

## Практическая работа

### Математические методы построения эффективности систем. Методы оптимизации

#### Цели работы

Целью работы является ознакомление с методами построения математических моделей в задачах оптимизации и решение их средствами пакета *LibreOffice Calc*.

#### Теоретические сведения

Чтобы найти оптимальное решение задачи, необходимо:

1. Провести содержательный анализ задачи.
2. Создать математическую модель, отражающую наиболее существенные черты моделируемой ситуации.
3. Построить компьютерную модель.
4. Выполнить анализ полученных результатов.

Постановка оптимизационной задачи состоит из следующих этапов.

1. *Определение переменных* или величин, которые являются искомыми параметрами альтернатив. Каждая из таких величин обозначается в виде переменной с индексом:  $x_1, x_2$  и т.д., а весь набор переменных (альтернатива) – в виде вектора  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , где  $n$  – общее число переменных. В качестве переменных могут выступать планы выпуска продукции, размер инвестиций и другие показатели.
2. *Определение ограничений*. После описания переменных задачи необходимо указать, какие значения они могут принимать. Множество допустимых значений задается в виде одного или нескольких ограничений на их значения, которые записываются в виде соотношений типа равенств или неравенств:

$$g_i(x_1, \dots, x_n) \leq \{ \geq, = \} b_i, i=1, \dots, m.$$

В левой части ограничения стоит некоторая функция  $n$  переменных  $g_i$ , а в правой части – величина  $b_i$ .

Часть ограничений обычно составляют граничные условия на значения переменных вида  $x_j \leq \{ \geq \} d_j$ , наиболее распространенным из них является условие неотрицательности переменных:  $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ .

3. *Задание целевой функции*. С ее помощью можно сравнить между собой различные альтернативы и определить какая из них лучше. Если решается задача максимизации целевой функции  $F$  и сравниваются две альтернативы  $x = (x_1, \dots, x_n)$  и  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , то считается  $x$  лучше  $y$ , если  $F(x) > F(y)$ .

*Общая задача оптимизации* обычно записывается в таком виде:

$$\begin{aligned} F(x) &\rightarrow \max (\min), \\ g_i(x) &\leq b_i, i=1, \dots, m. \\ x &\in \Omega. \end{aligned}$$

Здесь  $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$  –  $n$ -мерный вектор переменных (решение, альтернатива, план и т.д.);  $F(x)$  – целевая функция;  $g_i(x)$  – функции, задающие левую часть ограничений общего вида;  $b_i$  – компоненты вектора правой части ограничений общего вида;  $\Omega$  – фиксированное множество в  $n$ -мерном векторном пространстве  $R^n$ , задающее дополнительные условия на область изменения переменных. Обычно  $\Omega = \{x \geq 0\}$  или  $\Omega = \{d_{\max} \geq x \geq d_{\min}\}$ , где  $d_{\max}$  и  $d_{\min}$  – соответственно векторы верхних и

нижних границ на переменные.

Вектор  $x = (x_1, \dots, x_n)$  называется *допустимым решением* или *планом* задачи оптимизации, если он удовлетворяет всем ее ограничениям.

Допустимое решение называется оптимальным решением или оптимальным планом, если оно является наилучшим, т.е. доставляет оптимум целевой функции  $F$  на множестве всех допустимых решений  $X$ .

Иными словами  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$  – оптимальный план, если для любого плана  $x = (x_1, \dots, x_n)$  выполнено условие  $F(x^*) \geq F(x)$  в задаче максимизации целевой функции или  $F(x^*) \leq F(x)$  в задаче минимизации на множестве допустимых планов  $X$ .

Величина  $F(x^*)$  называется оптимальным значением целевой функции или значением задачи оптимизации.

В зависимости от характера функций и условий, накладываемых на переменные, приведенная выше задача может относиться к одному из трех основных типов конечномерных задач оптимизации: *линейного программирования* (ЛП), *целочисленного программирования* (ЦП) и *нелинейного программирования* (НП).

