РГР №1

«Расчет на прочность и жесткость стержня методом конечных элементов»

Для всех вариантов требуется решить задачу о растяжении-сжатии стержня аналитически методом конечных элементов.

Методом конечных элементов: перемещения узлов, деформации участков, нормальные напряжения.

Варианты заданий

Во всех вариантах принять $E=2\cdot10^{11}$Па – модуль Юнга

Схема 1

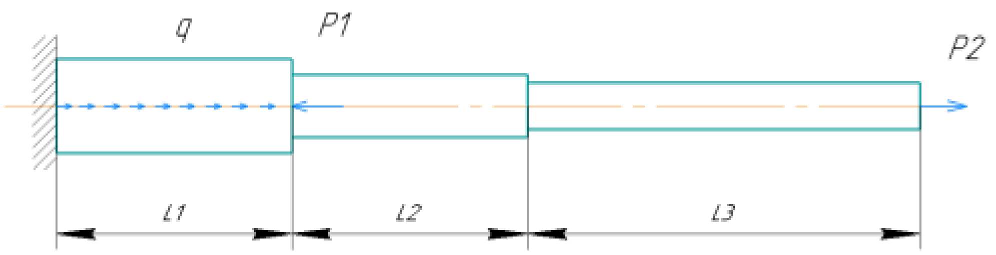


Схема 2

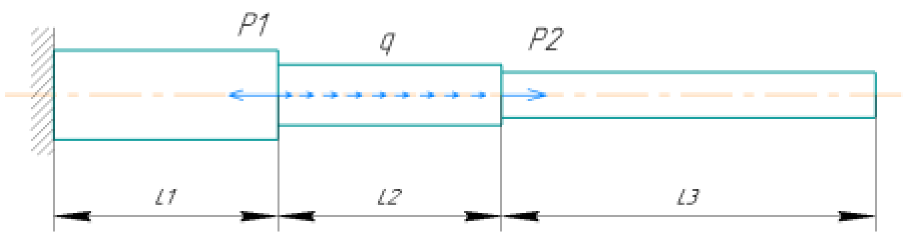


Схема 3

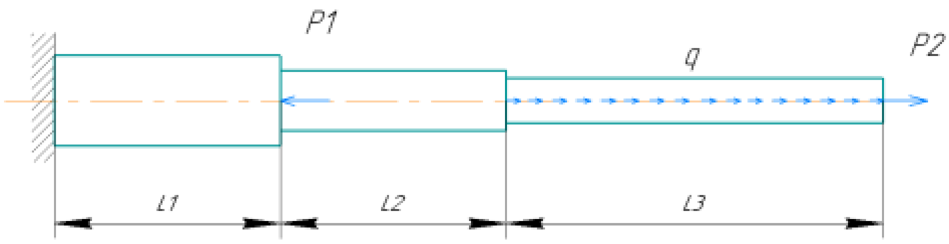


Схема 4

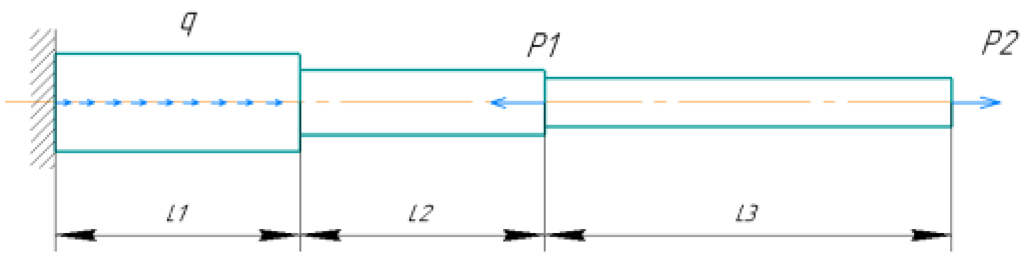


Схема 5

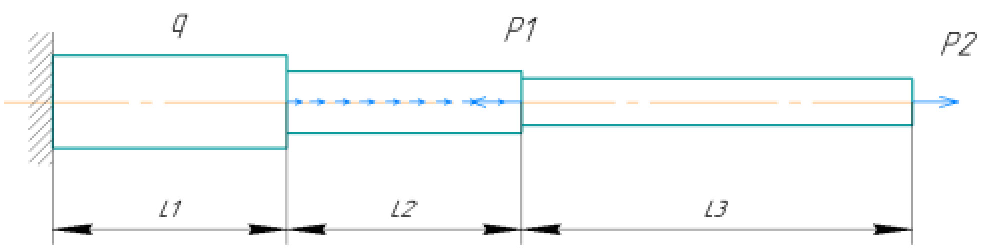
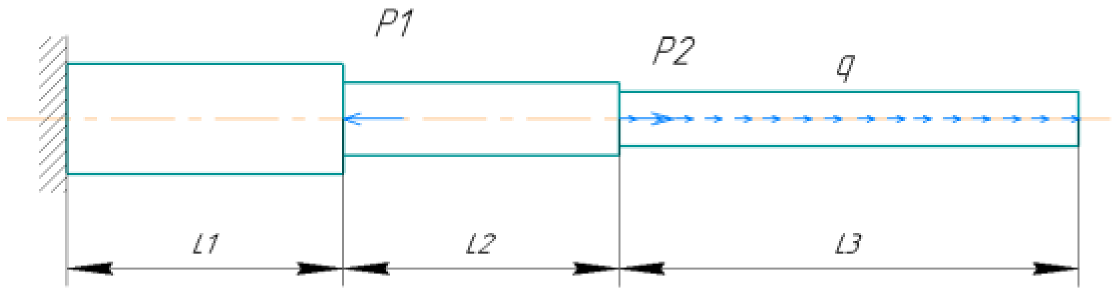


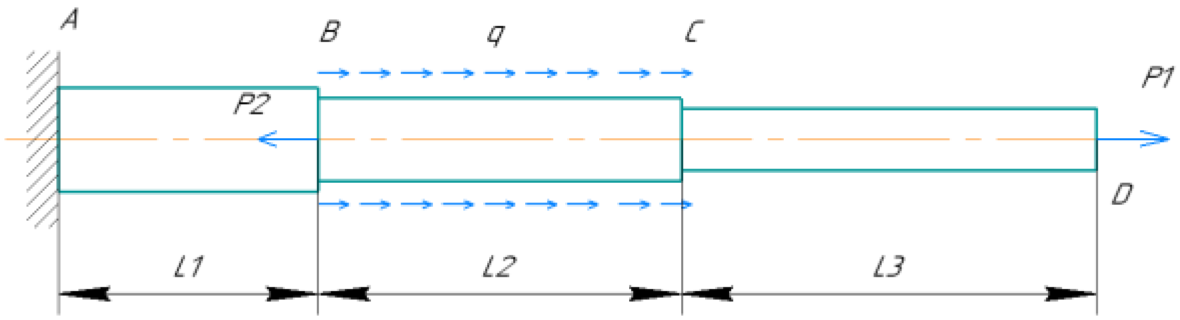
Схема 6



№	Номер схемы	Площадь поперечного сечения участка, см^2			Длина участка, м			Нагрузка		
