

## Лабораторная работа №12

### «Вероятностные и числовые характеристики случайных процессов»

**Цель работы:** ознакомиться с методами измерения одномерных функций плотности вероятности (ФПВ) и функций распределения вероятностей (ФРВ), а также числовых характеристик случайных эргодических процессов на ПК.

Случайный процесс  $X(t)$  называется стационарным, в узком смысле, если его вероятностные характеристики не меняются с течением времени  $t$ , т.е. они не зависят от начала отсчёта времени.

Стационарный случайный процесс является эргодическим, если его вероятностные характеристики, найденные усреднением по множеству реализаций, равны его вероятностным характеристикам, найденным усреднением по времени, от одной, но бесконечно длинной реализации.

Функция распределения вероятностей:  $F(x) = p\{X(t_1) \leq x\}$

Функция плотности вероятности:

$$W(x) = \frac{dF(x)}{dx} \approx \frac{p\{x < X(t_1) \leq x + \Delta x\}}{\Delta x}$$

## Числовые характеристики случайной величины.

Математическое ожидание или среднее (по множеству) значение случайной величины:

$$m_1 = \bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot W(x) dx, \quad m_1 = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$$

Средняя полная мощность случайного процесса на единичном сопротивлении:

$$m_2 = \overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot W(x) dx, \quad m_2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i$$

Дисперсия, характеризующая среднюю мощность отклонения случайной величины от его среднего значения (средняя мощность переменной составляющей):

$$M_2 = \sigma^2 = m_2 - m_1^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)^2 \cdot W(x) dx, \quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - m_1)^2 \cdot p_i$$

Среднеквадратическое отклонение:

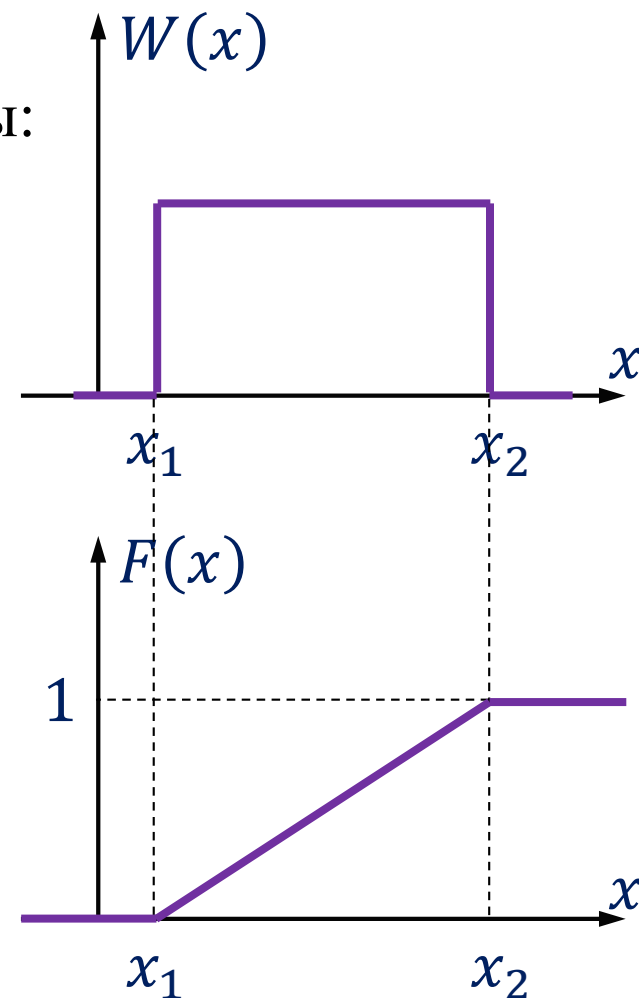
$$\sigma = \sqrt{D[X(t)]} = \sqrt{m_2 - m_1^2}$$

## Равномерное распределение.

ФПВ и ФРВ равномерного распределения соответственно равны:

$$W(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_1 \\ \frac{1}{x_2 - x_1}, & x_1 \leq x \leq x_2, \\ 0, & x \geq x_2 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_1 \\ \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, & x_1 \leq x \leq x_2 \\ 1, & x \geq x_2 \end{cases}$$



Математическое ожидание:

$$m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot W(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} x \cdot \frac{1}{x_2 - x_1} dx = \frac{1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} = \frac{x_2 + x_1}{2}$$

Если ФПВ имеет симметричный вид, то значение математического ожидания совпадает с положением оси симметрии.

