



Уральский
федеральный
университет

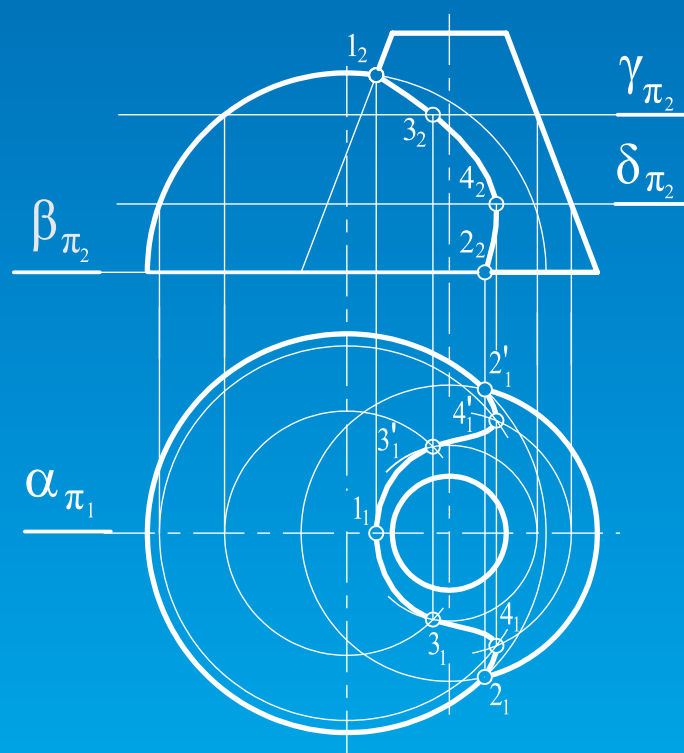
имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина

Институт
фундаментального
образования

С. В. ЛУКИНСКИХ
Л. В. БАРАНОВА
Т. И. СИДЯКИНА

ЭЛЕМЕНТЫ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ В ИНЖЕНЕРНОЙ ГРАФИКЕ

Учебное пособие



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ Б. Н. ЕЛЬЦИНА

С. В. Лукинских, Л. В. Баранова, Т. И. Сидякина

ЭЛЕМЕНТЫ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ В ИНЖЕНЕРНОЙ ГРАФИКЕ

Учебное пособие

2-е издание, переработанное и дополненное

Рекомендовано методическим советом Уральского федерального университета
в качестве учебного пособия для студентов вуза,
обучающихся по направлениям подготовки
18.03.01 «Химическая технология», 18.03.02 «Энерго- и ресурсосберегающие процессы
в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии»,
13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника»,
по специальности 14.05.02 «Атомные станции: проектирование, эксплуатация и инжиниринг»

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2023

УДК 514.18(075.8)
ББК 22.151.3я73-1
Л84

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра технологических машин и технологии машиностроения
Уральского государственного лесотехнического университета
(заведующий кафедрой кандидат технических наук, доцент *Н. В. Кузубина*);
Д. Г. Фрич, заместитель главного конструктора АО «УПП «Вектор»»

Лукинских, С. В.

Л84 Элементы начертательной геометрии в инженерной графике : учебное пособие /
С. В. Лукинских, Л. В. Баранова, Т. И. Сидякина ; Министерство науки и высшего образо-
вания Российской Федерации, Уральский федеральный университет. – 2-е изд., перераб.
и доп. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2023. – 83 с.: ил. – Библиогр.: с. 79. – 30 экз. –
ISBN 978-5-7996-3685-2. – Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-7996-3685-2

Учебное пособие имеет практическую направленность. Приводятся примеры решения задач построения геометрических объектов на чертеже, описываются алгоритмы их решения. Подробно раскрыта тема взаимного пересечения поверхностей как наиболее важная для развития пространственного решения.

Адресовано студентам технических направлений подготовки и специальностей при изучении дисциплин «Инженерная графика», «Детали машин». Будет полезно при выполнении конструкторских курсовых проектов и выпускной квалификационной работы.

УДК 514.18(075.8)
ББК 22.151.3я73-1

На обложке:
рисунок С. В. Лукинских

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие «Элементы начертательной геометрии в инженерной графике» предназначено для студентов технических специальностей высших учебных заведений, изучающих начертательную геометрию в составе дисциплины «Инженерная графика». Содержание, структура и методика представления учебного материала в пособии полностью соответствуют требованиям государственного образовательного стандарта профессионального высшего образования, учебному плану и государственным требованиям к содержанию дисциплины «Инженерная графика» для специальностей технического профиля высшего профессионального образования.

Значимость пособия обусловлена его включением в процесс подготовки будущего инженера: оно входит в учебные программы ряда направлений подготовки бакалавров и используется в процессе проведения практических занятий по инженерной графике в качестве вспомогательного материала при решении задач, а также для выполнения самостоятельных работ.

Цель пособия – познакомить студентов высших технических учебных заведений с применением графических методов отображения пространства, научить изображать геометрические формы на плоскости, а по изображениям представлять их в пространстве, привить навыки решения позиционных и метрических задач.

Особенностью настоящего пособия является его компактность в сочетании с рассмотрением широкого круга практических инженерных задач и способов их решения. В пособие включен материал, имеющий исключительно практическое значение, позволяющий наиболее полно изучить вопросы построения геометрических объектов на чертеже. Изложение построено так, что оно помогает студентам самостоятельно освоить основные теоретические положения начертательной геометрии и возможности применения их в инженерной практике.