### Решение задач линейного программирования

В задаче ЛП все ограничения и целевая функция линейны. Ее можно записать в виде:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max(\min), \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, \quad i=1, \dots, m \\ x_j &\geq 0, \quad j=1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Систему ограничений на задачу можно представить следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1; \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m. \end{cases}$$

Для решения задачи ЛП используется симплекс-метод. Он представляет собой итеративную процедуру, на каждом шаге которой находится вершина многогранника допустимых планов с большим значением целевой функции, чем в вершине, полученной на предыдущем шаге. Если задача имеет оптимальный план, то он в ЛП служит оценки общих ограничений – решение двойственной задачи.

### Методика выполнения работы

Задания для самостоятельной работы состоят из двух задач и распределены по вариантам.

Первая задача является задачей линейного программирования и ее решение в некоторых случаях возможно по алгоритмам *примеров 1-4*.

Вторая задача – транспортная, ее решение описано в *примере 6*.

#### Пример 1. Задача нахождения оптимального производственного плана

Для изготовления трех видов изделий фирма расходует три вида ограниченных ресурсов (сырье, оборудование и труд) в количествах, представленных в таблице ниже. Здесь же указаны нормы расхода ресурсов и удельная прибыль (от реализации одного изделия каждого вида продукции). Предполагается, что расход ресурсов и величина

прибыли являются линейными функциями от объемов выпускаемой продукции. Требуется найти план выпуска продукции, обеспечивающий получение максимальной прибыли от продажи выпущенных изделий.

Таблица 1

Исходные данные задачи

Вид ресурса	Нормы расхода ресурсов			Наличие ресурса
	Изделие 1	Изделие 2	Изделие 3	
Сырье (кг)	5	6	4	400
Оборудование (станко/ч)	4	7	6	350
Труд (чел/ч)	6	8	5	480
Удельная прибыль (руб)	25	40	30	

## 1. Создание математической модели задачи

Фирме нужно определить план выпуска продукции, поэтому математическая модель должна содержать три переменные:  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ , где  $x_j$  – объем выпуска  $j$ -го изделия. Весь план выпуска изделий можно записать в виде вектора  $x = (x_1, x_2, x_3)$ .

Этот план можно выполнить лишь тогда, когда он будет обеспечен необходимым количеством ресурсов, т.е. в модели должно быть ограничение вида:

расход ресурса  $\leq$  наличие ресурса.

Чтобы определить его аналитический вид, вычислим затраты сырья на выпуск плана  $x$ : для выпуска  $x_1$  единиц Изделия 1 нужно затратить  $5x_1$  (кг). Учет затрат на изделия 2 и 3 показывает, что общий расход сырья равен:  $5x_1 + 6x_2 + 4x_3$ . Так как его запас ограничен 400 кг, то ограничение по сырью имеет вид:

$$5x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 400 \text{ (сырье).}$$

Ограничениями по другим ресурсам будут:

$$4x_1 + 7x_2 + 6x_3 \leq 350 \text{ (оборудование)}$$

$$6x_1 + 8x_2 + 5x_3 \leq 480 \text{ (труд).}$$

Кроме ресурсных ограничений должно выполняться условие неотрицательности переменных. Будем считать, что объемы выпуска могут быть как целыми, так и дробными значениями. Пусть  $x = (x_1, x_2, x_3)$  – некоторый вектор выпуска. Прибыль  $F$  от продажи этой продукции вычисляется по формуле:

$$F = 25x_1 + 40x_2 + 30x_3.$$

Так как в отношении прибыли должно быть применено условие ее максимума, то математическая модель задачи имеет следующий вид:

$$F = 25x_1 + 40x_2 + 30x_3 \rightarrow \max,$$

$$5x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 400$$

$$4x_1 + 7x_2 + 6x_3 \leq 350$$

$$6x_1 + 8x_2 + 5x_3 \leq 480$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

## 2. Решение задачи средствами пакета *LibreOffice Calc*

А). Разместим исходную информацию на рабочем листе.

Диапазон ячеек B10:D10 отведем под изменяемые ячейки, в нем будут находиться значения переменных.