Средняя полная мощность:

$$m_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot W(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} x^2 \cdot \frac{1}{x_2 - x_1} dx = \frac{1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_2^3 - x_1^3}{3} = \frac{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2}{3}$$

Дисперсия:

$$\sigma^2 = m_2 - m_1^2 = \frac{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2}{3} - \left( \frac{x_2 + x_1}{2} \right)^2 = \frac{(x_2 - x_1)^2}{12}$$

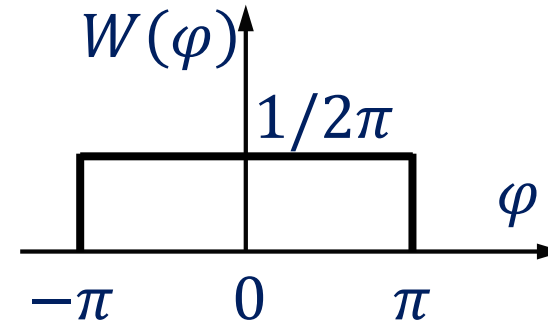
1. Рассчитать и построить графики ФПВ и ФРВ эргодического случайного процесса:

$$X(t) = A \cos(\omega t + \varphi), -\infty \leq t \leq \infty$$

Расчеты произвести для двух значений амплитуд  $A_1 = 0,8$  В и  $A_2 = 1,6$  В. Определить среднее значение этого процесса.

Случайная, равномерно распределенная на интервале  $(-\pi, \pi)$  фаза, имеет ФПВ:

$$W(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & |\varphi| \leq \pi \\ 0, & |\varphi| > \pi \end{cases}$$



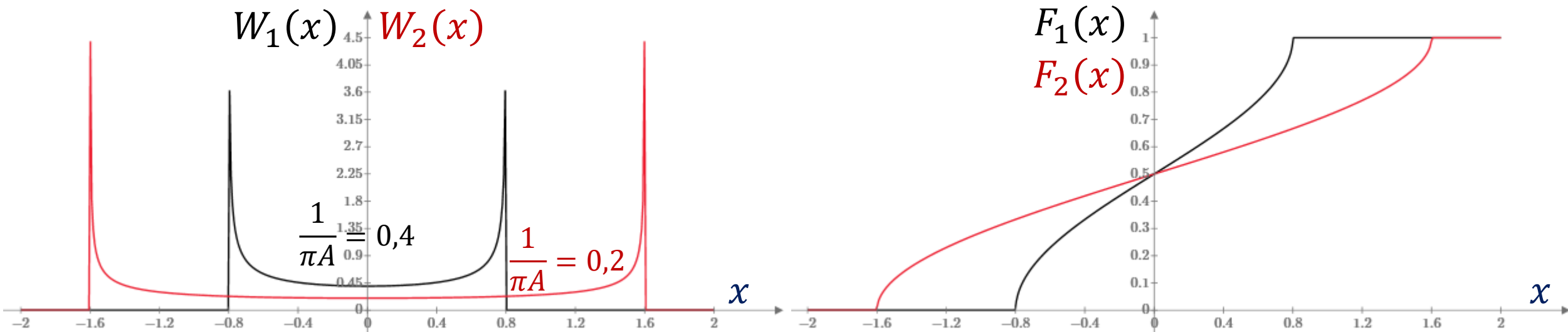
$$m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi \cdot W(\varphi) d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi \cdot \frac{1}{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \cdot \left( \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} \right) = 0$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)^2 \cdot W(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^2 \cdot \frac{1}{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \cdot \left( \frac{\pi^3}{3} - \frac{-\pi^3}{3} \right) = \frac{\pi^2}{3}$$

ФПВ и ФРВ сигнала  $X(t)$ :

$$W(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}, & |x| < A, \\ 0, & |x| \geq A \end{cases},$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -A \\ 0,5 + 1/\pi \cdot \arcsin\left(\frac{x}{A}\right) & |x| \leq A \\ 1, & x > A \end{cases}$$



$$m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot W(x) dx = \int_{-A}^A \frac{x}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}} dx = -\frac{\sqrt{A^2 - x^2}}{\pi} \Big|_{-A}^A = 0$$

2. Рассчитать и построить графики ФПВ и ФРВ эргодического нормального процесса с нулевым средним значением и  $\sigma_1 = 0,45$  В и  $\sigma_2 = 1,25$  В.