В отличие от первого издания (Инженерная графика. Начертательная геометрия. Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2015) в настоящее издание включен дополнительный теоретический материал и внесены структурные изменения.

Пособие рекомендуется для всех форм обучения, особенно для заочных и вечерних.

Структура и содержание учебного пособия методически отражают обоснованную систему изложения теоретического материала и включают следующие темы:

- метод проекций;
- ортогональные проекции точки, прямой линии;
- ортогональные проекции поверхности;
- построение проекций пересечения геометрических объектов;
- взаимное пересечение поверхностей;
- построение разверток поверхностей.

По каждой из указанных тем имеются многочисленные примеры решения практических задач, а также контрольные вопросы и задачи для самопроверки качества освоения материала.

В конце учебного пособия приведены информационные ресурсы, рекомендуемые для изучения дисциплины.

При работе над пособием авторы использовали богатый опыт преподавания курса «Инженерная графика» в Уральском федеральном университете им. Б. Н. Ельцина.

Пожелания и замечания направлять по адресу: 620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19, УрФУ им. Б. Н. Ельцина, кафедра инженерной графики.

ВВЕДЕНИЕ

Начертательная геометрия является областью науки, занимающейся разработкой способов изображения пространственных геометрических фигур на плоском чертеже и приемов решения задач по взаимному расположению, взаимодействию, пересечению друг с другом и других по заданным проекционным изображениям этих форм на плоскости. Начертательная геометрия способствует не только развитию пространственного представления, визуализации, но и вырабатывает у студентов способности правильного прочтения, грамотного анализа геометрических объектов по их плоскому изображению, а также самостоятельного изготовления технических чертежей.

Начертательная геометрия является неотъемлемой частью дисциплины «Инженерная графика», которая относится к фундаментальным дисциплинам в подготовке инженерно-технических работников. Это одна из основных дисциплин профессионального цикла.

Теория начертательной геометрии составляет фундамент, на основании которого строятся технические чертежи инженерных конструкций, служит основой инженерной практики, геометрической и конструкторской подготовки инженера.

Задачи начертательной геометрии делятся на метрические и позиционные. Метрические задачи определяют метрические характеристики объектов, такие как натуральные величины отрезков, расстояния, углы наклона и т. п. Позиционные задачи решают вопросы относительного расположения геометрических объектов, например, принадлежность, параллельность, пересечение и т. п.

Решение задач способами начертательной геометрии выполняется графическим путем.

Правила построения изображений, излагаемые в начертательной геометрии, основаны на методе проекций. Он дает возможность получать наглядные изображения проектируемых объектов.

Рассмотрение метода проекций начинают с построения проекций точки как простейшего геометрического объекта, из совокупности которых состоят все остальные геометрические формы.

1. ПОСТРОЕНИЕ ПРОЕКЦИЙ ТОЧКИ, ПРЯМОЙ ЛИНИИ

Точки и прямые линии относятся к основным простейшим элементам геометрии. Они являются базовыми составными частями проекций геометрических объектов начертательной геометрии. Графическим методом, который используют для получения проекций объекта на плоскости проекций, является *метод проекций*.

1.1. Метод проекций

Проекции получают при помощи проецирующих лучей, проходящих через каждую точку объекта до пересечения с плоскостью проекций. Проекции позволяют представить форму и размеры реально существующего предмета.

Виды проекций в начертательной геометрии в зависимости от направления проецирующих лучей делятся на центральные, параллельные и прямоугольные. *Центральные проекции* получают при проведении проецирующих лучей через некоторый центр проекций, способами центрального проецирования выполняют перспективные изображения. Преимуществом этого метода является большая наглядность, а недостатком – сложность построения и искажение формы и размеров предмета.

Параллельные проекции получают проецирующими лучами, параллельными некоторому направлению проецирования, если центр проекций находится в бесконечно удаленной точке. Метод параллельного проецирования используется на практике для построения наглядных аксонометрических проекций и позволяет получить изображение, более соответствующее оригиналу по форме и размерам. Для выполнения чертежей применяется, как правило, только частный случай параллельного проецирования – *ортогональное проецирование*.

Ортогональные проекции – это параллельные прямоугольные проекции на две или несколько плоскостей проекций, полученные проецирующими лучами, перпендикулярными этим плоскостям. Метод прямоугольного или ортогонального проецирования обладает простотой и точностью построения и является основным методом построения машиностроительных чертежей.

Изображения предмета, состоящие из его проекций, выполненных в проекционной связи методом ортогонального проецирования, называются *комплексным чертежом*. Чертеж обладает свойством обратимости, т. е. дает возможность восстановить (реконструировать) в пространстве объект со всеми его позиционными и метрическими характеристиками.

1.2. Ортогональные проекции точки

На рис. 1.1 изображены три взаимно перпендикулярные плоскости проекций: π_1 – горизонтальная плоскость проекций; π_2 – фронтальная плоскость проекций; π_3 – профильная плоскость проекций. Линии пересечения этих плоскостей образуют оси координат OX , OY , OZ .

Рассмотрим положение точки A в прямоугольной системе координат. Расстояние от точки до плоскостей проекций называют координатами точки A (x , y , z).