	B	C	D	E	F	G	H
1							
2							
3	Вид ресурса	Нормы расхода ресурсов			Расчет ресурсов		Запас ресурсов
4		Изделие 1	Изделие 2	Изделие 3			
5	Сырье (кг)	5	6	4	0	<=	400
6	Оборудование (станко/ч)	4	7	6	0	<=	350
7	Труд (чел/ч)	6	8	5	0	<=	480
8	Удельная прибыль (руб)	25	40	30	0	<=	
9							
10							
11	=СУММПРОИЗВ(C10:E10;C8:E8)				Выпуск		
12					Прибыль		

Рис.1. Модель задачи

В). Введем формулы для целевой функции и ограничений.

Так как все параметры модели линейны, удобно использовать функцию СУММПРОИЗВ. При расчете прибыли в ячейку C11 необходимо будет ввести: =СУММПРОИЗВ (B8:D8;C8:E8). Для расчета ресурсных ограничений в ячейки F5:F7 вводятся аналогичные формулы, например, в ячейке F5 имеем: =СУММПРОИЗВ (C5:E5; \$C\$10:\$E\$10).

С). Сформируем модель в средстве «Решатель».

Для этого необходимо сделать активной целевую ячейку C11, выполнить команду меню: Сервис → Решатель. Заполнить данные как указано на рисунке ниже.

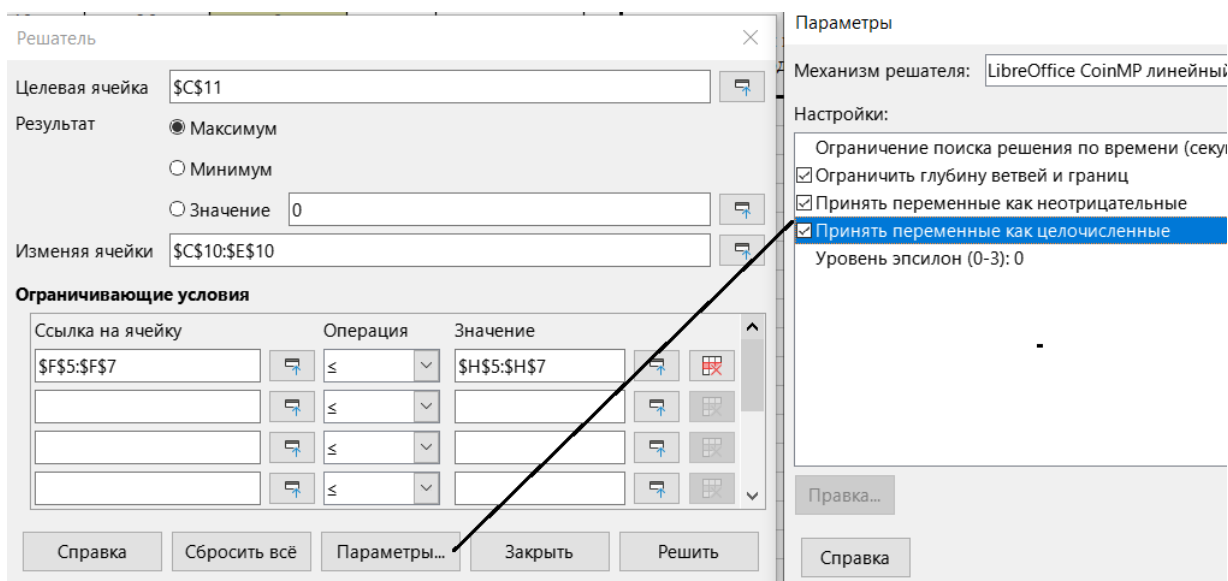


Рис. 2. Модель задачи в окне Решатель

D). Найдем оптимальное решение.

Для этого нажмите кн. Найти решение. Нажмите кн. ОК.

	B	C	D	E	F	G	H
1							
2							
3	Вид ресурса	Нормы расхода ресурсов			Расчет ресурсов		Запас ресурсов
4		Изделие 1	Изделие 2	Изделие 3			
5	Сырье (кг)	5			=СУММПРОИЗВ(C5:E5;\$C\$10:\$E\$10)		
6	Оборудование (станко/ч)	4	7	6	350	<=	350
7	Труд (чел/ч)	6	8	5	480	<=	480
8	Удельная прибыль (руб)	25	40	30	2120	<=	
9							
10		56	18	0	Выпуск		
11		2120			Прибыль		
12							
13							

Рис. 3. Решение задачи

## Пример 2. Решение задач целочисленного программирования

Для многих производств экономически осмысленны только целочисленные значения полученных решений, к ним можно отнести в частности, объемы выпуска штучных товаров.