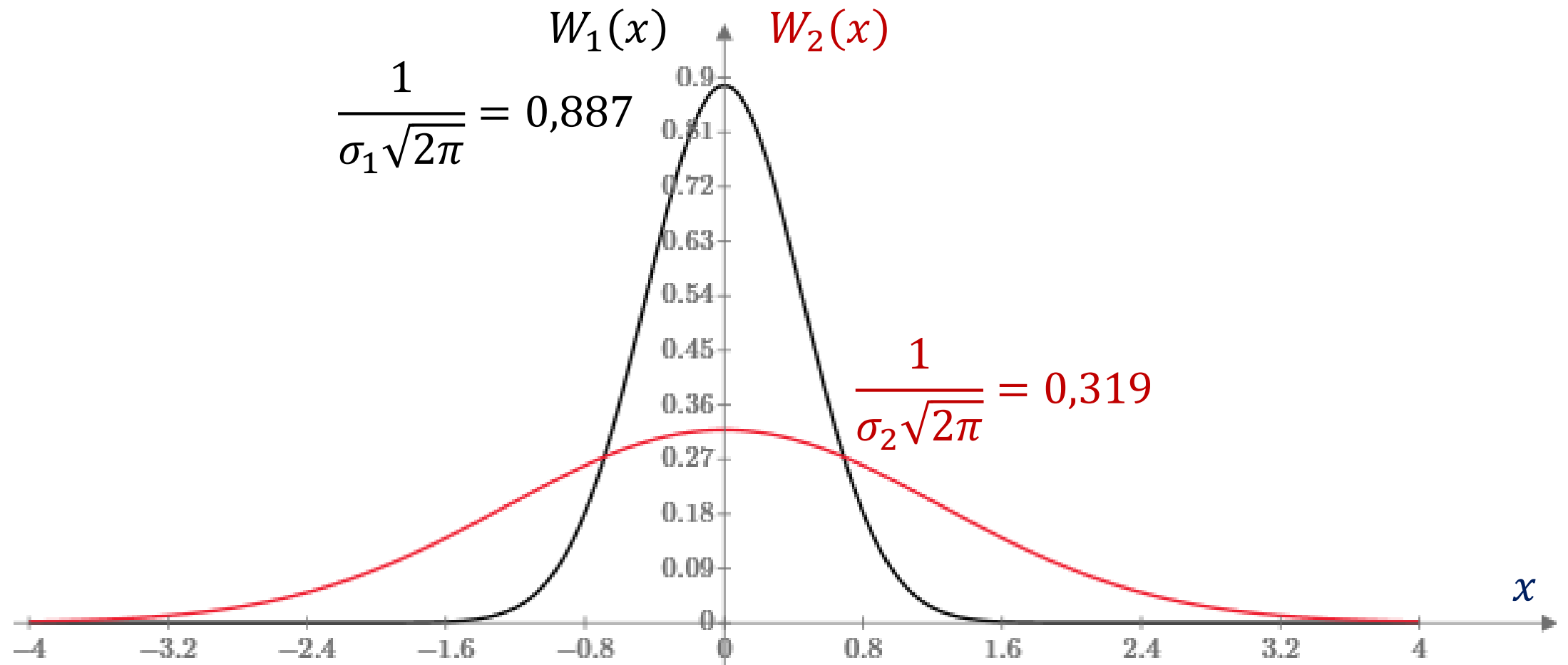
Одномерная ФПВ гауссовского случайного процесса (ГСП):

$$W(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma^2}}$$

По условию  $m_1 = 0$ , поэтому:

$$W_1(x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}$$

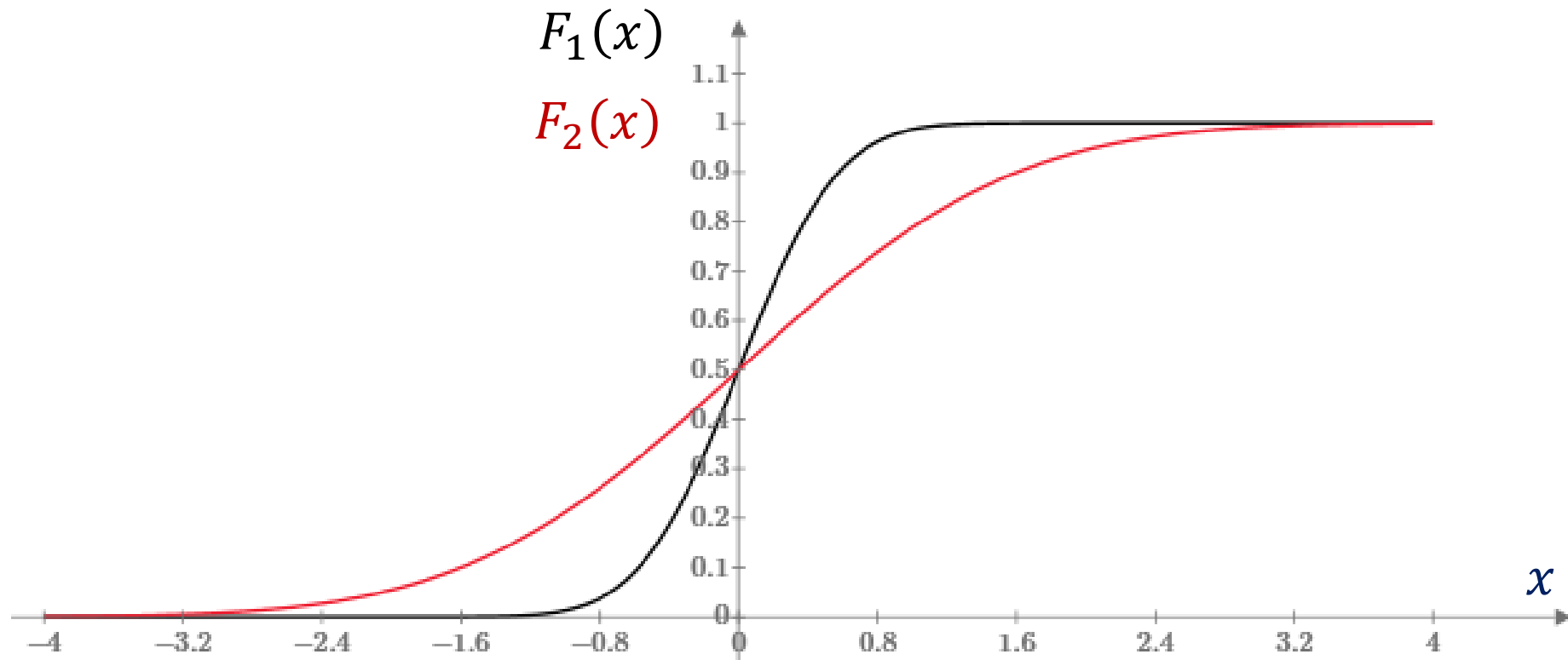
$$W_2(x) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma_2^2}}$$





ФРВ ГСП определяется соотношением:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = F\left(\frac{x}{\sigma}\right)$$



3. Рассчитать и построить график ФПВ случайного процесса, образованного суммой независимых случайных процессов из пунктов 1 и 2 с параметрами  $A_1 = 0,8$  В,  $A_2 = 1,6$  В и  $\sigma_1 = 0,45$  В. Определить среднее значение этого процесса.