Проецирующие лучи, проведенные из точки A перпендикулярно соответствующим плоскостям проекций, определяют три проекции точки: горизонтальную (A_1), фронтальную (A_2), профильную (A_3).

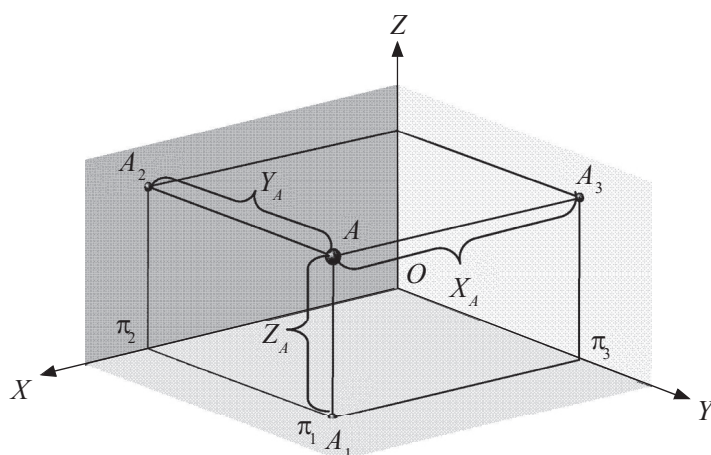


Рис. 1.1. Изображение точки A и ее проекций в прямоугольной системе координат

Для перехода от пространственного изображения к плоскому чертежу плоскость π_1 поворачивается вокруг оси X , а плоскость π_3 – вокруг оси Z до совмещения с фронтальной плоскостью проекций π_2 .

Линии, соединяющие разноименные проекции точек и перпендикулярные осям координат, называются линиями проекционной связи: A_1A_2 ; A_2A_3 ; A_1A_3 .

Такой чертеж, на котором проекции геометрического объекта изображены при совмещенном положении плоскостей проекций, принято называть эпюром Монжа – в честь французского ученого Гаспара Монжа, разработавшего этот метод (рис. 1.2).

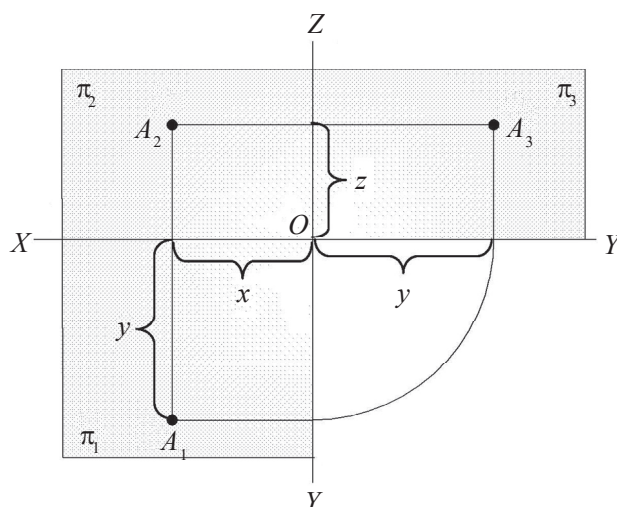


Рис. 1.2. Ортогональные проекции точки A

Таким образом:

1. По трем координатам можно построить три проекции точки.
2. Любые две проекции точки связаны линией проекционной связи, перпендикулярной соответствующей оси координат:

$$(A_1A_2 \perp OX); (A_2A_3 \perp OZ); (A_1A_3 \perp OY).$$

3. Если известны две проекции точки, то по ним всегда можно построить третью проекцию, следовательно, для задания положения точки в пространстве достаточно двух ее проекций.

1.3. Ортогональные проекции прямой линии

Положение прямой в пространстве может быть задано:

- координатами двух точек, принадлежащих этой прямой;
- координатами одной точки, принадлежащей прямой, и углами наклона прямой к плоскостям проекций.

Прямые относительно плоскостей проекций могут занимать общее или частное положение.

Прямые частного положения. К прямым линиям частного положения относятся проецирующие прямые, перпендикулярные одной из плоскостей проекций (рис. 1.3), и линии уровня, параллельные одной из плоскостей проекций (рис. 1.4).

Наименование проецирующей прямой или линии уровня соответствует наименованию той плоскости проекции, которой она перпендикулярна или параллельна.

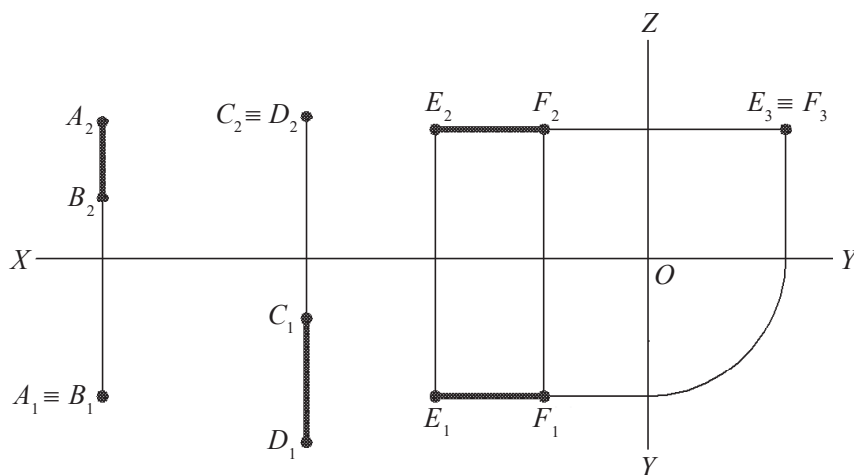


Рис. 1.3. Проецирующие прямые:

AB – горизонтально-проецирующая; CD – фронтально-проецирующая; EF – профильно-проецирующая

У проецирующих прямых одна из проекций вырождается в точку, а две другие равны натуральной величине отрезка и перпендикулярны соответствующим осям координат.