С точки зрения решения такой задачи в *Libre Calc* отличие заключается в том, что при задании ограничений в окне *Решатель* необходимо указать какие переменные могут принимать только целые значения.

### Задача составления скользящих графиков

Такие графики обычно связаны с расписаниями многосменной работы предприятия в условиях нестационарного спроса на товары или услуги, связанные с деятельностью этого предприятия. Задача состоит в том, чтобы организовать расписание обслуживания клиентов таким образом, чтобы издержки от неравномерности спроса были бы минимальны.

В таблице 2 приведено число продавцов, необходимых для удовлетворения покупательского спроса в зале магазина. *Требуется так организовать расписание работы продавцов, чтобы их общее количество (то есть расходы на оплату их труда) было минимальным.*

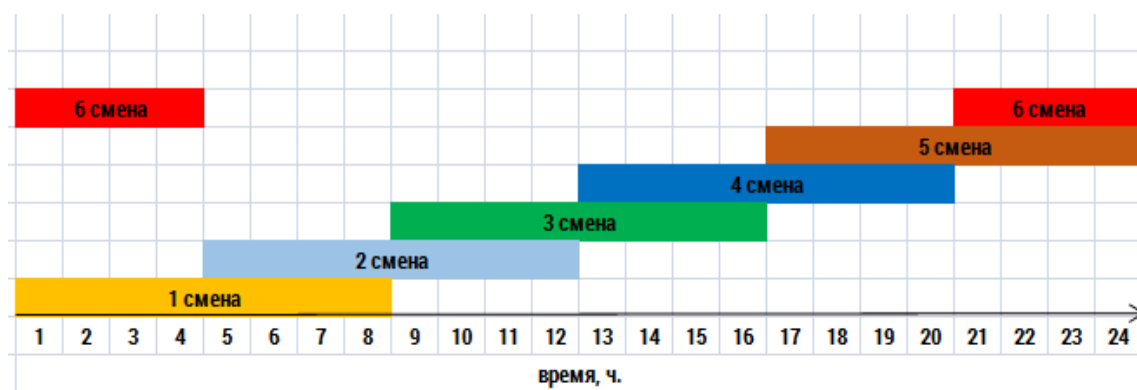
Пусть продавцы в магазине работают по 8 часов. В соответствии с данными задачи, число продавцов меняется через 4 часа. Если предположить, что в первую смену работает  $x_1$  продавцов, во вторую –  $x_2$  и т. д., то график работы продавцов представим на рисунке 5.

Таблица 2

Требуемое количество продавцов

Время суток	0–4	4–8	8–12	12–16	16–20	20–24
Требуемое кол-во продавцов	2	2	5	7	7	4

Рис. 5. График работы продавцов



Жирные линии – это смены, они начинаются через 4 часа и продолжаются 8 часов. Смены перекрываются, т. е., с 5 до 8 часов в зале присутствуют  $(x_1 + x_2)$  продавцов, с 9 до 12 часов –  $(x_2 + x_3)$  продавцов, а с 13 часов до 4 часов работают  $(x_1 + x_6)$  продавцов.

Этот «скользящий» график и образует расписание смен,  $x_1 \div x_6$  определяют изменяемые переменные, которые следует определять из условия минимального общего количества продавцов, т. е. *целевая функция* в этой задаче определяется выражением:  $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) \rightarrow \min$ .

В качестве *ограничений* будут выступать условия:  $x_1 + x_6 \geq 2$ ;  $x_1 + x_2 \geq 2$ ;  $x_2 + x_3 \geq 5$ ;  $x_3 + x_4 \geq 7$ ;  $x_4 + x_5 \geq 7$ ;  $x_5 + x_6 \geq 4$ .

Кроме того,  $x_1 \div x_6$  должны быть целыми и положительными. Модель задачи представлена на рисунке 6.

