

11. МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

Метод ветвей и границ относится к группе комбинаторных методов дискретного программирования и является одним из наиболее распространенных методов этой группы. Центральную идею комбинаторных методов составляет замена полного перебора допустимого множества X частичным перебором. В случае метода ветвей и границ это осуществляется путем последовательного разбиения допустимого множества на подмножества (ветвления) и вычисления оценок (границ), позволяющих отбрасывать подмножества, заведомо не содержащие решения задачи. При реализации общей схемы метода ветвей и границ для различных задач дискретного программирования необходимо, исходя из специфики этих задач, конкретизировать правила ветвления и вычисления границ.

На практическом занятии рассматривается метод ветвей и границ для задачи целочисленного линейного программирования (ЛП) следующего вида:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max ,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i , \quad i = \overline{1, m} ,$$

$$x_j \geq 0 , \quad j = \overline{1, n} ,$$

$$x_j - \text{целые}, \quad j = \overline{1, n} .$$

Допустимое множество X данной задачи предполагается ограниченным.

В данном случае на каждом этапе (шаге) решаются непрерывные задачи ЛП: на предварительном (нулевом) этапе – задача L_0 ; на k -м, $k = 1, 2, \dots$, этапе – задачи L_{2k-1} и L_{2k} . Задача L_0 , как и в методе отсечений, представляет собой исходную задачу без учета требования целочисленности; задача L_v , $v = 1, 2, \dots$, получается в результате добавления к задаче L_0 дополнительных ограничений.

Верхняя граница (оценка) ξ^v целевой функции f для задачи

L_v , $v = 0, 1, 2, \dots$, определяется следующим образом:

$$\xi^v \equiv f(x^{(v)}),$$

где $x^{(v)}$ – решение задачи L_v .

Если задача L_v не имеет решения, то полагается $\xi^v \equiv -\infty$.

В процессе решения строится *дерево задач*, в котором v -я, $v = 0, 1, 2, \dots$, вершина соответствует задаче L_v . Обозначим через I множество вершин, из которых возможно ветвление. Для ветвления на k -м, $k = 1, 2, \dots$, этапе выбирается v -я, $v \in I$, вершина (задача L_v), которая имеет максимальную верхнюю оценку ξ^v .

Пусть в решении $x^{(v)}$ некоторая компонента $x_r^{(v)}$, $1 \leq r \leq n$, не является целочисленной. Допустимое, т.е. целочисленное, значение x_r должно удовлетворять одному из неравенств, представляющих собой *необходимые* условия целочисленности x_r :

$$\text{либо } x_r \leq [x_r^{(v)}], \text{ либо } x_r \geq [x_r^{(v)}] + 1,$$

где $[a]$ – целая часть действительного числа a .

В результате задача L_v разветвляется (разбивается) на две не связанные между собой задачи L_{2k-1} и L_{2k} . Задача L_{2k-1} представляет собой задачу L_v с дополнительным ограничением $x_r \leq [x_r^{(v)}]$, а задача L_{2k} – задачу L_v с дополнительным ограничением $x_r \geq [x_r^{(v)}] + 1$, т.е.

$$L_{2k-1} \begin{cases} L_v, \\ x \leq [x_r^{(v)}]; \end{cases} \quad L_{2k} \begin{cases} L_v, \\ x \geq [x_r^{(v)}] + 1. \end{cases}$$

Для ускорения процесса решения вводится нижняя граница целевой функции f для целочисленного решения, обозначаемая Θ . После решения задачи L_v значение Θ^v определяется следующим образом:

$$\Theta^v = \begin{cases} \Theta^{v-1}, & \text{если задача } L_v \text{ не имеет решения либо } x^{(v)} \\ & \text{не является целочисленным;} \\ \max\{\Theta^{v-1}, \xi^v\}, & \text{если } x^{(v)} \text{ является целочисленным.} \end{cases}$$

При этом $\Theta^0 \equiv -\infty$.