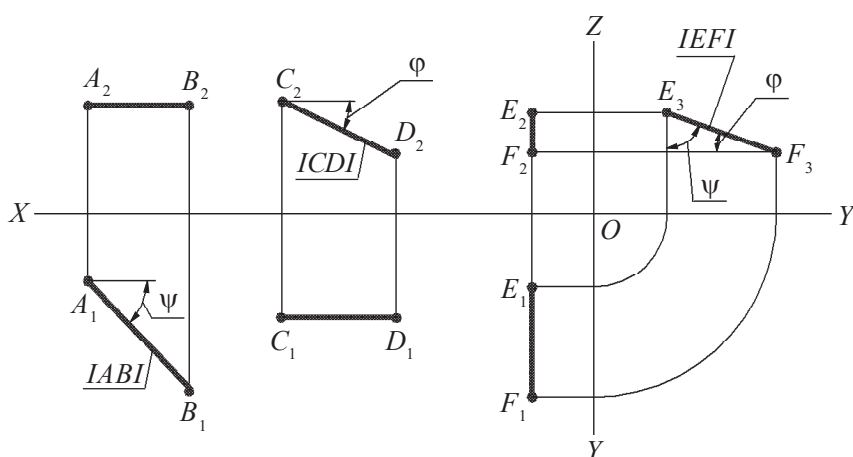


Рис. 1.4. Линии уровня:

AB – горизонтальная; CD – фронтальная; EF – профильная

Следует отметить, что некоторые свойства объекта сохраняются на его проекциях. Такие свойства называются *инвариантными* (независимыми) для данного способа проецирования. Инвариантные свойства проецирования используются в решении многих задач.

Например, проекции прямых частного положения сохраняют метрические характеристики этих прямых. Одна из проекций линий уровня равна натуральной величине отрезка и расположена относительно оси OX под углом φ или под углом ψ (φ – угол наклона прямой к горизонтальной плоскости проекций, ψ – угол наклона прямой к фронтальной плоскости проекций). Другие проекции располагаются параллельно соответствующим осям координат.

Прямая частного положения может быть расположена в плоскости проекций, такую прямую называют нулевой линией уровня. Проекция на другие плоскости проекций располагаются на оси координат.

Прямые общего положения. Прямая общего положения – прямая, не параллельная ни одной из плоскостей проекций (рис. 1.5).

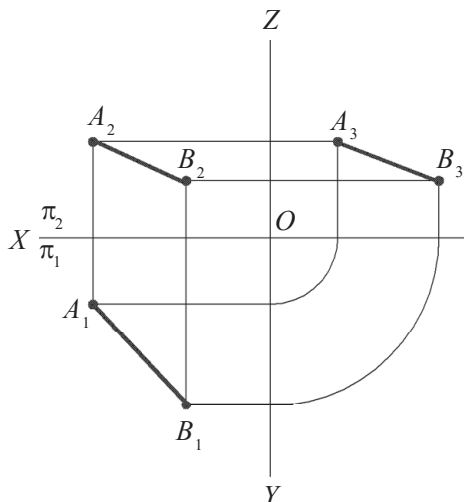


Рис. 1.5. Прямая линия общего положения

У прямой линии общего положения:
– проекция всегда меньше натуральной величины;
– ни одна из проекций не параллельна осям координат;

– углы наклона к плоскостям проекций проектируются с искажением (т. е. не равны натуральной величине).

Определить метрические характеристики такой линии по ее проекциям можно только с помощью дополнительных построений.

Один из приемов нахождения метрических характеристик геометрических объектов по их проекциям – использование способа прямоугольного треугольника: *длина отрезка прямой линии равна гипотенузе прямоугольного треугольника, один катет которого равен проекции отрезка на соответствующей плоскости проекций, а второй – разности координат концов данного отрезка до этой плоскости проекций.*

Задача. Определить натуральную величину отрезка AB и углы его наклона к плоскостям проекций – φ и ψ ; $A(25, 10, 20)$, $B(55, 45, 40)$ (рис. 1.6).