		F_1	F_2	F_3	L_1	L_2	L_3	P_1, кН	P_2, кН	q, кН/м
1	1	30	15	6	1.5	2	1.5	5	10	2
2	2	34	16	10	2	3	2.5	6	11	3
3	3	36	17	14	2.5	4	3.5	7	12	4
4	4	37	18	20	3	1	4.5	8	13	5
5	5	40	19	26	3.5	2	1.5	9	14	6
6	6	42	20	32	4	3	2.5	10	15	7
7	1	44	21	8	1.5	4	3.5	11	16	8
8	2	46	22	12	2	1	4.5	12	17	7
9	3	48	23	16	2.5	1.5	1	13	18	6
10	4	50	24	20	3	2.5	2	14	19	5
11	5	52	25	24	3.5	3.5	3	15	7	4
12	6	54	26	28	4	1	2.5	16	8	3
13	1	56	27	32	2	1.5	2.5	5	9	2
14	2	58	28	6	2.5	2.5	3.5	6	9	2
15	3	60	29	10	3	3.5	4.5	7	6	3
16	4	30	22	14	3.5	1	1.5	8	10	4
17	5	32	23	18	4	1.5	2.5	9	11	5
18	6	34	24	22	1.5	2.5	3.5	10	12	6
19	1	36	25	26	2	3.5	4.5	11	13	7

Методические указания к решению задачи МКЭ

Разберем конкретный пример:



L1=1 м, L2=2м, L3=1м, $E=2*10^{11}$, $F1=10^{-4}$ м^2, F2=3F1, F3=2F1, q=20000 Н/м, P1=10000 Н, P2=30000 Н.