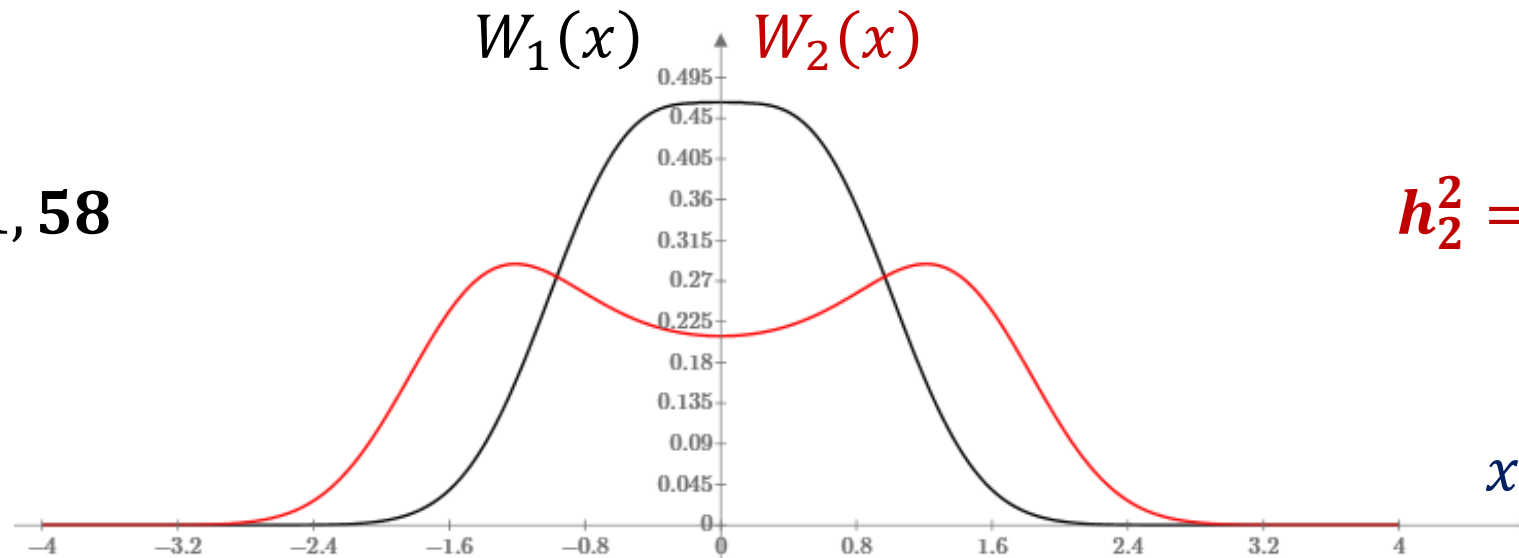
Сумма гауссовского СП и гармонического колебания со случайной начальной фазой:

$$Z(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi) + x(t)$$

ФПВ такого процесса:

$$W(z) = \int_{-A}^A \frac{1}{\pi \sqrt{A^2 - x^2}} \cdot \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(z-x)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$h_1^2 = \frac{A_1^2}{2\sigma_1^2} = 1,58$$



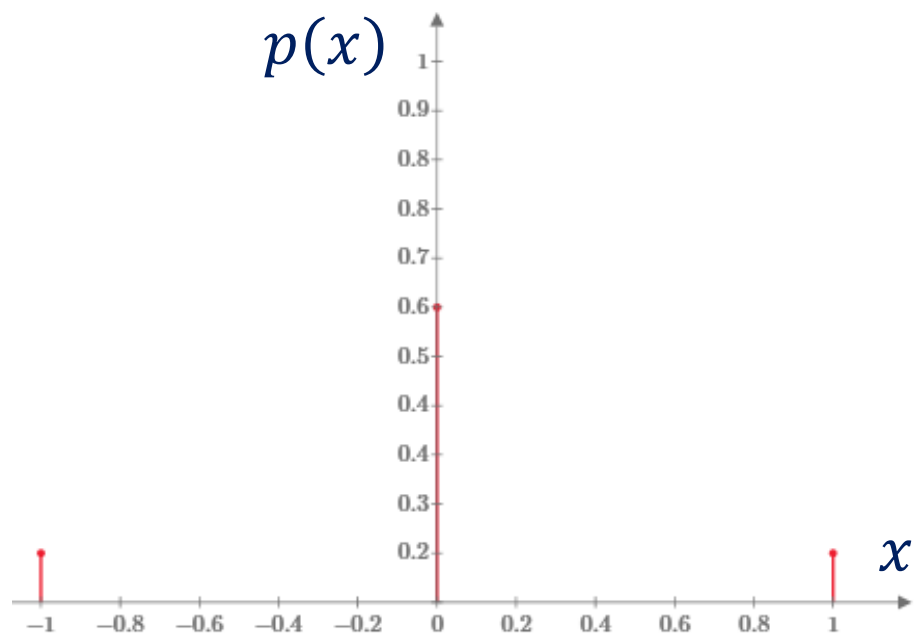
$$h_2^2 = \frac{A_2^2}{2\sigma_1^2} = 6,321$$