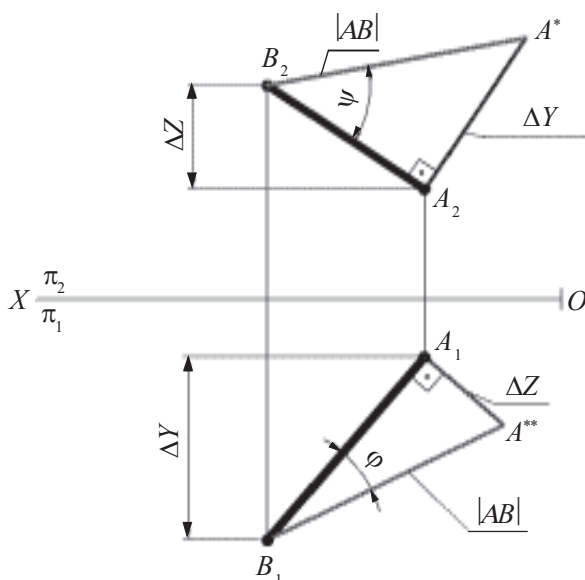


Рис. 1.6. Определение натуральной величины и углов отрезка прямой общего положения

Решение. Воспользуемся способом прямоугольного треугольника – выполним дополнительные построения: сначала определим разность удаления концов отрезка от $\pi_1 - \Delta Z$ и от $\pi_2 - \Delta Y$, затем построим два прямоугольных треугольника:

$$A_1B_1A^{**} (A_1B_1 \perp A_1A^{**}; A_1A^{**} = \Delta Z);$$

$$A_2B_2A^* (A_2B_2 \perp A_2A^*; A_2A^* = \Delta Y).$$

Длины гипотенуз B_1A^{**} и B_2A^* равны натуральной величине отрезка AB , а острые углы, лежащие напротив катетов ΔZ и ΔY , равны соответственно углам φ и ψ .

Одним из важных инвариантных свойств является свойство принадлежности: *проекция точки, принадлежащей прямой, должны принадлежать соответствующим проекциям этой прямой. Также проекции точки делят проекции отрезка в таком же отношении, в каком делит отрезок сама точка* (рис. 1.7).

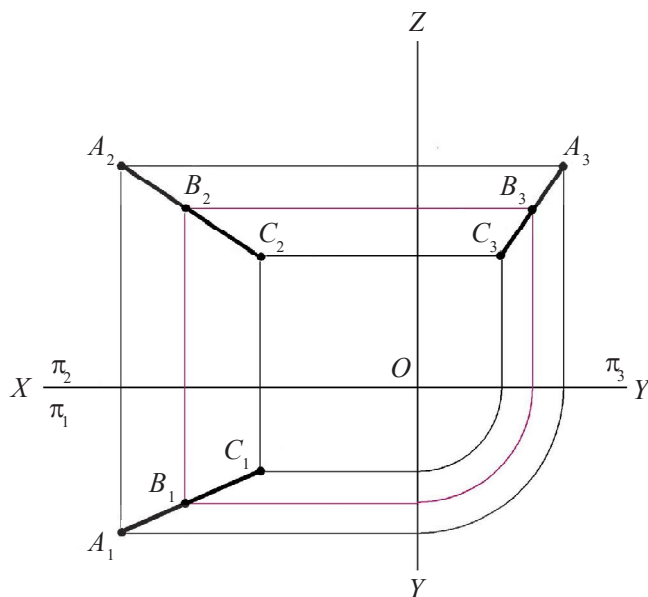


Рис. 1.7. Проекция точки B , принадлежащей отрезку прямой AC

1.4. Относительное положение прямых линий

Рассмотрим свойства проекций параллельных, пересекающихся, скрещивающихся прямых. Если прямые в пространстве параллельны, то параллельны их одноименные проекции (рис. 1.8, а).

Параллельные и пересекающиеся прямые лежат в одной плоскости. Проекция пересекающихся прямых пересекаются, а точки пересечения проекций располагаются на одной линии проекционной связи и являются проекциями точки пересечения прямых (рис. 1.8, б). Скрещивающиеся прямые не имеют общих точек и лежат в разных плоскостях. Проекция скрещивающихся прямых пересекаются в точках, которые называются конкурирующими. Эти точки лежат на одной линии проекционной связи и принадлежат разным прямым (рис. 1.8, в). С помощью конкурирующих точек в задачах определяют видимость прямых, например, ребер многогранника.

Особый случай представляют проекции перпендикулярных прямых. Ортогональные проекции перпендикулярных прямых строятся на основании инвариантного свойства: *при ортогональном проецировании прямой угол проецируется на плоскость проекций без искажения, если одна из его сторон параллельна этой плоскости проекций, а другая не перпендикулярна ей* (рис. 1.9).

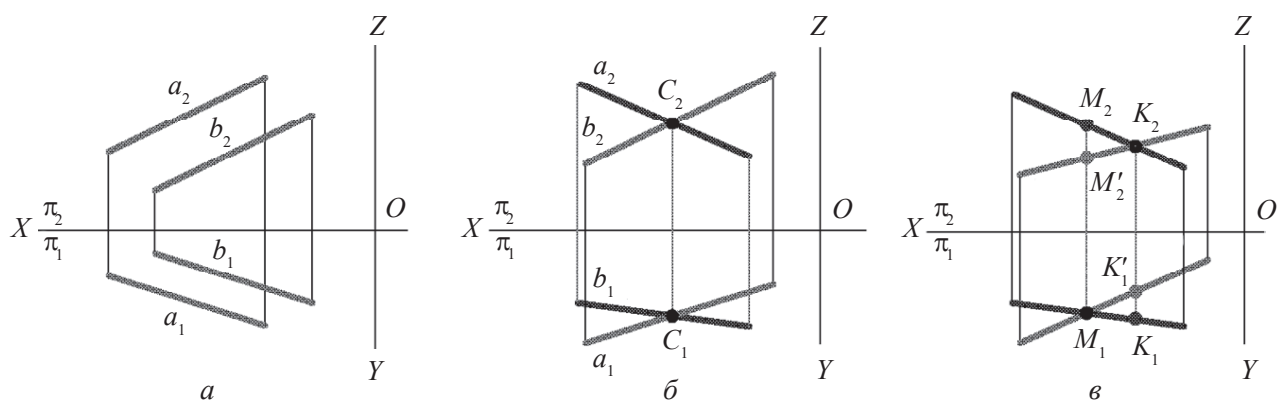


Рис. 1.8. Относительное положение прямых:
 a – параллельных; $б$ – пересекающихся; $в$ – скрещивающихся