Ветвление на k -м, $k = 1, 2, \dots$, этапе из i -й, $i \in I$, вершины следует прекратить, если верхняя граница ξ^i целевой функции для задачи L_i не больше известной на данном шаге нижней границы Θ^{2k} целевой функции для целочисленного решения. Процесс решения завершается, когда отсутствуют вершины, из которых возможно ветвление, т.е. $I = \emptyset$. При этом оптимальное значение $f^* = \Theta^{2k}$, решение $x^* = x^{(v)}$, где $x^{(v)}$ определяются из условия $f(x^{(v)}) = \Theta^{2k}$.

Итак, алгоритм решения целочисленной задачи ЛП методом ветвей и границ заключается в следующем.

1. Решается задача ЛП L_0 .

Если задача L_0 не имеет решения, то исходная задача не имеет целочисленного решения и вычисления завершаются.

2. Находится решение $x^{(0)}$, вычисляется верхняя граница $\xi^0 = f(x^{(0)})$.

Если решение $x^{(0)}$ является целочисленным, то полагается $x^* = x^{(0)}$, $f^* = \xi^0$ и вычисления завершаются.

Если решение $x^{(0)}$ не является целочисленным, то полагается $\Theta^0 = -\infty$, $k=1$ и осуществляется переход к п. 3.

3. Выбирается для ветвления v -я вершина из I , для которой выполняется условие

$$\xi^v = \max_{i \in I} \xi^i.$$

4. Выбирается (произвольно) одна из нецелочисленных компонент $x_r^{(v)}$, осуществляется ветвление по переменной x_r , составляются задачи L_{2k-1} и L_{2k} .

5. Решается задача $L_j, j = 2k-1, 2k$.

Если задача L_j не имеет решения, то полагается $\xi^j = -\infty$, $\Theta^j = \Theta^{j-1}$ и осуществляется (при $j=2k$) переход к п. 7.

6. Находится $x^{(j)}$, вычисляется $\xi^j = f(x^{(j)})$.

Если решение $x^{(j)}$ является целочисленным, то полагается $\Theta^j = \max\{\Theta^{j-1}, \xi^j\}$ и осуществляется (при $j = 2k$) переход к п. 7.

Если решение $x^{(j)}$ не является целочисленным, то полагается $\Theta^j = \Theta^{j-1}$ и осуществляется (при $j = 2k$) переход к п. 7.

7. Просматриваются вершины из I и прекращается ветвление, если выполняется условие

$$\xi^i \leq \Theta^{2k}, i \in I.$$

8. Проверяется условие окончания вычислений

$$I = \emptyset.$$

Если оно выполняется, то полагается $f^* = \Theta^{2k}$, $x^* = x^{(v)}$, где $x^{(v)}$ определяется из условия $f(x^{(v)}) = \Theta^{2k}$, и вычисления завершаются.

Если условие не выполняется, то полагается $k = k + 1$ и осуществляется переход к п. 3.

Пример. Решить методом ветвей и границ следующую целочисленную задачу ЛП:

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max,$$

$$5x_1 + 7x_2 \leq 35,$$

$$4x_1 + 9x_2 \leq 36,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

$$x_1, x_2 - \text{целые.}$$

Решение.

Предварительный (нулевой) этап

Записываем задачу L_0 (исходная задача без учета требования целочисленности):

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max ,$$

$$5x_1 + 7x_2 \leq 35 , \quad (1)$$

$$4x_1 + 9x_2 \leq 36 , \quad (2)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Этой задаче соответствует нулевая вершина дерева задач (см. ниже рис. 11.6).

Решаем графически задачу L_0 (рис. 11.1).

