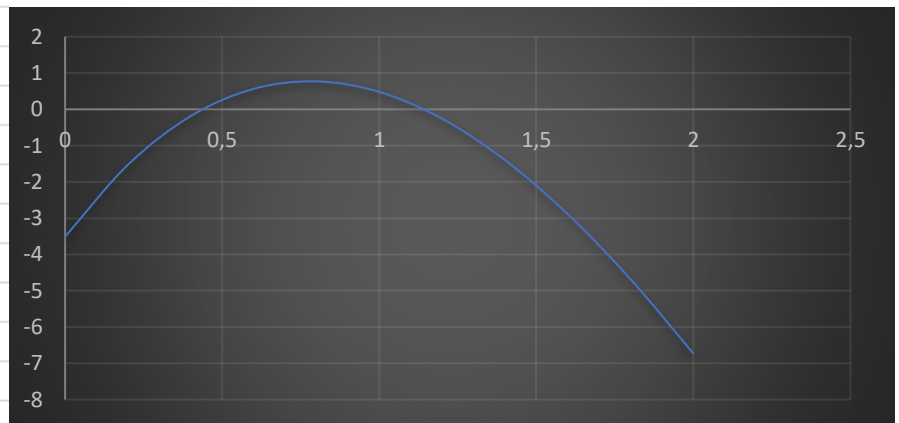


Рисунок 4.1 График функции

После отделения получилось 2 корня: $[0,4; 0,6]$ и $[1; 1,2]$.

2. Уточнение корней. Метод хорд

В качестве начальных приближений возьмем концы заданного отрезка, на котором отделен корень исходного уравнения: $x_0 = 0,4$ и $x_1 = 0,6$ и $x_0 = 1$ и $x_1 = 1,2$. Вычисления будем вести до тех пор, пока не выполнится условие: $|x_i - x_{i-1}| < 10^{-3}$.

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1) * (x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = 0,6 - \frac{0,564 * 0,2}{0,564 - (-0,186)} = 0,4496$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2) * (x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = 0,4496 - \frac{0,0533 * (-0,1504)}{0,0533 - 0,564} = 0,4339$$

$$x'_2 = x'_1 - \frac{f(x'_1) * (x'_1 - x'_0)}{f(x'_1) - f(x'_0)} = 1,2 - \frac{-0,258 * 0,2}{-0,258 - 0,48} = 1,1301$$

$$x'_3 = x'_2 - \frac{f(x'_2) * (x'_2 - x'_1)}{f(x'_2) - f(x'_1)} = 1,1301 - \frac{0,0479 * (-0,0699)}{0,0479 - (-0,258)} = 1,141$$

Таблица 11 Приближение, метод хорд

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0,4	0,6	0,4496	0,4339	0,437947	0,437873
x'_0	x'_1	x'_2	x'_3	x'_4	
1	1,2	1,13	1,141036	1,141849	

Первый корень [0,437947;0,437873]

Второй корень[1,141036;1,141849]

Проверим первый и второй корень:

$$|0,437947 - 0,437973| = 0,000026 < 10^{-3}$$

$$|1,141036 - 1,141849| = 0,00081 < 10^{-3}$$

Поскольку условие выполнено, можно говорить, что корни уравнения найдены.

3. Уточнение корней. Метод касательных

После отделения получилось 2 корня: [0,4;0,6] и [1;1,2].

Определим первую и вторую производные функции:

$$f'(x) = 3x^2 - 17,2x + 11,59$$

$$f''(x) = 6x - 17,2$$

Вычислим условия выбора начального приближения для корня уравнения для первого корня [0,4;0,6]:

$$f(a) * f''(a) = f(0,4) * f''(0,4) = -0,186 * (-14,8) = 2,7528 > 0$$

$$f(b) * f''(b) = f(0,6) * f''(0,6) = 0,564 * (-13,6) = -7,6704 < 0$$

Вычислим условия выбора начального приближения для корня уравнения для второго корня [1;1,2]:

$$f(a) * f''(a) = f(1) * f''(1) = 0,48 * (-11,2) = -5,37 < 0$$

$$f(b) * f''(b) = f(1,2) * f''(1,2) = -0,258 * (-10) = 2,58 > 0$$

Так как по условию $f(x_0) * f''(x_0) > 0$, выбираем в качестве начального приближения точку а, т.е. $x_0 = a$ – для первого корня, а для второго b , $x'_0 = b$.