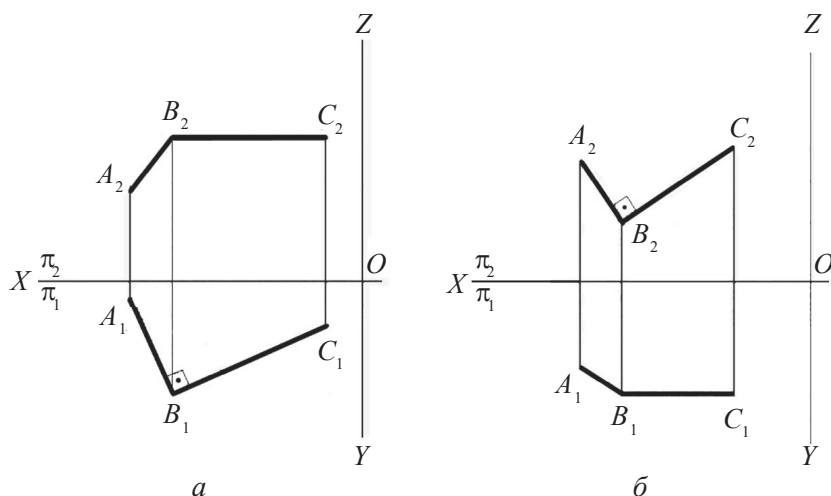


Рис. 1.9. Проекция перпендикулярных прямых:
 $a - BC \parallel \pi_1$; $б - BC \parallel \pi_2$

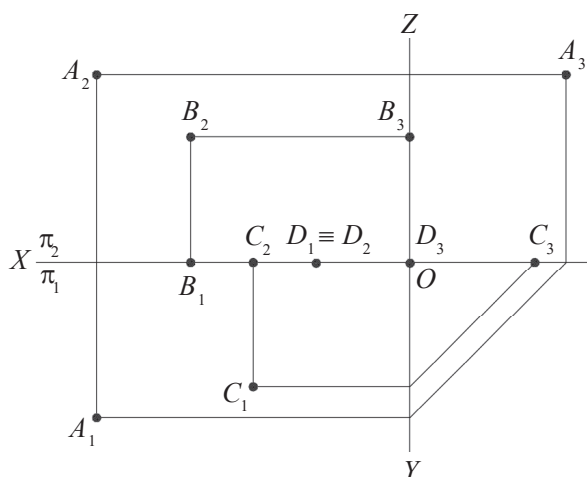
Это свойство проецирования прямого угла используется в решении множества задач, например, при построении проекций плоских фигур, перпендикуляра к плоскости и т. п. Взаимно перпендикулярные прямые лежат в одной плоскости и называются главными или особыми линиями плоскости.

На рис. 1.9 показаны примеры проекций перпендикулярных прямых, в которых одна прямая параллельна какой-либо плоскости проекций, а другая – прямая общего положения. Если по условию прямые AB и AC перпендикулярны, а сторона BC параллельна π_1 (рис. 1.9, a), то прямой угол проецируется без искажения на эту же плоскость проекций. Если BC параллельна π_2 (рис. 1.9, $б$), то прямой угол проецируется без искажения на плоскость проекций π_2 .

Далее приводятся примеры решения задач с использованием инвариантных свойств ортогонального проецирования.

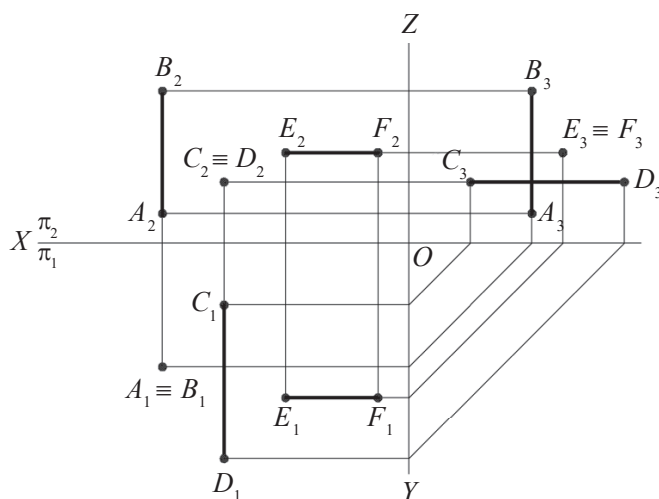
Задача 1. По заданным координатам построить три проекции точек: $A(50, 25, 30)$; $B(35, 0, 20)$; $C(25, 20, 0)$; $D(15, 0, 0)$.

Решение.



