

## Практическая работа

### Математические методы построения эффективности систем. Методы оптимизации

#### Цели работы

Целью работы является ознакомление с методами построения математических моделей в задачах оптимизации и решение их средствами пакета Ms Excel.

#### Теоретические сведения

Чтобы найти оптимальное решение задачи, необходимо:

1. Провести содержательный анализ задачи.
2. Создать математическую модель, отражающую наиболее существенные черты моделируемой ситуации.
3. Построить компьютерную модель.
4. Выполнить анализ полученных результатов.

Постановка оптимизационной задачи состоит из следующих этапов.

1. *Определение переменных* или величин, которые являются искомыми параметрами альтернатив. Каждая из таких величин обозначается в виде переменной с индексом:  $x_1, x_2$  и т.д., а весь набор переменных (альтернатива) – в виде вектора  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , где  $n$  – общее число переменных. В качестве переменных могут выступать планы выпуска продукции, размер инвестиций и другие показатели.
2. *Определение ограничений*. После описания переменных задачи необходимо указать, какие значения они могут принимать. Множество допустимых значений задается в виде одного или нескольких ограничений на их значения, которые записываются в виде соотношений типа равенств или неравенств:

$$g_i(x_1, \dots, x_n) \leq \{ \geq, = \} b_i, i=1, \dots, m.$$

В левой части ограничения стоит некоторая функция  $n$  переменных  $g_i$ , а в правой части – величина  $b_i$ .

Часть ограничений обычно составляют граничные условия на значения переменных вида  $x_j \leq \{ \geq \} d_j$ , наиболее распространенным из них является условие неотрицательности переменных:  $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ .

3. *Задание целевой функции*. С ее помощью можно сравнить между собой различные альтернативы и определить какая из них лучше. Если решается задача максимизации целевой функции  $F$  и сравниваются две альтернативы  $x = (x_1, \dots, x_n)$  и  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , то считается  $x$  лучше  $y$ , если  $F(x) > F(y)$ .

*Общая задача оптимизации* обычно записывается в таком виде:

$$\begin{aligned} F(x) &\rightarrow \max (\min), \\ g_i(x) &\leq b_i, i=1, \dots, m. \\ x &\in \Omega. \end{aligned}$$

Здесь  $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$  –  $n$ -мерный *вектор переменных* (решение, альтернатива, план и т.д.);  $F(x)$  – целевая функция;  $g_i(x)$  – функции, задающие левую часть ограничений общего вида;  $b_i$  – компоненты вектора правой части ограничений общего вида;  $\Omega$  – фиксированное множество в  $n$ -мерном векторном пространстве  $R^n$ , задающее дополнительные условия на область изменения переменных. Обычно  $\Omega = \{x \geq 0\}$  или  $\Omega = \{d_{\max} \geq x \geq d_{\min}\}$ , где  $d_{\max}$  и  $d_{\min}$  – соответственно векторы верхних и

нижних границ на переменные.

Вектор  $x = (x_1, \dots, x_n)$  называется *допустимым решением* или *планом* задачи оптимизации, если он удовлетворяет всем ее ограничениям.

Допустимое решение называется оптимальным решением или оптимальным планом, если оно является наилучшим, т.е. доставляет оптимум целевой функции  $F$  на множестве всех допустимых решений  $X$ .

Иными словами  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$  – оптимальный план, если для любого плана  $x = (x_1, \dots, x_n)$  выполнено условие  $F(x^*) \geq F(x)$  в задаче максимизации целевой функции или  $F(x^*) \leq F(x)$  в задаче минимизации на множестве допустимых планов  $X$ .

Величина  $F(x^*)$  называется оптимальным значением целевой функции или значением задачи оптимизации.

В зависимости от характера функций и условий, накладываемых на переменные, приведенная выше задача может относиться к одному из трех основных типов конечномерных задач оптимизации: *линейного программирования* (ЛП), *целочисленного программирования* (ЦП) и *нелинейного программирования* (НП).

### Решение задач линейного программирования

В задаче ЛП все ограничения и целевая функция линейны. Ее можно записать в виде:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max(\min),$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Систему ограничений на задачу можно представить следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1; \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m. \end{cases}$$

Для решения задачи ЛП используется симплекс-метод. Он представляет собой итеративную процедуру, на каждом шаге которой находится вершина многогранника допустимых планов с большим значением целевой функции, чем в вершине, полученной на предыдущем шаге. Если задача имеет оптимальный план, то он в ЛП служит оценки общих ограничений – решение двойственной задачи.

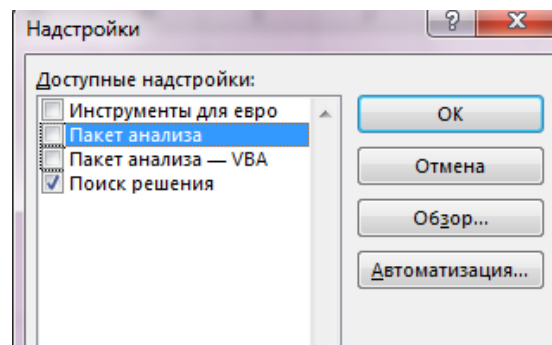
### Методика выполнения работы

Задания для самостоятельной работы состоят из двух задач и распределены по вариантам.