Отдельно следует упомянуть, что интервал, с которым смены перекрываются, вычисляется из условия задачи – каждые 4 часа меняется потребность в продавцах. Если бы этот показатель был 2 часа, то смены следовало бы запускать каждые 2 часа.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2			Номер смены	Начало смены	Кол-во продавцов в смене	Кол-во продавцов в зале	Требуемое кол-во продавцов	
3			1	0	1	=E3+E8	2	
4			2	4	1	2	2	
5			3	8	1	2	5	
6			4	12	1	2	7	
7			5	16	1	2	7	
8			6	20	1	2	4	
9						Всего продавцов:	=СУММ(F3:F8)	

Решатель

Целевая ячейка

\$G\$9

Результат

☐ Максимум
 ☒ Минимум
 

☐ Значение
 

0

Изменяя ячейки

solver\_rhs2

Ограничивающие условия

Ссылка на ячейку	Операция	Значение
\$F\$3:\$F\$8	$\geq$	\$G\$3:\$G\$8
	$\leq$	
	$\leq$	
	$\leq$	

Справка

Сбросить всё

Параметры...

Закрыть

Решить

Параметры

Механизм решателя:

LibreOffice CoinMP линейный ре

Настройки:

Ограничение поиска решения по времени (секунд):

☒ Ограничить глубину ветвей и границ
 ☒ Принять переменные как неотрицательные
 ☒ Принять переменные как целочисленные
 

Уровень эпсилон (0-3): 0

Правка...

Справка

Рис. 6. Модель задачи составления скользящих графиков

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2			Номер смены	Начало смены	Кол-во продавцов в смене	Кол-во продавцов в зале	Требуемое кол-во продавцов
3			1	0	0	=E3+E8	2
4			2	4	3	3	2
5			3	8	2	5	5
6			4	12	5	7	7
7			5	16	2	7	7
8			6	20	2	4	4
9						Всего продавцов:	28

Рис. 7. Решение задачи составления скользящих графиков

### Пример 3. Задача логического выбора (с двоичными переменными)

Этот класс задач связан с выбором конкретных вариантов организации системы с учетом ресурсных ограничений. Как правило, в них используются изменяемые ячейки, которые могут хранить одно из двух значений – 1 или 0, иначе «выбирать вариант организации» или «не выбирать».

Выбор одного из двух вариантов организации исследуемой системы может определяться двумя булевыми переменными ( $x_1, x_2$ ). Условие выбора только одного из двух вариантов эквивалентно ограничению:  $x_1 + x_2 = 1$ . Такое ограничение моделирует условие взаимоисключения.

Условие выбора хотя бы одного из двух вариантов эквивалентно логическому ограничению  $x_1 + x_2 \geq 1$ .

Если вариант 2 может быть принят только при принятии варианта 1 (взаимообусловленность), тогда следует использовать ограничение  $x_1 \geq x_2$ . Если же вариант 2 принимается при принятии варианта 1, то вводится ограничение  $x_2 \geq x_1$ . В качестве примера рассмотрим задачу выбора *варианта капиталовложений*.

Рассматриваются *пять проектов*, которые могут быть осуществлены в течение *трех лет*. Ожидаемые величины прибыли от реализации проектов и распределение необходимых капиталовложений по годам (в тыс. долл.) приведены в табл.3. Требуется выбрать совокупность проектов, которой соответствует максимуму общей прибыли.

Таблица 3

Проект	Распределение капиталовложений			Прибыль
	Год 1	Год 2	Год 3	
1	5	1	8	20
2	4	7	10	40
3	3	9	2	20
4	7	4	10	15
5	8	6	1	30
Мах объем вложений	25	25	25	

Добавим к таблице исходных данных столбец изменяемых ячеек. Обозначим содержимое этих ячеек как  $x_i$ , где  $i = 1, 2, \dots, 5$  определяет номер проекта, а  $x_i$  определяет решение: вкладывать ( $x_i = 1$ ) или нет ( $x_i = 0$ ) средства в  $i$ -ый проект.