Данная схема содержит 3 участка, то есть ее удобно разбить на 3 конечных элемента, которые содержат 4 узла – точки A, B, C, D.

Данная задача о растяжении-сжатии стержня, то есть сечения стержня могут перемещаться по продольной оси. Таким образом, в каждом узле 1 степень свободы.

Количество степеней свободы системы определяется как произведение количества узлов на количество степеней свободы в каждом, то есть 1*4=4. Основное уравнение МКЭ:

$$[K]\cdot\{u\} = \{P\}$$

[K] – матрица жесткости системы, {u} – вектор-столбец узловых перемещений, {P} – вектор-столбец внешних нагрузок.

В соответствии с тем, что в данной задаче 4 неизвестных, без учета граничных условий (условий закрепления) вектор-столбец узловых нагрузок также будет иметь 4 величины, а матрица жесткости будет размерностью 4*4.

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}, \{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix}$$

Однако конструкция не «летает в воздухе», а каким-то образом закреплена, то есть мы заранее знаем некоторые узловые перемещения. В рассматриваемом случае жесткая заделка в точке А. Тогда вектор-столбец узловых перемещений перепишется следующим образом:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

1. Составим матрицы жесткости элементов.

Данный этап проще реализовать сразу в Маткаде примерно следующим образом:

$$L := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad F := \begin{pmatrix} 10^{-4} \\ 3\cdot 10^{-4} \\ 2\cdot 10^{-4} \end{pmatrix} \qquad E := 2\cdot 10^{11} \quad P1 := 10000 \quad P2 := 30000 \quad q := 20000$$

$$i := 0..2$$

$$k_i := \frac{E\cdot F_i}{L_i}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k_0 = \begin{pmatrix} 2\times 10^7 & -2\times 10^7 \\ -2\times 10^7 & 2\times 10^7 \end{pmatrix}$$

$$k_1 = \begin{pmatrix} 3\times 10^7 & -3\times 10^7 \\ -3\times 10^7 & 3\times 10^7 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} 4\times 10^7 & -4\times 10^7 \\ -4\times 10^7 & 4\times 10^7 \end{pmatrix}$$

Сначала введены исходные значения модуля Юнга, площадей поперечных сечений, нагрузок и длин участков. Обратите внимание, что длины участков и площади сечений записаны через вектор-столбец, что позволяет записать матрицу жесткости в общем виде сразу.

2. Далее необходимо собрать матрицу жесткости всей системы

Этот этап рекомендуется делать только на бумаге и не тратить силы и время на его реализацию в маткаде, поскольку такая матрица жесткости (не скорректированная под граничные условия) не будет фигурировать в расчетах.

Матрица жесткости системы из трех конечных элементов формируется следующим образом:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{0,0}^0 & k_{0,1}^0 & 0 & 0 \\ k_{1,0}^0 & k_{1,1}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{0,0}^1 & k_{0,1}^1 & 0 \\ 0 & k_{1,0}^1 & k_{1,1}^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{0,0}^2 & k_{0,1}^2 \\ 0 & 0 & k_{1,0}^2 & k_{1,1}^2 \end{bmatrix}$$