Первая задача является задачей линейного программирования и ее решение в некоторых случаях возможно по алгоритмам *примеров 1-4*.

Вторая задача – транспортная, ее решение описано в *примере 6*.

**Включить Поиск решения** можно командой: **Файл → Параметры → Настройки → Поиск решения:**



### Пример 1. Задача нахождения оптимального производственного плана

Для изготовления трех видов изделий фирма расходует три вида ограниченных ресурсов (сырье, оборудование и труд) в количествах, представленных в таблице ниже. Здесь же указаны нормы расхода ресурсов и удельная прибыль (от реализации одного изделия каждого вида продукции). Предполагается, что расход ресурсов и величина прибыли являются линейными функциями от объемов выпускаемой продукции. Требуется найти план выпуска продукции, обеспечивающий получение максимальной прибыли от продажи выпущенных изделий.

Таблица 1

Исходные данные задачи

Вид ресурса	Нормы расхода ресурсов			Наличие ресурса
	Изделие 1	Изделие 2	Изделие 3	
Сырье (кг)	5	6	4	400
Оборудование (станко/ч)	4	7	6	350
Труд (чел/ч)	6	8	5	480
Удельная прибыль (руб)	25	40	30	

#### 1. Создание математической модели задачи

Фирме нужно определить план выпуска продукции, поэтому математическая модель должна содержать три переменные:  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ , где  $x_j$  – объем выпуска  $j$ -го изделия. Весь план выпуска изделий можно записать в виде вектора  $x = (x_1, x_2, x_3)$ .

Этот план можно выполнить лишь тогда, когда он будет обеспечен необходимым количеством ресурсов, т.е. в модели должно быть ограничение вида:

расход ресурса  $\leq$  наличие ресурса.

Чтобы определить его аналитический вид, вычислим затраты сырья на выпуск плана  $x$ : для выпуска  $x_1$  единиц Изделия 1 нужно затратить  $5x_1$  (кг). Учет затрат на изделия 2 и 3 показывает, что общий расход сырья равен:  $5x_1 + 6x_2 + 4x_3$ . Так как его запас ограничен 400 кг, то ограничение по сырью имеет вид:

$$5x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 400 \text{ (сырье).}$$

Ограничениями по другим ресурсам будут:

$$4x_1 + 7x_2 + 6x_3 \leq 350 \text{ (оборудование)}$$

$$6x_1 + 8x_2 + 5x_3 \leq 480 \text{ (труд).}$$

Кроме ресурсных ограничений должно выполняться условие неотрицательности переменных. Будем считать, что объемы выпуска могут быть как целыми, так и дробными значениями. Пусть  $x = (x_1, x_2, x_3)$  – некоторый вектор выпуска. Прибыль  $F$  от продажи этой продукции вычисляется по формуле:

$$F = 25x_1 + 40x_2 + 30x_3.$$

Так как в отношении прибыли должно быть применено условие ее максимума, то математическая модель задачи имеет следующий вид:

$$F = 25x_1 + 40x_2 + 30x_3 \rightarrow \max,$$

$$5x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 400$$

$$4x_1 + 7x_2 + 6x_3 \leq 350$$

$$6x_1 + 8x_2 + 5x_3 \leq 480$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

#### 2. Решение задачи средствами пакета Ms Excel

А). Разместим исходную информацию на рабочем листе.

Диапазон ячеек B10:D10 отведем под изменяемые ячейки, в нем будут находиться значения переменных. Присвойте имя *Выпуск* для этого диапазона (Формулы → Присвоить имя или Ctrl+F3). Диапазону E5:E7 присвойте имя *Расход*, G5:G7 – *Наличие*, B11 – *Прибыль*.

	A	B	C	D	E	F	G
1	<b>Расчет оптимального плана фирмы (ЛП)</b>						
2							
3	<i>Вид ресурса</i>	<i>Нормы расхода ресурсов</i>			<i>Расход</i>	<i>Знак</i>	<i>Наличие ресурса</i>
4		<i>Изделие 1</i>	<i>Изделие 2</i>	<i>Изделие 3</i>			
5	Сырье	5	6	4	0	<=	400
6	Оборудование	4	7	6	0	<=	350
7	Труд	6	8	5	0	<=	480
8	Удельная прибыль	25	40	30			
9							
10	Выпуск						
11	Прибыль	0					

Рис.1. Модель задачи на рабочем листе Ms Excel

В). Введем формулы для целевой функции и ограничений.

Так как все параметры модели линейны, удобно использовать функцию СУММПРОИЗВ. При расчете прибыли в ячейку B11 необходимо будет ввести: =СУММПРОИЗВ (B8:D8;Выпуск). Для расчета ресурсных ограничений в ячейки E5:E7 вводятся аналогичные формулы, например, в ячейке E5 имеем: =СУММПРОИЗВ (B5:D5;Выпуск).

С). Сформируем модель в средстве «Поиск решения».

Для этого необходимо сделать активной целевую ячейку B11, выполнить команду меню: Данные → Поиск решения. Заполнить данные как указано на рисунке ниже.

Рис. 2. Модель задачи в окне Параметры поиска решения пакета Ms Excel

Д). Найдем оптимальное решение.