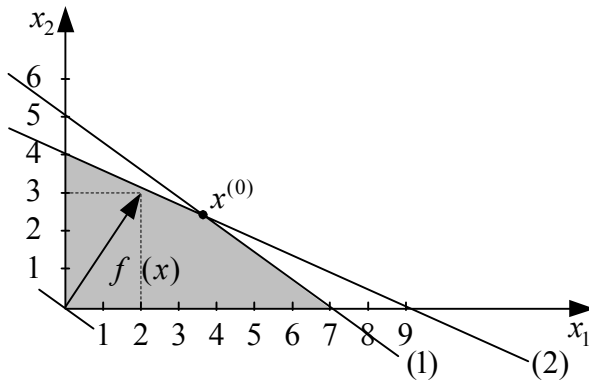


Рис. 11.1

Из рис. 11.1 следует, что задача L_0 имеет решение $x^{(0)}$. Точка $x^{(0)}$ является решением системы уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 = 35, \\ 4x_1 + 9x_2 = 36. \end{cases}$$

Находим $x^{(0)}$ и ξ^0 :

$$\begin{array}{r} -45x_1 + 63x_2 = 315 \\ -28x_1 + 63x_2 = 252 \\ \hline 17x_1 = 63 \end{array} \rightarrow x_1 = \frac{63}{17} = 3\frac{12}{17};$$

$$\frac{5 \cdot 63}{17} + 7x_2 = 35 \rightarrow 7x_2 = 35 - 18\frac{9}{17} = \frac{280}{17} \rightarrow x_2 = \frac{40}{17} = 2\frac{6}{17};$$

$$x^{(0)} = (3\frac{12}{17}, 2\frac{6}{17});$$

$$\xi^0 = f(x^{(0)}) = 2 \cdot 3\frac{12}{17} + 3 \cdot 2\frac{6}{17} = 14\frac{8}{17}.$$

Поскольку $x^{(0)}$ не является целочисленным, то полагаем $\Theta^0 = -\infty$ и выполняем 1-й этап.

Первый этап

Осуществляем ветвление из нулевой вершины.

Выбираем для ветвления нецелочисленную компоненту $x_2^{(0)} = 2\frac{6}{17}$; осуществляем ветвление по переменной x_2 : $x_2 \leq 2$, $x_2 \geq 3$; составляем задачи L_1 и L_2 :

$$L_1 \left\{ \begin{array}{l} L_0, \\ x_2 \leq 2; \end{array} \right. \quad L_2 \left\{ \begin{array}{l} L_0, \\ x_2 \geq 3. \end{array} \right.$$

Записываем задачу L_1 :

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \\ 5x_1 + 7x_2 \leq 35, \quad (1)$$

$$4x_1 + 9x_2 \leq 36, \quad (2)$$

$$x_1 \geq 0, \quad 0 \leq x_2 \leq 2.$$

Этой задаче соответствует первая вершина дерева задач (см. ниже рис. 11.6).

Решаем графически задачу L_1 (рис. 11.2).

Из рис. 11.2 следует, что задача L_1 имеет решение $x^{(1)}$.

Точка $x^{(1)}$ является решением системы уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 = 35, \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

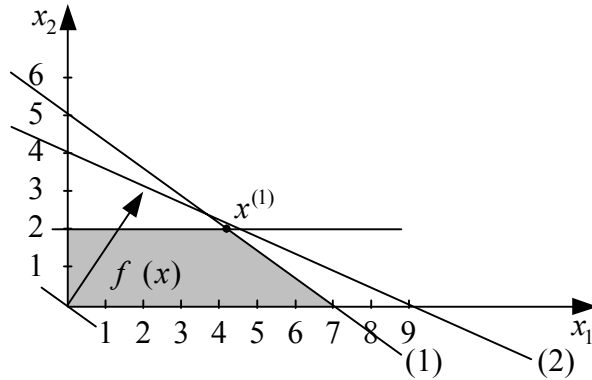


Рис. 11.2

Находим $x^{(1)}$ и ξ^1 :

$$5x_1 + 7 \cdot 2 = 35 \rightarrow 5x_1 = 21 \rightarrow x_1 = 4\frac{1}{5};$$

$$x^{(1)} = (4\frac{1}{5}, 2);$$

$$\xi^1 = f(x^{(1)}) = 2 \cdot 4\frac{1}{5} + 3 \cdot 2 = 14\frac{2}{5}.$$

Поскольку $x^{(1)}$ не является целочисленным, то полагаем $\Theta^1 = \Theta^0 = -\infty$.