Ограничениями задачи будут:

*По объему капиталовложений*

$$\text{в первый год: } 5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 7 \cdot x_4 + 8 \cdot x_5 \leq 25;$$

$$\text{во второй год: } 1 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 + 9 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 + 6 \cdot x_5 \leq 25;$$

$$\text{в третий год: } 8 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 10 \cdot x_4 + 1 \cdot x_5 \leq 25;$$

*Естественные ограничения:* ( $x_1 \div x_5$ ) – двоичные (булевыские)

*Целевая функция:*  $Z = 20 \cdot x_1 + 40 \cdot x_2 + 20 \cdot x_3 + 15 \cdot x_4 + 30 \cdot x_5 \rightarrow \max.$



	A	B	C	D	E	F
1	Проект	Распределение капиталовложений			Прибыль	Выбор проекта (1-да, 0-нет)
2		Год 1	Год 2	Год 3		
3	1	5	1	8	20	1
4	2	4	7	10	40	1
5	3	3	9	2	20	1
6	4	7	4	10	15	1
7	5	8	6	1	30	1
8	Реальный объем вложений	27	27	31	=СУММПРОИЗВ(E3:E7;\$F\$3:\$F\$7)	
9	Максимальный объем вложений	25	25	25		

	A	B	C	D	E	F
1	Проект	Распределение капиталовложений			Прибыль	Выбор проекта (1-да, 0-нет)
2		Год 1	Год 2	Год 3		
3	1	5	1	8	20	1
4	2	4	7	10	40	1
5	3	3	9	2	20	1
6	4	7	4	10	15	1
7	5	8	6	1	30	1
8	=СУММПРОИЗВ(B3:B7;\$F\$3:\$F\$7)			31	Прибыль	125
9	Максимальный объем вложений	25	25	25		

Решатель

Целевая ячейка: \$F\$8

Результат: ☒ Максимум  
☐ Минимум  
☐ Значение: 0

Изменяя ячейки: \$F\$3:\$F\$7

Ограничивающие условия

Ссылка на ячейку	Операция	Значение
\$B\$8:\$D\$8	≤	\$B\$9:\$D\$9
\$F\$3:\$F\$7	Двоичное	
	≤	
	≤	

Справка Сбросить всё Параметры... Заккрыть Решить

Рис.8. Модель задачи логического выбора

	A	B	C	D	E	F
1	Проект	Распределение капиталовложений			Прибыль	Выбор проекта (1-да, 0-нет)
2		Год 1	Год 2	Год 3		
3	1	5	1	8	20	1
4	2	4	7	10	40	1
5	3	3	9	2	20	1
6	4	7	4	10	15	0
7	5	8	6	1	30	1
8	Реальный объем вложений	20	23	21	Прибыль	110
9	Максимальный объем вложений	25	25	25		

Рис.9. Решение задачи логического выбора



### Пример 4. Задача оптимизации инвестиций

Основная цель решения этого класса задач – найти оптимальное распределение финансовых средств, доставляющее максимальную прибыль по истечении срока действия инвестиционного проекта.

Денежные средства могут быть использованы для финансирования двух проектов. Проект *A* гарантирует получение прибыли в размере 70 центов на вложенный доллар через год. Проект *B* гарантирует получение прибыли в размере 2 долларов на каждый инвестированный доллар, но через два года. При финансировании проекта *B* период инвестиций должен быть кратным двум годам. Как следует распорядиться капиталом в 100 000 долларов, чтобы максимизировать суммарную величину прибыли, которую можно получить через три года после начала инвестиций?

Содержимое изменяемых ячеек:

$X_a, Y_a$  – вложения в проект *A*;  $X_b, Y_b$  – вложения в проект *B*.

Возможные инвестиции могут быть проиллюстрированы схемой, приведенной на рисунке ниже.

Из схемы следует, что в исследуемой системе существуют только два возможных срока вложений – начало первого года и начало второго года. Суммы вложений в эти сроки определяют содержимое изменяемых ячеек. «Точка вложений» в начале третьего года одна, в нее вкладываются все доходы от предыдущих вложений.