Для этого нажмите кн. Найти решение и выделите в окне два отчета: по результатам и устойчивости. Нажмите кн. ОК.

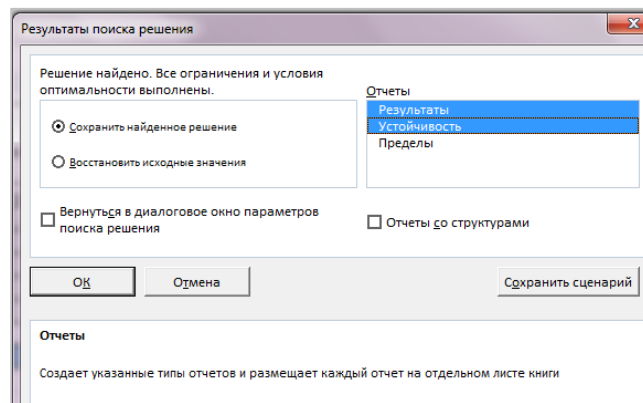


Рис. 3. Модель задачи в окне Результаты поиска решения пакета Ms Excel

### 3. Анализ полученных результатов

#### 1). Анализ устойчивости решения.

После того как оптимальное решение задачи найдено, одним из наиболее важных элементов его анализа является изучение того, как влияют на решение изменения различных параметров модели. Это позволит выяснить, насколько решение модели чувствительно к изменению внешних условий, а также определить область изменения параметров, в которой оно остается прежним.

Если окажется, что небольшие изменения значений параметров модели сильно влияют на характеристики оптимального плана, то его реализация не представляется разумной. То есть такой анализ должен предшествовать использованию результатов расчетов при принятии решения.

Отчет по устойчивости решения в пакете Ms Excel состоит из двух таблиц и содержит информацию:

#### А). Таблица «Ячейки переменных»

*Окончательное значение* – оптимальные значения переменных.

*Приведенная стоимость* – двойственные оценки переменных, которые показывают насколько изменится оптимальное значение целевой функции, если принудительно включить единицу изделия этого вида в оптимальный план. Эта оценка отлична от нуля лишь для изделий, не вошедших в оптимальный план. Так в нашем примере для Изделия 3 эта оценка равна -1,5, т.е. если принудительно ввести ограничение  $x_3 \geq 1$ , что даст уменьшение прибыли на 1,5 и составит 2118,5.

*Целевой коэффициент* – коэффициенты целевой функции.

*Допустимое увеличение (уменьшение)* – на сколько можно увеличить (уменьшить) целевой коэффициент, чтобы оптимальное решение не изменилось.

Таким образом, при нахождении первого коэффициента целевой функции в пределах  $I_1 = (22,86; 26,15)$  решение остается прежним. Этот интервал называют *интервалом устойчивости решения*. Интервалы устойчивости для остальных коэффициентов равны:  $I_2 = (39,06; 43,75)$  и  $I_3 = (-\infty; 31,5)$ .

#### Б). Таблица «Ограничения»

*Окончательное значение* – значения левой части ограничения (затраты ресурсов) в оптимальном плане.

*Теневая цена* – двойственные оценки ограничений (ресурсов), показывающие насколько изменится оптимальное значение целевой функции, если увеличить на единицу правую часть ограничения (наличный объем ресурса).

В нашем примере: увеличение оборудования на одну единицу увеличит прибыль на 4 ед., а труд – на 1,5 ед.

*Ограничение правая сторона* – значения правых частей ограничений.

*Допустимое увеличение (уменьшение)* – насколько можно увеличить (уменьшить) правую часть ограничения, чтобы не изменилась его двойственная оценка (теневая цена).

Информация последних трех столбцов позволяет найти интервалы устойчивости оценок, в пределах которых их значения не изменяются. Границы вычисляются по формулам:

Левая граница = Ограничение правая сторона – Допустимое уменьшение

Правая граница = Ограничение правая сторона + Допустимое увеличение

Таким образом, интервалы устойчивости оценки сырья имеют вид:

$J_1 = (388; +\infty)$  – ресурс избыточен, теневая оценка 0.

$J_2 = (320; 420)$  – в его пределах каждая дополнительная единица оборудования даст увеличение прибыли на 4 единицы.

$J_3 = (400; 490,9)$  – в его пределах каждая дополнительная единица оборудования даст увеличение прибыли на 1,5 единицы.

Ячейки переменных							
Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Стоимость	Целевая функция Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение	
\$B\$10	Выпуск Изделие 1	56	0	25	1,15	2,14	
\$C\$10	Выпуск Изделие 2	18	0	40	3,75	0,94	
\$D\$10	Выпуск Изделие 3	0	-1,5	30	1,50	1E+30	

Ограничения							
Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Тень Цена	Ограничение Правая сторона	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение	
\$E\$5	Сырье Расход	388	0	400	1E+30	12,00	
\$E\$6	Оборудование Расход	350	4	350	70,00	30,00	
\$E\$7	Труд Расход	480	1,5	480	10,91	80,00	

Рис. 4. Отчет по устойчивости

## Пример 2. Решение задач целочисленного программирования

Для многих производств экономически осмысленны только целочисленные значения полученных решений, к ним можно отнести в частности, объемы выпуска штучных товаров.