Записываем задачу L_2 :

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max ,$$

$$5x_1 + 7x_2 \leq 35, \quad (1)$$

$$4x_1 + 9x_2 \leq 36, \quad (2)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 3.$$

Этой задаче соответствует вторая вершина дерева задач (см. ниже рис. 11.6).

Решаем графически задачу L_2 (рис. 11.3).

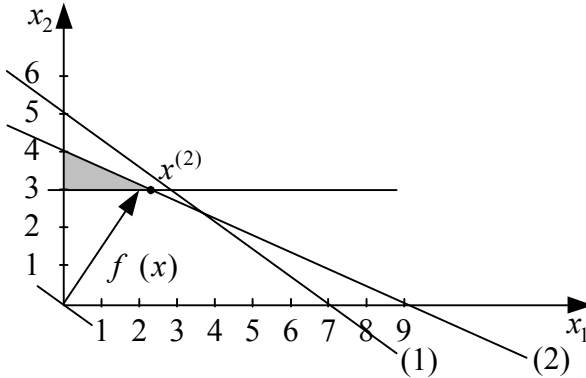


Рис. 11.3

Из рис. 11.3 следует, что задача L_2 имеет решение $x^{(2)}$.

Точка $x^{(2)}$ является решением системы уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + 9x_2 = 36, \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

Находим $x^{(2)}$ и ξ^2 :

$$4x_1 + 9 \cdot 3 = 36 \rightarrow 4x_1 = 9 \rightarrow x_1 = 2\frac{1}{4};$$

$$x^{(2)} = (2\frac{1}{4}, 3);$$

$$\xi^2 = f(x^{(2)}) = 2 \cdot 2\frac{1}{4} + 3 \cdot 3 = 13\frac{1}{2}.$$

Поскольку $x^{(2)}$ не является целочисленным, то полагаем $\Theta^2 = \Theta^1 = -\infty$.

Просматриваем вершины из $I = \{1, 2\}$.

Поскольку $\xi^1 = 14 \frac{2}{5} > \Theta^2 = -\infty$, то не прекращаем ветвление из 1-й вершины. Таким образом, $I = \{1, 2\}$.

Поскольку $\xi^2 = 13 \frac{1}{2} > \Theta^2 = -\infty$, то не прекращаем ветвление из 2-й вершины. Таким образом, $I = \{1, 2\}$.

Проверяем условие окончания вычислений.

Поскольку $I \neq \emptyset$, то выполняем 2-й этап.

Второй этап

Выбираем для ветвления 1-ю вершину, поскольку выполняется условие

$$\xi^1 = 14 \frac{2}{5} = \max_{i \in I} \xi^i.$$

Выбираем нецелочисленную компоненту $x_1^{(1)} = 4 \frac{1}{5}$; осуществляем ветвление по переменной x_1 : $x_1 \leq 4$, $x_1 \geq 5$; составляем задачи L_3 и L_4 :

$$L_3 \left\{ \begin{array}{l} L_1, \\ x_1 \leq 4; \end{array} \right. \quad L_4 \left\{ \begin{array}{l} L_1, \\ x_1 \geq 5. \end{array} \right.$$

Записываем задачу L_3 :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \\ 5x_1 + 7x_2 &\leq 35, & (1) \\ 4x_1 + 9x_2 &\leq 36, & (2) \\ 0 \leq x_1 &\leq 4, \quad 0 \leq x_2 \leq 2. \end{aligned}$$

Этой задаче соответствует третья вершина дерева задач (см. ниже рис. 11.6).

Решаем графически задачу L_3 (рис. 11.4).

Из рис. 11.4 следует, что задача L_3 имеет решение $x^{(3)}$:

$$x^{(3)} = (4, 2);$$

$$\xi^3 = f(x^{(3)}) = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 14.$$

Поскольку $x^{(3)}$ является целочисленным, то полагаем $\Theta^3 = \max\{\Theta^2, \xi^3\} = \max\{-\infty, 14\} = 14$.