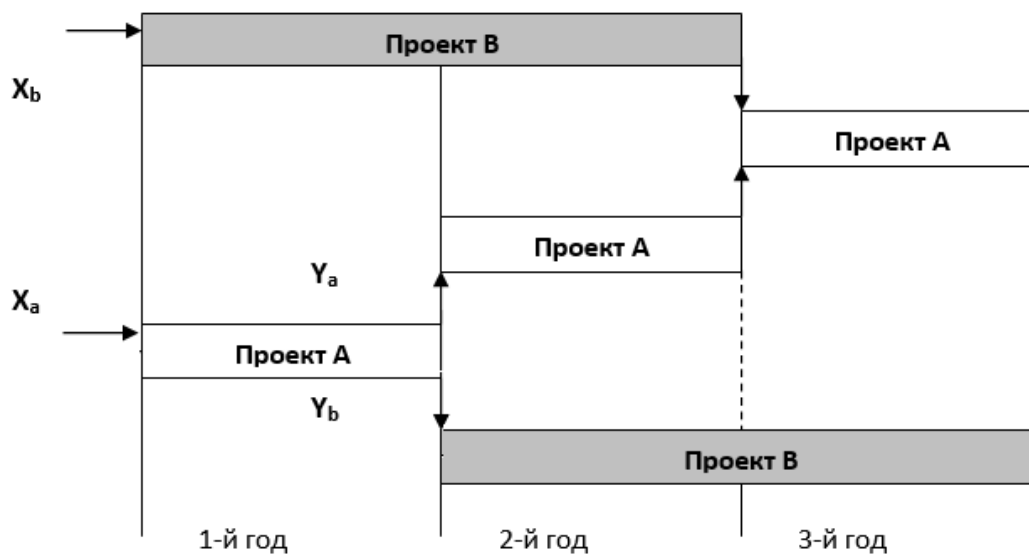


Схема инвестиций в проекты A и B

Ограничения:

$$x_a + x_b = 100\,000; \quad y_a + y_b = (1 + 0,7) \cdot x_a.$$

Целевая функция:

$$z = y_a \cdot (1 + 0,7) \cdot 2 + y_b \cdot (1 + 2) + x_b \cdot (1 + 2) \cdot (1 + 0,7) \rightarrow \max.$$

Решение задачи представлено на рисунке ниже.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			1 год		2 год		3 год	
2		<u>Коеф-т</u>	начало	<u>оконч</u>	начало	<u>оконч</u>	начало	<u>оконч</u>
3	<u>A</u>	0,7	1	=C3*(1+B3)	1	=E3*(1+B3)	=F5	=G3*(1+B3)
4	<u>B</u>	2	1		1	=C4*(1+B4)		=E4*(1+B4)
5	Итого		2	0	2	=СУММ(F3:F4)	0	=СУММ(H3:H4)
6						первоначальное вложение		100000
7								

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1			1 год		2 год		3 год		
2		<u>Коеф-т</u>	начало	<u>оконч</u>	начало	<u>оконч</u>	начало	<u>оконч</u>	
3	<u>A</u>	0,7	100000	170000	0	0	0	0	
4	<u>B</u>	2	0		170000	0		510000	
5	Итого		100000	170000	170000	0	0	510000	
6						первоначальное вложение		100000	

Решатель

Целевая ячейка: \$K\$21

Результат: ☒ Максимум ☐ Минимум ☐ Значение 0

Изменяя ячейки: \$C\$3:\$C\$4;\$E\$3:\$E\$4

Ограничивающие условия

Ссылка на ячейку	Операция	Значение
\$C\$5	=	\$H\$6
\$D\$5	=	\$E\$5
\$F\$5	=	solver_rh3
	≤	

Справка Сбросить всё Параметры... Заккрыть Решить

Параметры

Механизм решателя: LibreOffice CoinMP линейный решатель

Настройки:

Ограничение поиска решения по времени (секунд): 2147483647

☒ Ограничить глубину ветвей и границ

☒ Принять переменные как неотрицательные

☐ Принять переменные как целочисленные

Уровень эпсилон (0-3): 0

Правка...

Справка

OK

Модель задачи об инвестициях

### Пример 5. Решение транспортной задачи

Пусть имеется 5 пунктов отправления, в которых сосредоточены запасы некоторого груза и 5 пунктов назначения, куда необходимо перевезти груз. Стоимость перевозки единицы продукции из  $i$ -го пункта отправления в  $j$ -ый пункт назначения  $c_{ij}$  приведена в таблице. В  $i$ -ой строке таблицы указано количество груза в пункте отправления, а в  $j$ -ом столбце – количество груза, который должен быть перевезен в пункт назначения. Необходимо *составить план перевозок* по доставке продукции в пункты назначения, *минимизирующий суммарные транспортные расходы*.