С точки зрения решения такой задачи в Ms Excel отличие заключается в том, что при задании ограничений в окне Поиск решения необходимо указать какие переменные могут принимать только целые значения.

### Задача составления скользящих графиков

Такие графики обычно связаны с расписаниями многосменной работы предприятия в условиях нестационарного спроса на товары или услуги, связанные с деятельностью этого предприятия. Задача состоит в том, чтобы организовать расписание обслуживания клиентов таким образом, чтобы издержки от неравномерности спроса были бы минимальны.

В таблице 2 приведено число продавцов, необходимых для удовлетворения покупательского спроса в зале магазина. *Требуется так организовать расписание работы продавцов, чтобы их общее количество (то есть расходы на оплату их труда) было минимальным.*

Пусть продавцы в магазине работают по 8 часов. В соответствии с данными задачи, число продавцов меняется через 4 часа. Если предположить, что в первую смену работает  $x_1$  продавцов, во вторую –  $x_2$  и т. д., то график работы продавцов представим на рисунке 5.

Таблица 2



Требуемое количество продавцов

Время суток	0–4	4–8	8–12	12–16	16–20	20–24
Требуемое кол-во продавцов	2	2	5	7	7	4

Рис.

5.

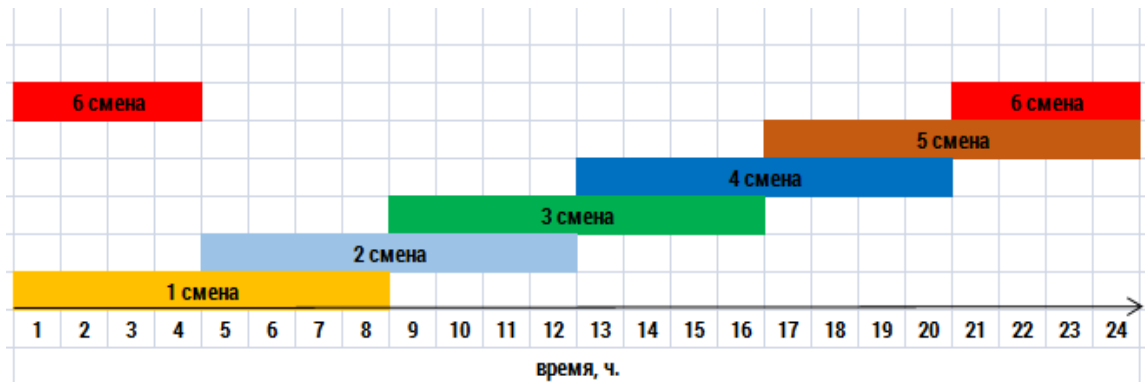


График работы продавцов

Жирные линии – это смены, они начинаются через 4 часа и продолжаются 8 часов. Смены перекрываются, т. е., с 5 до 8 часов в зале присутствуют  $(x_1 + x_2)$  продавцов, с 9 до 12 часов –  $(x_2 + x_3)$  продавцов, а с 13 часов до 4 работают  $(x_1 + x_6)$  продавцов.

Этот «скользящий» график и образует расписание смен,  $x_1 \div x_6$  определяют изменяемые переменные, которые следует определять из условия минимального общего количества продавцов, т. е. *целевая функция* в этой задаче определяется выражением:  $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) \rightarrow \min$ .

В качестве *ограничений* будут выступать условия:  $x_1 + x_6 \geq 2$ ;  $x_1 + x_2 \geq 2$ ;  $x_2 + x_3 \geq 5$ ;  $x_3 + x_4 \geq 7$ ;  $x_4 + x_5 \geq 7$ ;  $x_5 + x_6 \geq 4$ .

Кроме того,  $x_1 \div x_6$  должны быть целыми и положительными. Модель задачи представлена на рисунке 3.17.

Отдельно следует упомянуть, что интервал, с которым смены перекрываются, вычисляется из условия задачи – каждые 4 часа меняется потребность в продавцах. Если бы этот показатель был 2 часа, то смены следовало бы запускать каждые 2 часа.