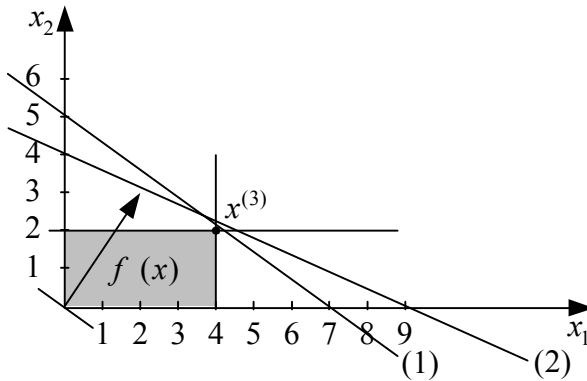


Рис. 11.4

Записываем задачу L_4 :

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max,$$

$$5x_1 + 7x_2 \leq 35, \quad (1)$$

$$4x_1 + 9x_2 \leq 36, \quad (2)$$

$$x_1 \geq 5, \quad 0 \leq x_2 \leq 2.$$

Этой задаче соответствует четвертая вершина дерева задач (см. ниже рис. 11.6).

Решаем графически задачу L_4 (рис. 11.5).

Из рис. 11.5 следует, что задача L_4 имеет решение $x^{(4)}$.

Точка $x^{(4)}$ является решением системы уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 = 35, \\ x_1 = 5. \end{cases}$$

Находим $x^{(4)}$ и ξ^4 :

$$5 \cdot 5 + 7x_2 = 35 \rightarrow 7x_2 = 10 \rightarrow x_2 = 1\frac{3}{7};$$

$$x^{(4)} = (5, 1\frac{3}{7});$$

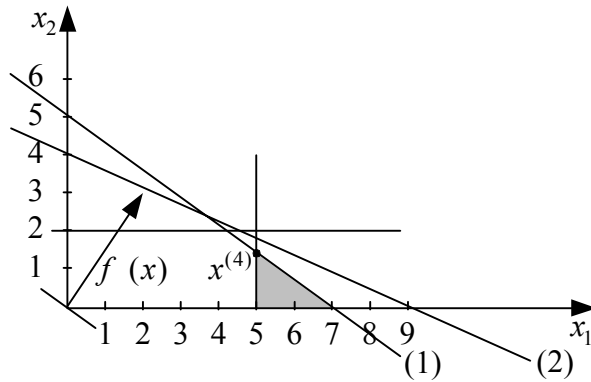


Рис. 11.5

$$\xi^4 = f(x^{(4)}) = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1\frac{3}{7} = 14\frac{2}{7}.$$

Поскольку $x^{(4)}$ не является целочисленным, то полагаем $\Theta^4 = \Theta^3 = 14$.

Просматриваем вершины из $I = \{2, 3, 4\}$.

Поскольку $\xi^2 = 13\frac{1}{2} < \Theta^4 = 14$, то прекращаем ветвление из 2-й вершины. Таким образом, $I = \{3, 4\}$.

Поскольку $\xi^3 = 14 = \Theta^4$, то прекращаем ветвление из 3-й вершины. Таким образом, $I = \{4\}$.

Поскольку $\xi^4 = 14\frac{2}{7} > \Theta^4 = 14$, то не прекращаем ветвление из 4-й вершины. Таким образом, $I = \{4\}$.

Проверяем условие окончания вычислений.

Поскольку $I \neq \emptyset$, то выполняем 3-й этап.

На 3-м этапе следует осуществлять ветвление из вершины 4, которой соответствует оптимальное значение $f(x^{(4)}) = 14\frac{2}{7}$.