Требуется решить две задачи: *сбалансированную* и *несбалансированную*. Если в таблице даны две строки –  $b_j$  (два столбца -  $a_i$ ) для количества груза, то *первая строка* (первый столбец) относится к *сбалансированной* задаче, *вторая строка* / *второй столбец* к *несбалансированной*.

	Стоимость перевозки единицы груза					$a_i$	
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$		
$A_1$	10	5	7	6	3	28	24
$A_2$	2	8	1	2	5	50	50
$A_3$	5	2	3	2	7	10	10
$A_4$	2	1	2	10	8	20	20
$A_5$	3	7	1	4	5	15	12
$b_j$	2	30	24	25	42		

### Сбалансированная задача

1. Введем исходные данные в таблицу листа и удалим данные для несбалансированной задачи (в столбце H):

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Стоимость перевозки единицы груза						
2		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$	
3	$A_1$	10	5	7	6	3	28	
4	$A_2$	2	8	1	2	5	50	
5	$A_3$	5	2	3	2	7	10	
6	$A_4$	2	1	2	10	8	20	
7	$A_5$	3	7	1	4	5	15	
8	$b_j$	2	30	24	25	42		

2. Скопируем таблицу, переименуем, очистим данные и введем формулы вычисления сумм по столбцам (в пунктах назначения) и строкам (в пунктах отправления):

I	J	K	L	M	N	O	P	Q
		Количество перевозимого груза						
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$a_i$	
	$A_1$						=СУММ(K3:O3)	
	$A_2$						0	
	$A_3$						0	
	$A_4$						0	
	$A_5$						0	
	$b_j$	=СУММ(K3:K7)	0	0	0	0		
							min F(X)=	=СУММПРОИЗВ(B3:F7;K3:O7)

3. Вызовем средство *Решатель* командой *Сервис* → *Решатель* и заполним его параметры. В итоге получим план перевозок, показанный на рисунке ниже.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1		Стоимость перевозки единицы груза									Количество перевозимого груза						
2		<b>B1</b>	<b>B2</b>	<b>B3</b>	<b>B4</b>	<b>B5</b>		<b>a<sub>i</sub></b>			<b>B1</b>	<b>B2</b>	<b>B3</b>	<b>B4</b>	<b>B5</b>		<b>a<sub>i</sub></b>
3	<b>A1</b>	10	5	7	6	3		24		<b>A1</b>						0	
4	<b>A2</b>	2	8	1	2	5		50		<b>A2</b>						0	
5	<b>A3</b>	5	2	3	2	7		10		<b>A3</b>						0	
6	<b>A4</b>	2	1	2	10	8		20		<b>A4</b>						0	
7	<b>A5</b>	3	7	1	4	5		12		<b>A5</b>						0	
8	<b>A6</b>	100	100	100	100	100		7		<b>A6</b>						0	
9	<b>b<sub>j</sub></b>	2	30	24	25	42	123	123		<b>b<sub>j</sub></b>	0	0	0	0	0		
10																	
11						разница	0				=СУММ(K3:K8)					min F(X)=	=СУММПРОИЗВ(B3:F8;K3:O8)- СУММПРОИЗВ(K8:O8;B8:F8)
12																	

6. Решим задачу командой *Сервис* → *Решатель* аналогично предыдущей:

Решатель

Целевая ячейка

\$Q\$11

Результат

☐ Максимум
 ☒ Минимум
 

☐ Значение
 

0

Изменяя ячейки

\$K\$3:\$O\$8

Ограничивающие условия

Ссылка на ячейку	Операция	Значение
\$K\$9:\$O\$9	=	\$B\$9:\$F\$9
\$P\$3:\$P\$8	=	\$H\$3:\$H\$8
	≤	
	≤	

Справка

Сбросить все

Параметры...

Закреть

Решить

Параметры

Механизм решателя:

LibreOffice CoinMP линейный решатель

Настройки:

Ограничение поиска решения по времени (секунд): 2147483647

☒ Ограничить глубину ветвей и границ
 ☒ Принять переменные как неотрицательные
 ☒ Принять переменные как целочисленные

Уровень эпсилон (0-3): 0

Правка...

Справка

OK

Отмена