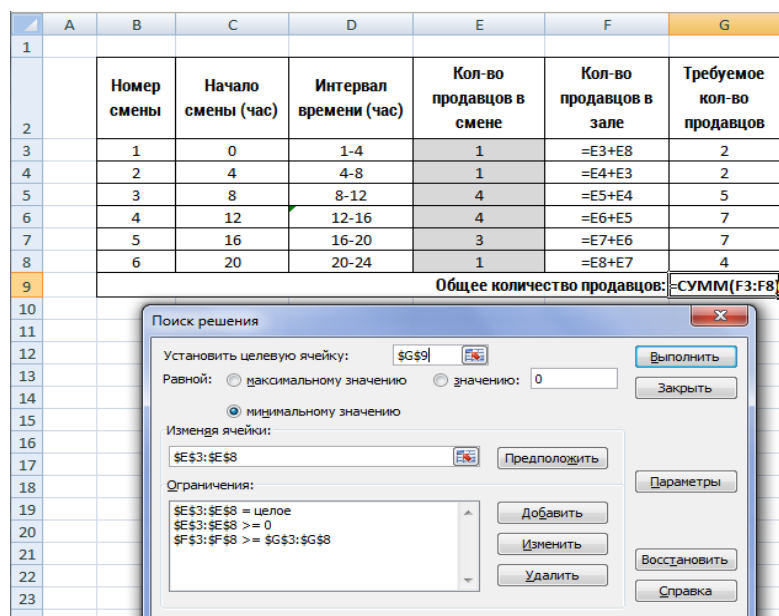


Рис. 6. Модель задачи составления скользящих графиков

Номер смены	Начало смены (час)	Интервал времени (час)	Кол-во продавцов в смене	Кол-во продавцов в зале	Требуемое кол-во продавцов
1	0	1-4	1	2	2
2	4	4-8	1	2	2
3	8	8-12	4	5	5
4	12	12-16	4	8	7
5	16	16-20	3	7	7
6	20	20-24	1	4	4
Общее количество продавцов:					28

Рис. 7. Решение задачи составления скользящих графиков

### Пример 3. Задача логического выбора (с двоичными переменными)

Этот класс задач связан с выбором конкретных вариантов организации системы с учетом ресурсных ограничений. Как правило, в них используются изменяемые ячейки, которые могут хранить одно из двух значений – 1 или 0, иначе «выбирать вариант организации» или «не выбирать».

Выбор одного из двух вариантов организации исследуемой системы может определяться двумя булевскими переменными ( $x_1, x_2$ ). Условие выбора только одного из двух вариантов эквивалентно ограничению:  $x_1 + x_2 = 1$ . Такое ограничение моделирует условие взаимоисключения.

Условие выбора хотя бы одного из двух вариантов эквивалентно логическому ограничению  $x_1 + x_2 \geq 1$ .

Если вариант 2 может быть принят только при принятии варианта 1 (взаимообусловленность), тогда следует использовать ограничение  $x_1 \geq x_2$ . Если же вариант 2 принимается при принятии варианта 1, то вводится ограничение  $x_2 \geq x_1$ . В качестве примера рассмотрим задачу выбора *варианта капиталовложений*.

Рассматриваются *пять проектов*, которые могут быть осуществлены в течение *трех лет*. Ожидаемые величины прибыли от реализации проектов и распределение необходимых капиталовложений по годам (в тыс. долл.) приведены в табл.3. Требуется выбрать совокупность проектов, которой соответствует максимуму общей прибыли.

Таблица 3

Проект	Распределение капиталовложений			Прибыль
	Год 1	Год 2	Год 3	
1	5	1	8	20
2	4	7	10	40
3	3	9	2	20
4	7	4	10	15
5	8	6	1	30
Мах объем вложений	25	25	25	

Добавим к таблице исходных данных столбец изменяемых ячеек. Обозначим содержимое этих ячеек как  $x_i$ , где  $i = 1, 2, \dots, 5$  определяет номер проекта, а  $x_i$  определяет решение: вкладывать ( $x_i = 1$ ) или нет ( $x_i = 0$ ) средства в  $i$ -ый проект.

Ограничениями задачи будут:

*По объему капиталовложений*

в первый год:  $5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 7 \cdot x_4 + 8 \cdot x_5 \leq 25$ ;

во второй год:  $1 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 + 9 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 + 6 \cdot x_5 \leq 25$ ;

в третий год:  $8 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 10 \cdot x_4 + 1 \cdot x_5 \leq 25$ ;

*Естественные ограничения:* ( $x_1 \div x_5$ ) – двоичные (булевские)



Целевая функция:  $Z = 20 \cdot x_1 + 40 \cdot x_2 + 20 \cdot x_3 + 15 \cdot x_4 + 30 \cdot x_5 \rightarrow \max$ .

	A	B	C	D	E	F
1	Проект	Распределение капиталовложений			Прибыль	Выбор проекта (1 - да, 0 - нет)
2		год 1	год 2	год 3		
3	1	5	1	8	20	1
4	2	4	7	10	40	1
5	3	3	9	2	20	1
6	4	7	4	10	15	1
7	5	8	6	1	30	1
8	Реальный объем капиталовложений (тыс.\$)	=СУММПРОИЗВ(B3:B7;\$F\$3:\$F\$7)		27	31	Реальная прибыль (тыс. \$)
9	Максимальный объем капиталовложений (тыс.\$)	25	25	25		=СУММПРОИЗВ(E3:E7;F3:F7)

Рис.8. Модель задачи логического выбора

	A	B	C	D	E	F
1	Проект	Распределение капиталовложений			Прибыль	Выбор проекта (1 - да, 0 - нет)
2		год 1	год 2	год 3		
3	1	5	1	8	20	1
4	2	4	7	10	40	1
5	3	3	9	2	20	1
6	4	7	4	10	15	0
7	5	8	6	1	30	1
8	Реальный объем капиталовложений (тыс.\$)	20	23	21	Реальная прибыль (тыс. \$)	110
9	Максимальный объем капиталовложений (тыс.\$)	25	25	25		