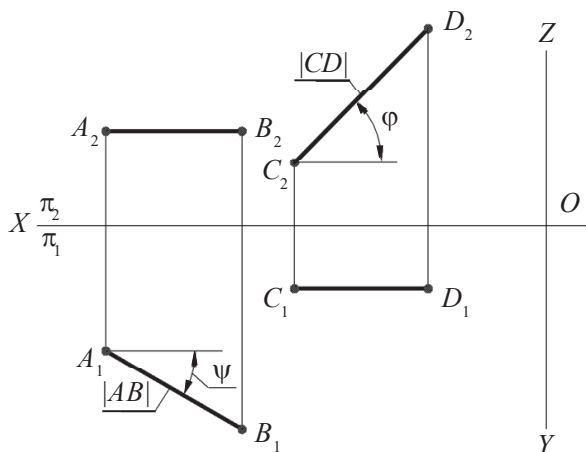
Задача 2. Построить три проекции горизонтально-проецирующей прямой AB ($|AB| = 20$ мм), фронтально-проецирующей прямой CD ($|CD| = 25$ мм), профильно-проецирующей прямой EF ($|EF| = 15$ мм); $A(40, 20, 5)$, $C(30, 10, 10)$, $E(20, 20, 15)$, $Z_A < Z_B$, $Y_D > Y_C$, $X_E > X_F$.

Решение.



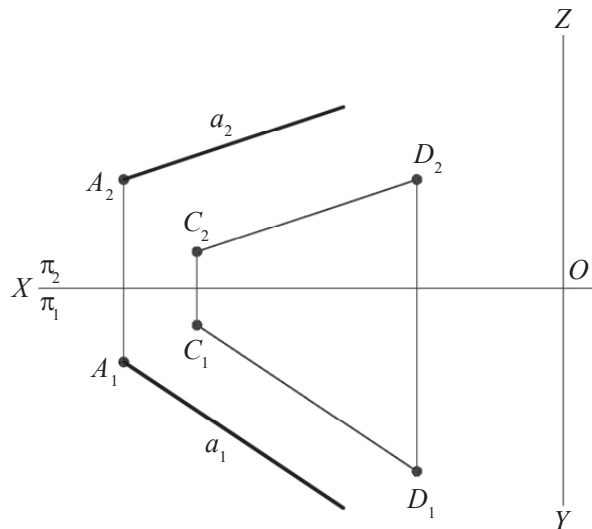
Задача 3. Построить две проекции горизонтальной прямой AB ($|AB| = 25$ мм, $\psi = 30^\circ$), фронтальной прямой CD ($|CD| = 30$ мм, $\varphi = 45^\circ$); $A(70, 20, 15)$, $C(40, 10, 10)$, $Y_A < Y_B$, $Z_D > Z_C$.

Решение.



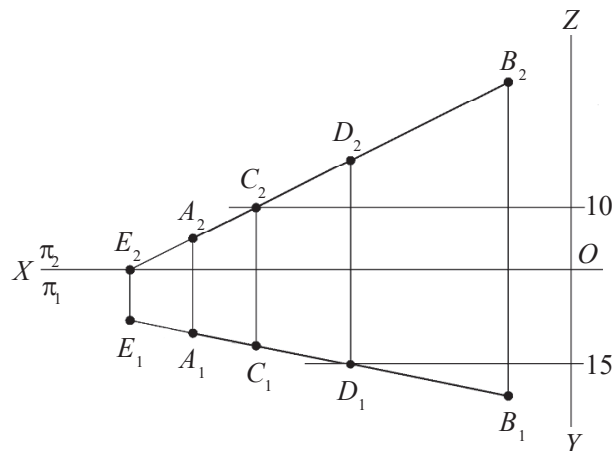
Задача 4. Построить две проекции прямой, проходящей через точку A параллельно отрезку CD ; $A(60, 10, 15)$, $C(50, 5, 5)$, $D(20, 25, 15)$.

Р е ш е н и е.



Задача 5. На прямой AB построить проекции точки C , удаленной от плоскости π_1 на 10 мм, точки D , удаленной от плоскости π_2 на 15 мм, и точки E , принадлежащей плоскости π_1 ; $A(60, 15, 10)$, $B(10, 20, 30)$.

Р е ш е н и е.



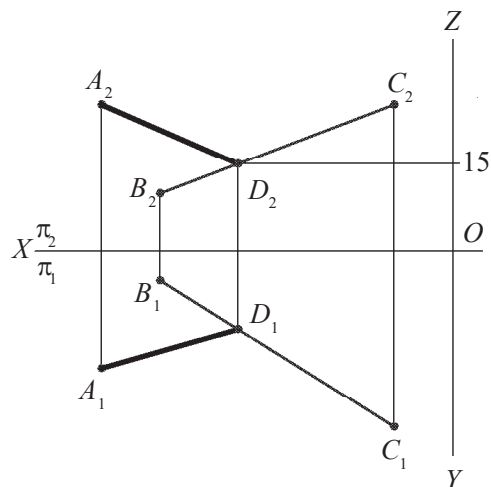
Примечания: 1. Воспользоваться инвариантным свойством: если точка принадлежит прямой, то проекция точки принадлежит проекции этой прямой.

2. Прямую, заданную отрезком AB , можно продлить в обе стороны до бесконечности.