4. Рассчитать и построить графики дискретного по значениям случайного процесса:  $T_1 = 0, T_2 = 1, T_3 = 0, T_4 = -1, T_5 = 0$ . Определить среднее значение  $m_1$ , полную мощность  $m_2$  и дисперсию СП.

$$p(0) = \frac{3}{5} = 0,6; p(1) = \frac{1}{5} = 0,2; p(-1) = \frac{1}{5} = 0,2$$

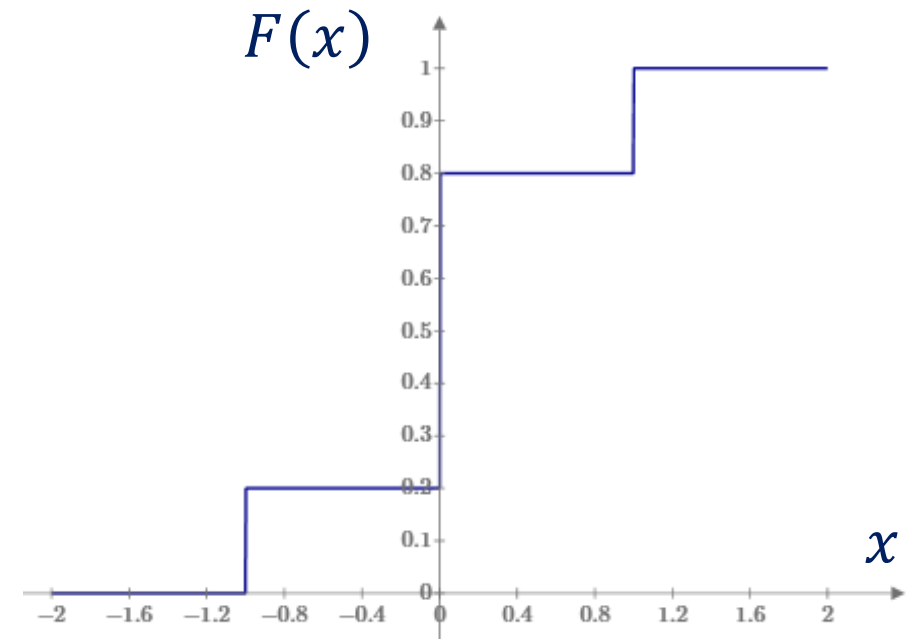
ФПВ (распределение вероятностей) дискретного случайного процесса:

$$W(x) = \sum_{i=1}^k p_i \cdot \delta(x - x_i) = p(-1) \cdot \delta(x + 1) + p(0) \cdot \delta(x) + p(1) \cdot \delta(x - 1)$$



Функция распределения вероятностей:

$$F(x) = \sum_{i=1}^k p_i \cdot \sigma(x - x_i)$$
$$= p(-1) \cdot \sigma(x + 1) + p(0) \cdot \sigma(x) + p(1) \cdot \sigma(x - 1)$$



$$m_1 = \sum_{i=1}^3 x_i \cdot p_i = -1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,6 + 1 \cdot 0,2 = 0$$

$$m_2 = \sum_{i=1}^3 x_i^2 \cdot p_i = 1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,6 + 1 \cdot 0,2 = 0,4$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^3 (x_i - m_1)^2 \cdot p_i = m_2 - m_1^2 = 0,4 - 0 = 0,4$$