Рис.9. Решение задачи логического выбора

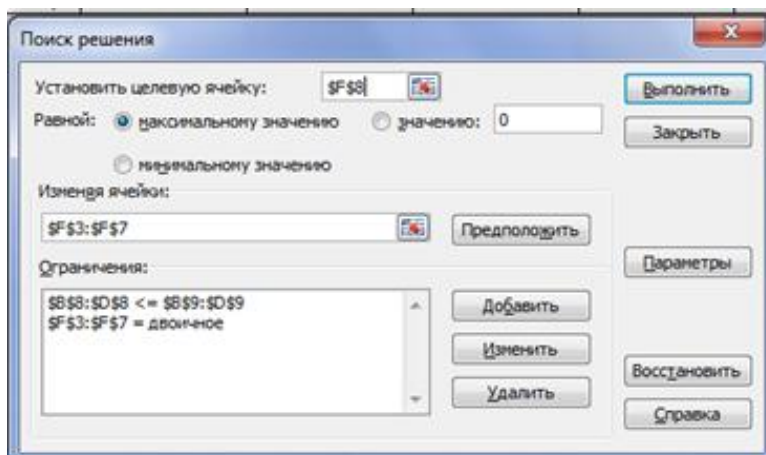


Рис.10. Поиск решения задачи логического выбора

#### Пример 4. Задача оптимизации инвестиций

Основная цель решения этого класса задач – найти оптимальное распределение финансовых средств, доставляющее максимальную прибыль по истечении срока действия инвестиционного проекта.

Денежные средства могут быть использованы для финансирования двух проектов. Проект *A* гарантирует получение прибыли в размере 70 центов на вложенный доллар через год. Проект *B* гарантирует получение прибыли в размере 2 долларов на каждый инвестированный доллар, но через два года. При финансировании проекта *B* период инвестиций должен быть кратным двум годам. Как следует распорядиться капиталом в 100 000 долларов, чтобы максимизировать суммарную величину прибыли, которую можно получить через три года после начала инвестиций?

Содержимое изменяемых ячеек:

$X_a, Y_a$  – вложения в проект А;  $X_b, Y_b$  – вложения в проект В.

Возможные инвестиции могут быть проиллюстрированы схемой, приведенной на рисунке ниже.

Из схемы следует, что в исследуемой системе существуют только два возможных срока вложений – начало первого года и начало второго года. Суммы вложений в эти сроки определяют содержимое изменяемых ячеек. «Точка вложений» в начале третьего года одна, в нее вкладываются все доходы от предыдущих вложений.

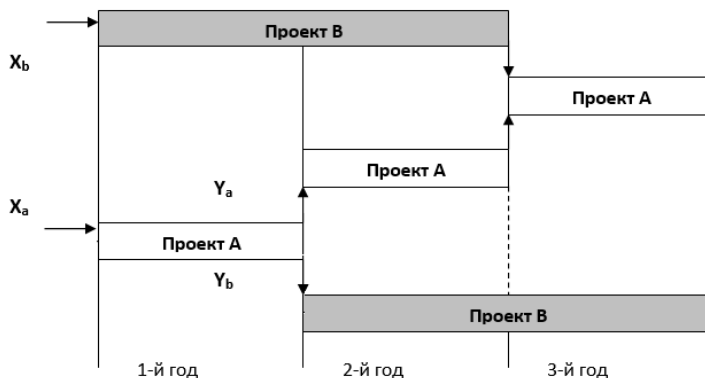


Схема инвестиций в проекты А и В

Ограничения:

$$x_a + x_b = 100\,000; \quad y_a + y_b = (1 + 0,7) \cdot x_a.$$

Целевая функция:

$$z = y_a \cdot (1 + 0,7) \cdot 2 + y_b \cdot (1 + 2) + x_b \cdot (1 + 2) \cdot (1 + 0,7) \rightarrow \max.$$

Решение задачи представлено на рисунке ниже.

	А	В	С	Д	Е	Ф	Г	Н
1		Коэффициент	1-й год		2-й год		3-й год	
2		отдачи	Вложение	Выход	Вложение	Выход	Вложение	Выход
3	Проект А	0,7	1	=C3*(1+B3)	1	=E3*(1+B3)	=СУММ(F3:F4)	=G3*(1+B3)
4	Проект В	2	1		1	=C4*(1+B4)		=E4*(1+B4)
5	Итого:		2	0	2	=СУММ(F3:F4)	=СУММ(G3:G4)	=СУММ(H3:H4)
6	Первоначальная сумма вложений:							100000

	А	В	С	Д	Е	Ф	Г	Н
1		Коэффициент	1-й год		2-й год		3-й год	
2		отдачи	Вложение	Выход	Вложение	Выход	Вложение	Выход
3	Проект А	0,7	21 489	36 530	0	0	235 534	400 409
4	Проект В	2	78 511		36 530	235 534		109 591
5	Итого:		100 000	36 530	36 530	235 534	235 534	510 000
6	Первоначальная сумма вложений:							100000

Поиск решения

Установить целевую ячейку:

Равной: ☒ максимальному значению ☐ значению:

☐ минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

- 
- 
-

Модель задачи об инвестициях

### Пример5. Решение задач нелинейного программирования

В настоящее время разработано много методов решения и анализа задач НП и изучены условия их применимости. Это связано с тем, что не существует универсального алгоритма решения задач НП, подобного симплекс-методу, позволяющего решить практически любую задачу.

