

Вариант 1

Задача 1

Докажите, что если множество M топологического пространства X замкнуто, то $M = \bar{M}$. (Замыканием M называется совокупность всех точек прикосновения M).

Задача 2

Является ли $\rho(x, y) = \sqrt{|x - y|}$ метрикой на \mathbb{R} ?

Задача 3

Доказать, что нормированное пространство полно тогда и только тогда, когда в нем всякий абсолютно сходящийся ряд сходится.

Вариант 2

Задача 1

Пусть $X = (0, 1]$, а базу топологии в X образуют \emptyset , само X и всевозможные интервалы вида (α, β) , где $\alpha, \beta \in (0, 1)$. Найти в X предел последовательности $x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$.

Задача 2

Пусть a — фиксированная точка метрического пространства (X, ρ) . Докажите, что $\rho(x, a)$ является непрерывной функцией от x .

Задача 3

Доказать, что две нормы, определенные на одном и том же линейном пространстве, эквивалентны тогда и только тогда, когда из сходимости последовательности по одной из норм следует сходимость по другой норме.

Вариант 3

Задача 1

Докажите, что замыкание любого множества M топологического пространства (X, τ) совпадает с пересечением всех замкнутых множеств, содержащих M .

Задача 2

Является ли $\rho(x, y) = |\arctg x - \arctg y|$ метрикой на \mathbb{R} .

Задача 3

Пусть B_1 и B_2 — шары в нормированном пространстве с радиусами соответственно r_1 и r_2 . Доказать, что если $B_1 \subset B_2$, то $r_1 \leq r_2$.

Вариант 4

Задача 1

Докажите, что если $f: X \rightarrow Y$ и $\varphi: X \rightarrow Y$ — два непрерывных отображения топологического пространства X в хаусдорфово топологическое пространство Y , то множество $M = \{x \in X \mid f(x) = \varphi(x)\}$ замкнуто.

Задача 2

Докажите, что в метрическом пространстве (X, ρ) всякая точка прикосновения множества M является либо предельной для него, либо изолированной точкой этого множества.

Задача 3

Пусть $B_1 \supset B_2 \supset \dots$ — последовательность вложенных замкнутых шаров в банаховом пространстве. Доказать, что

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \neq \emptyset.$$

Вариант 5

Задача 1

Пусть Y — подпространство топологического пространства (X, τ) . Докажите, что любое множество из семейства $\mathcal{F} = \{V \cap Y \mid V \text{ — замкнутое множество в } X\}$ является замкнутым в топологическом пространстве Y .

Задача 2

Докажите, что в пространстве $C[0; 1]$ с метрикой $\rho(f, g) = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)|$ множество $M = \{f \in C[0; 1] \mid A < f(x) < B \text{ для всех } x \in [0; 1]\}$ открыто.

Задача 3

Верно ли, что система функций $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ является

- а) полной в $C[0; 1]$;
- б) базисом в $C[0; 1]$.

Вариант 6

Задача 1

Пусть X — топологическое пространство и $A \subset X$. Докажите, что если каждое подмножество множества A замкнуто в X , то у A нет предельных точек.

Задача 2

Пусть \mathbb{X} — совокупность всех последовательностей натуральных чисел. Положим $\forall x \in \mathbb{X} \rho(x, x) = 0$ и для $x \neq y \rho(x, y) = \frac{1}{k}$, где k — первый такой номер, для которого $x_k \neq y_k$. Является ли ρ метрикой на \mathbb{X} ?

Задача 3

Пусть L — пространство последовательностей действительных чисел с условием $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$, для которых сходится ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \sin(i)$ с нормой $\|x\| = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2)^{1/2}$.

Является ли а) линейным и б) непрерывным следующий функционал?

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \sin(k)$$

Вариант 7

Задача 1

Существует ли гомеоморфизм числовой прямой \mathbb{R} с топологией Зарисского на $R \setminus \{0\}$ с топологией Зарисского?

Задача 2

Пусть \mathbb{X} — множество всех числовых последовательностей с метрикой $\rho(x, y) = \sup_n \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$. Докажите, что (\mathbb{X}, ρ) — не сепарабельное метрическое пространство.

Указание. Рассмотрите в \mathbb{X} подмножество всех последовательностей, состоящих из элементов множества $\{0; 1\}$.

Задача 3

Пусть $C[0; 1]$ — пространство непрерывных на $[0; 1]$ функций с нормой $\|f\| = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$. Является ли а) линейным и б) непрерывным следующий функционал?

$$F(f) = \int_0^1 f^2(x) dx$$

Вариант 8

Задача 1

Докажите, что для любых двух замкнутых множеств F_1 и F_2 , покрывающих топологическое пространство X , дополнение любого из них содержится во внутренней части другого.

Задача 2

Докажите, что в любом полном метрическом пространстве последовательность $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots \supseteq B_n \supseteq$ замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к 0: $r_n \rightarrow 0$, имеет непустое пересечение, состоящее из одной точки.

Задача 3

Пусть $L_2[0; 1]$ — пространство функций на $[0; 1]$ с интегрируемым квадратом и нормой $\|f\| = \sqrt{\int_0^1 f^2(x) dx}$. Является ли а) линейным и б) непрерывным следующий функционал?

$$F(f) = \int_0^1 f(x) \operatorname{sgn}\left(x - \frac{1}{2}\right) dx$$