Несмотря на то, что полученное значение f превышает нижнюю границу целевой функции для целочисленного решения $\Theta^4 = 14$, дальнейшее ветвление из вершины 4 не позволяет улучшить нижнюю границу Θ , поскольку $f(x^{(4)}) - \Theta^4 < 1$ и все коэффициенты целевой функции являются целыми числами. Таким образом, ветвление из вершины 4 *в лучшем случае* приведет к другому целочисленному решению, для которого $f = 14$. Если поиск других решений с тем же самым значением f не представляет интереса, то ветвление из вершины 4 осуществлять нецелесообразно и вычисления можно завершить. При этом $f^* = \Theta^4 = 14$, $x^* = x^{(3)} = (4, 2)$.

Ответ: $x^* = (4, 2)$, $f^* = 14$.

Задачи

1. Решить методом ветвей и границ следующую целочисленную задачу ЛП:

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \\ 4x_1 + 2x_2 &\leq 13, \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0, \\ x_1, x_2 &- \text{целые.} \end{aligned}$$

2. Решить методом ветвей и границ следующую целочисленную задачу ЛП:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 5x_2 &\leq 16, \\ 6x_1 + 5x_2 &\leq 30, \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0, \\ x_1, x_2 &- \text{целые.} \end{aligned}$$

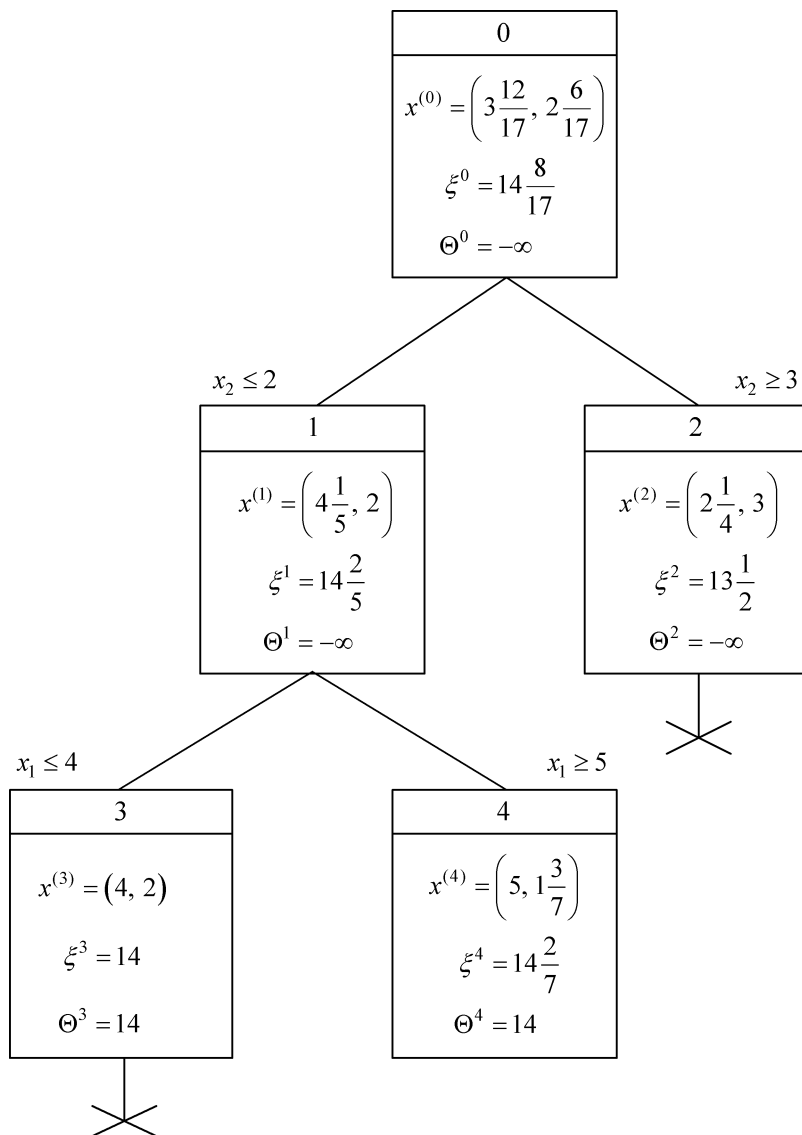


Рис. 11.6