Любой метод решения задач НП представляет собой итеративную процедуру, которая генерирует последовательность точек; причем первая (начальная) точка задается до начала процедур, а координаты остальных вычисляются по алгоритму. Пределом этой последовательности обычно является точка оптимума. Процесс вычисления обычно не завершается через конечное число шагов, поэтому обычно задаются условия его прекращения через определенное время. Иногда решение находится только в том случае, когда начальная точка находится достаточно близко к точке оптимума.

Если поиск решения успешно завершен, то в диалоговом окне Результаты поиска решения выводится одно из двух сообщений:

1. Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.
2. Поиск свелся к текущему решению. Все ограничения выполнены.

Рассмотрим пример задачи ЛП о нахождении оптимального плана выпуска продукции, модифицировав его целевую функцию. Предположим, что с ростом объема выпуска продукции из-за дополнительных затрат по ее реализации каждая новая единица продукции дает фирме меньшую прибыль, чем предыдущая и получаемая прибыль задается формулой:  $F = 25(x_1)^{0,9} + 40(x_2)^{0,9} + 30(x_3)^{0,9}$ .

В этом случае зависимость прибыли от объемов выпуска уже не является линейной функцией.

Поскольку основные ограничения задачи не изменились, будем использовать предыдущую модель задачи ЛП, для этого:

1. Скопируйте на новый рабочий лист модель задачи.
2. Задайте начальные значения в ячейках B10:D10, равные 1.
3. Введите в ячейку B11, где рассчитывается прибыль, новую формулу:  $=B8*МАКС(0;B10)^{0,9}+C8*МАКС(0;C10)^{0,9}+D8*МАКС(0;D10)^{0,9}$ .

4. Поменяйте в окне Поиск решения метод задачи (метод ОПГ) и после выполнения решения сохраните отчет по устойчивости.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Расчет оптимального плана фирмы (ЛП)						
2							
3	Вид ресурса	Нормы расхода ресурсов			Расход	Знак	Наличие ресурса
4		Изделие 1	Изделие 2	Изделие 3			
5	Сырье	5	6	4	367,59	<=	400
6	Оборудование	4	7	6	350,00	<=	350
7	Труд	6	8	5	457,35	<=	480
8	Удельная прибыль	25	40	30			
9							
10	Выпуск	46,66	19,04	5,01			
11	Прибыль	1489,55					

Рис.11. Модель задачи

Если в решении задачи 1 не полностью использовался лишь первый ресурс (сырье), то теперь к нему добавился еще один ресурс (труд). Оценка ресурса оборудование (множитель Лагранжа) показывает, что увеличение на единицу наличного объема этого ресурса приведет к увеличению прибыли на 3,83 руб.

С вычислительной точки зрения задачи НП

Ячейки переменных			
Ячейка	Имя	Окончательное значение	Приведенный градиент
\$B\$10	Выпуск Изделие 1	46,66	0
\$C\$10	Выпуск Изделие 2	19,04	0
\$D\$10	Выпуск Изделие 3	5,01	0

Ограничения			
Ячейка	Имя	Окончательное значение	Лагранжа множитель
\$E\$5	Сырье Расход	367,59	0
\$E\$6	Оборудование Расход	350,00	3,830268143
\$E\$7	Труд Расход	457,35	0

намного сложнее, чем задачи ЛП. Сообщение о том, что найдено оптимальное решение не всегда соответствует действительности, оно появляется, как только программа на каком-то шаге найдет стационарную точку целевой функции или близкую к ней в пределах заданной точности точку.

И если в задачах ЛП найденное решение всегда будет *глобально оптимальным*, то в задачах НП можно найти и *локально оптимальное решение*, наилучшего лишь среди близких к ней допустимых точек.

### Пример 6. Решение транспортной задачи

Пусть имеется 5 пунктов отправления, в которых сосредоточены запасы некоторого груза и 5 пунктов назначения, куда необходимо перевезти груз. Стоимость перевозки единицы продукции из  $i$ -го пункта отправления в  $j$ -ый пункт назначения  $c_{ij}$  приведена в таблице. В  $i$ -ой строке таблицы указано количество груза в пункте отправления, а в  $j$ -ом столбце – количество груза, который должен быть перевезен в пункт назначения. Необходимо *составить план перевозок* по доставке продукции в пункты назначения, *минимизирующий суммарные транспортные расходы*.

Требуется решить две задачи: *сбалансированную* и *несбалансированную*. Если в таблице даны две строки –  $b_j$  (два столбца –  $a_i$ ) для количества груза, то *первая строка* (первый столбец) относится к *сбалансированной задаче*, *вторая строка / второй столбец к несбалансированной*.