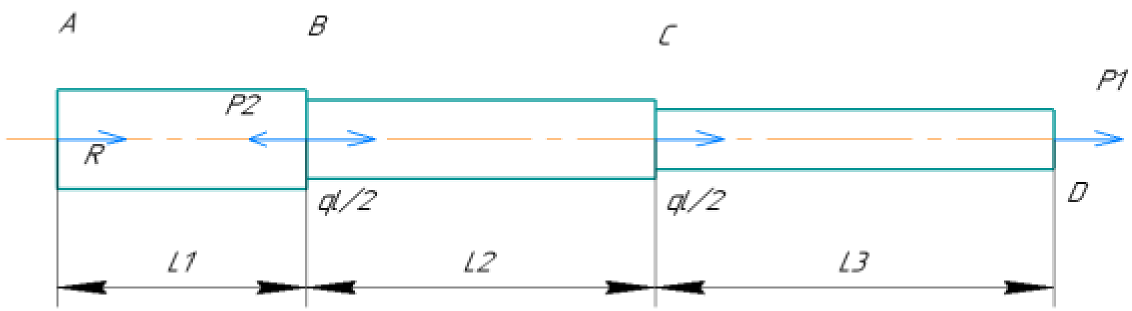
$$= \begin{bmatrix} k_{0,0}^0 & k_{0,1}^0 & 0 & 0 \\ k_{1,0}^0 & k_{1,1}^0 + k_{0,0}^1 & k_{0,1}^1 & 0 \\ 0 & k_{1,0}^1 & k_{1,1}^1 + k_{0,0}^2 & k_{0,1}^2 \\ 0 & 0 & k_{1,0}^2 & k_{1,1}^2 \end{bmatrix}$$

В данной записи обозначение $k^{(i)}_{n,m}$ расшифровывается как элемент, располагающийся на n-ной строке и m-ном столбце матрицы жесткости i-ого конечного элемента.

То есть матрица расширяется путем добавления новых строк и столбцов до количества, соответствующего размерности задачи (в нашем случае 1*4=4), элементы, стоящие на пересечениях матриц, складываются, пустые места заполняются нулями.

3. Следующий этап – запись нагрузок, действующих на систему

Необходимо заменить опору ее реакцией, а также избавиться от распределенной нагрузки – заменить ее эквивалентной, разнесенной по узлам.



$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R \\ -P2 + \dfrac{ql}{2} \\ \dfrac{ql}{2} \\ P1 \end{Bmatrix}$$

Сила входит со знаком +, если направлена вправо.

4. Сформируем матрицу жесткости с учетом граничных условия.

Это можно сделать путем вычеркивания строк и столбцов, соответствующих нулям в вектор-столбце перемещений. То есть в данном примере необходимо вычеркнуть 1 строку и столбец. Итоговая матрица имеет вид:

$$K := \begin{bmatrix} (k_0)_{1,1} + (k_1)_{0,0} & (k_1)_{0,1} & 0 \\ (k_1)_{1,0} & (k_1)_{1,1} + (k_2)_{0,0} & (k_2)_{0,1} \\ 0 & (k_2)_{1,0} & (k_2)_{1,1} \end{bmatrix}$$

5. Решение задачи. Очень сложный этап. Необходимо произвести следующее вычисление:

$$u := K^{-1} \cdot P = \begin{pmatrix} 1 \times 10^{-3} \\ 2 \times 10^{-3} \\ 2.25 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Здесь указаны линейные перемещения без учета уже известных нулевых в системе СИ, то есть в метрах. Вектор-столбец узловых перемещений можно записать в следующем виде:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 * 10^{-3} \\ 2 * 10^{-3} \\ 2.25 * 10^{-3} \end{Bmatrix}$$

Максимальное перемещение в точке D и составляет 2.25 мм.

6. Определение реакций опор.

Для этого необходимо найденный вектор-столбец перемещений (скорректированный, то есть с нулями) умножить на отброшенные строки матрицы жесткости:

$$R := \begin{bmatrix} (k_0)_{0,0} & (k_0)_{0,1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot u = -2 \times 10^{4}$$

7. Определение деформаций и нормальных напряжений

Необходимо воспользоваться определением линейной деформации – отношение изменения длины к исходной длине:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{u_{i+1} - u_i}{L_i}$$

По закону Гука, нормальные напряжения связаны с деформациями линейно через модуль Юнга:

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$\varepsilon := \begin{pmatrix} \dfrac{u_1 - u_0}{L_0} \\ \dfrac{u_2 - u_1}{L_1} \\ \dfrac{u_3 - u_2}{L_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 10^{-3} \\ 5 \times 10^{-4} \\ 2.5 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$\sigma := E \cdot \varepsilon = \begin{pmatrix} 2 \times 10^{8} \\ 1 \times 10^{8} \\ 5 \times 10^{7} \end{pmatrix}$$

Максимальные нормальные напряжения возникают на первом участке и составляют 200 МПа.