Далее, используя итерационную последовательность, вычислим новое приближение для корней:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{f(0,4)}{f'(0,4)} = 0,4 - \frac{-0,186}{5,19} = 0,4358$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_1 - \frac{f(0,4358)}{f'(0,4358)} = 0,4358 - \frac{-0,0095}{4,66} = 0,437866$$

$$x'_1 = x'_0 - \frac{f(x'_0)}{f'(x'_0)} = x'_0 - \frac{f(1,2)}{f'(1,2)} = 1,2 - \frac{-0,258}{-4,73} = 1,1455$$

$$x'_2 = x'_1 - \frac{f(x'_1)}{f'(x'_1)} = x'_1 - \frac{f(1,1455)}{f'(1,1455)} = 1,1455 - \frac{-0,015}{-4,18} = 1,141853$$

Таблица 12 Приближение, метод касательных

x_0	x_1	x_2	x_3
0,4	0,4358	0,437866	0,437873
x'_0	x'_1	x'_2	x'_3
1,2	1,1455	1,141853	1,141837

Первый корень [0,437866;0,437873]

Второй корень[1,141853;1,141837]

Проверим первый и второй корень:

$$|0,437866 - 0,437873| = 0,000007 < 10^{-3}$$

$$|1,141853 - 1,141837| = 0,000016 < 10^{-3}$$

Поскольку условие выполнено, можно говорить, что корни уравнения найдены.

4. Уточнение корней. Метод итераций

Итерируем заданное нам функцию

$$g(x) = \frac{-x^3 + 8,6x^2 + 3,51}{-11,59}$$

Найдём первую производную

$$g'(x) = -\frac{100(\frac{8,6x}{5} - 3x^2)}{1159}$$

Подставим середину отрезков на которых находятся корни [0,4;0,6] и [1;1,2].

$$x_1 = g'(0,5) = -\frac{100(\frac{8,6 * 0,5}{5} - 3 * 0,5^2)}{1159} = -0,0736 < 1$$

$$x'_1 = g'(1,1) = -\frac{100(\frac{8,6 * 1,1}{5} - 3 * 1,1^2)}{1159} = -0,1601 < 1$$

Оба выражения подходят по условию $g'(x) < 1$, у первого и второго корня сходимость будет колебательной так как $g'(x) < 0$.

Повторяем вычисления пока данные не будут подходить по заданному классу точности.

Таблица 13 Приближение, метод итераций

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0,5	-0,0736	0,0109	-0,00162	0,000241	-0,000036
x'_0	x'_1	x'_2	x'_3	x'_4	x'_5
1,1	-0,1601	0,0238	-0,00353	0,000525	-0,000078

Проверим

$$D = |-0,000036 - 0,000241| = 0,000277 < 10^{-3}$$

$$D = |-0,000078 - 0,000525| = 0,000603 < 10^{-3}$$

Поскольку условие выполнено, можно говорить, что корни уравнения найдены.

Вывод

В данном задании были изучены и применены три метода приближённого решения нелинейных уравнений: метод хорд, метод касательных и метод итераций.

Метод хорд основан на построении последовательности приближений к корню уравнения, используя две точки на графике функции. Метод касательных (или метод Ньютона) также использует последовательность приближений, но в этом случае используется касательная к графику функции в точке приближения. Метод итераций основан на преобразовании уравнения к виду, в котором можно последовательно приближаться к корню.

Результаты показали, что каждый из методов даёт приближённое решение уравнения с заданной точностью. Однако для разных функций и разных начальных приближений эффективность методов может различаться. При использовании методов численного интегрирования важно оценить погрешность полученных результатов.