	Стоимость перевозки единицы груза						
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$		
$A_1$	10	5	7	6	3	28	24
$A_2$	2	8	1	2	5	50	50
$A_3$	5	2	3	2	7	10	10
$A_4$	2	1	2	10	8	20	20
$A_5$	3	7	1	4	5	15	12
$b_j$	2	30	24	25	42		

### Сбалансированная задача

1. Введем исходные данные в таблицу листа Ms Excel и удалим данные для несбалансированной задачи (в столбце H):

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Стоимость перевозки единицы груза						
2		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$	
3	$A_1$	10	5	7	6	3	28	
4	$A_2$	2	8	1	2	5	50	
5	$A_3$	5	2	3	2	7	10	
6	$A_4$	2	1	2	10	8	20	
7	$A_5$	3	7	1	4	5	15	
8	$b_j$	2	30	24	25	42		

2. Скопируем таблицу, переименуем, очистим данные и введем формулы вычисления

сумм по столбцам (в пунктах назначения) и строкам (в пунктах отправления):

I	J	K	L	M	N	O	P	Q
		Количество перевозимого груза						
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$	
	$A_1$						=СУММ(K3:O3)	
	$A_2$						0	
	$A_3$						0	
	$A_4$						0	
	$A_5$						0	
	$b_j$	=СУММ(K3:K7)	0	0	0	0		
							min F(X)=	=СУММПРОИЗВ(B3:F7;K3:O7)

3. Вызовем средство Поиск решения командой *Данные* → *Поиск решения* и заполним его параметры. В итоге получим план перевозок, показанный на рисунке ниже.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1		Стоимость перевозки единицы груза									Количество перевозимого груза						
2		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$				$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$	
3	$A_1$	10	5	7	6	3	28			$A_1$	-	-	-	-	28	28	
4	$A_2$	2	8	1	2	5	50			$A_2$	2	-	9	25	14	50	
5																10	
6																20	
7																15	
8																42	
9																	
10																	
11																	
12																	
13																	
14																	
15																	
16																	
17																	
18																	
19																	
20																	
21																	

Параметры поиска решения

Оптимизировать целевую функцию:

До: ☐ Максимум ☒ Минимум ☐ Значения:

Изменяя ячейки переменных:

В соответствии с ограничениями:

☒ Сделайте переменные без ограничений неотрицательными

Добавить Изменить Удалить Сбросить Загрузить/сохранить

### Несбалансированная задача

- Скопируем предыдущее решение задачи на новый лист.
- Скопируем столбец, крайний справа, из исходных данных и удалим данные столбца G.
- Рассчитаем разницу в потребностях и запасах – яч. G10. Так как суммарно в пунктах отправления товара меньше (116), чем требуется пунктам назначения (123), введем фиктивного пункт отправления A6, у которого будет находиться фиктивный товар, равный 7 единицам:  
 $123 - 116 = 7$ .
- Введем значения стоимости в фиктивном пункте выше текущих, чтобы распределение поставок в них было по остаточному принципу.

5. Преобразуем формулы таблицы слева:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Стоимость перевозки единицы груза						
2		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$		$a_i$
3	$A_1$	10	5	7	6	3		24
4	$A_2$	2	8	1	2	5		50
5	$A_3$	5	2	3	2	7		10
6	$A_4$	2	1	2	10	8		20
7	$A_5$	3	7	1	4	5		12
8	$b_j$	2	30	24	25	42	123	116
9								
10					разница		7	
11								

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1		Стоимость перевозки единицы груза									Количество перевозимого груза						
2		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$		$a_i$			$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$		$a_i$
3	$A_1$	10	5	7	6	3		24		$A_1$						0	
4	$A_2$	2	8	1	2	5		50		$A_2$						0	
5	$A_3$	5	2	3	2	7		10		$A_3$						0	
6	$A_4$	2	1	2	10	8		20		$A_4$						0	
7	$A_5$	3	7	1	4	5		12		$A_5$						0	
8	$A_6$	100	100	100	100	100		7		$A_6$						0	
9	$b_j$	2	30	24	25	42	123	123		$b_j$	0	0	0	0	0		
10																	
11							разница	0			=СУММ(K3:K8)					min F(X)=	=СУММПРОИЗВ(B3:F8;K3:O8)-СУММПРОИЗВ(K8:O8;B8:F8)
12																	

6. Решим задачу средством Поиск решения аналогично предыдущей, расширив параметры:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1		Стоимость перевозки единицы груза									Количество перевозимого груза						
2		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$		$a_i$			$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$		$a_i$
3	$A_1$	10	5	7	6	3		24		$A_1$	-	-	-	-	24	24	
4	$A_2$	2	8	1	2	5		50		$A_2$	2	-	17	25	6	50	
5	$A_3$	5	2	3	2	7		10		$A_3$	-0	10	-	0	-	10	
6	$A_4$	2	1	2	10	8		20		$A_4$	-0	20	-	-	-	20	
7	$A_5$	3	7	1	4	5		12		$A_5$	-	-	7	-	5	12	
8	$A_6$	100	100	100	100	100		7		$A_6$	-	-	-	-	7	7	
9	$b_j$	2	30	24	25	42	123	123		$b_j$	2	30	24	25	42		
10																	
11							разница	0			=СУММ(K3:K8)					min F(X)=	245,0
12																	

Параметры поиска решения

Оптимизировать целевую функцию: \$Q\$11

До: ☐ Максимум ☒ Минимум ☐ Значения

Изменяя ячейки переменных: \$K\$3:\$O\$8

В соответствии с ограничениями:

\$K\$9:\$O\$9 = \$B\$9:\$F\$9  
 \$P\$3:\$P\$8 = \$H\$3:\$H\$8