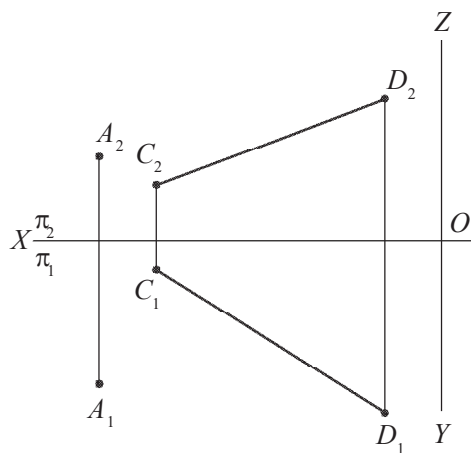
Точка E называется горизонтальным следом заданной прямой. *Следами прямой называются точки пересечения прямой с плоскостями проекций.*

Задача 6. Построить проекции прямой, проходящей через точку A и пересекающую прямую BC в точке D , удаленной от плоскости π_1 на 15 мм; $A(60, 20, 25)$, $B(50, 5, 10)$, $C(10, 30, 25)$.

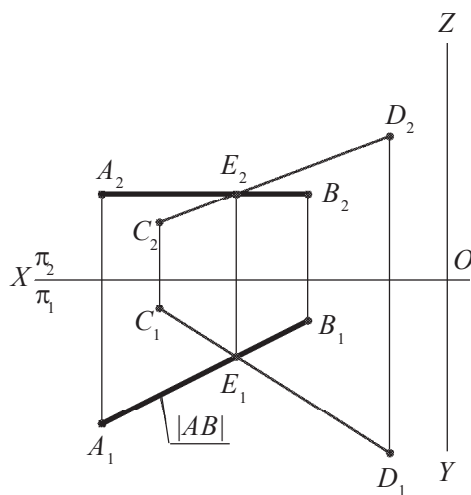
Решение.



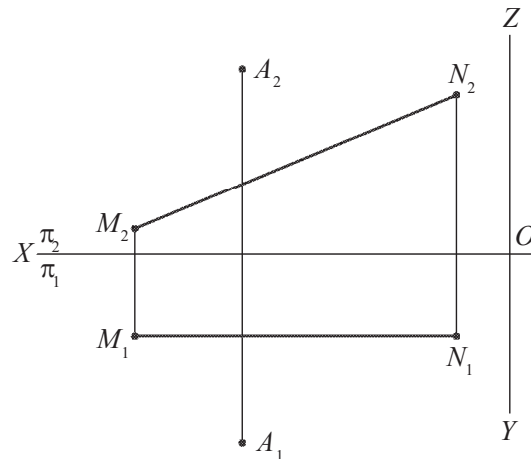
Задача 7. Построить проекции горизонтальной прямой AB ($|AB| = 40$ мм), пересекающей прямую CD ; $A(60, 25, 15)$, $C(50, 5, 10)$, $D(10, 30, 25)$.



Решение.



Задача 8. Построить проекции равнобедренного треугольника ABC , основание BC которого расположено на прямой MN , $|BC|=30$ мм; $A(50, 35, 35)$, $M(70, 15, 5)$, $N(10, 15, 30)$.

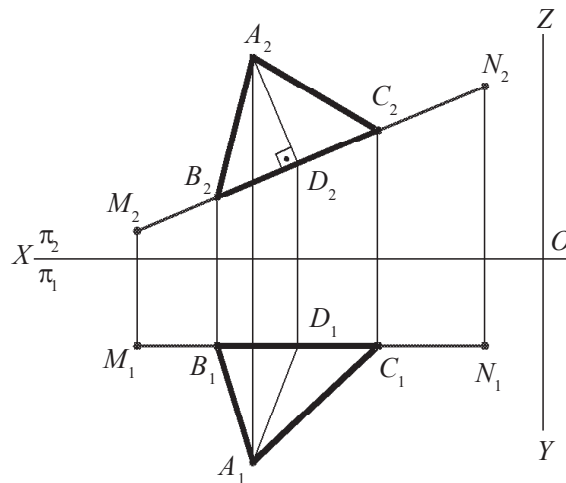


Решение. Высота равнобедренного треугольника перпендикулярна основанию и делит его пополам. Основание $BC \in MN$; $MN \parallel \pi_2$.

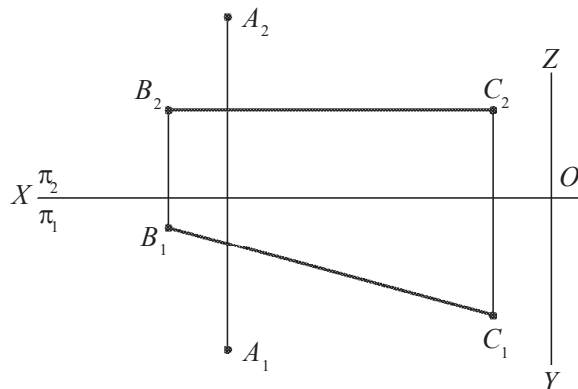
Для построения проекций высоты AD к прямой MN воспользуемся теоремой о проекциях прямого угла: *если одна из сторон прямого угла параллельна плоскости проекций, а вторая не перпендикулярна ей, то на эту плоскость прямой угол проецируется без искажений*.

Построение проекций высоты AD начинаем на плоскости π_2 . Из точки A_2 строим перпендикуляр A_2D_2 к M_2N_2 . Затем по линии проекционной связи от D_2 определяем проекцию D_1 .

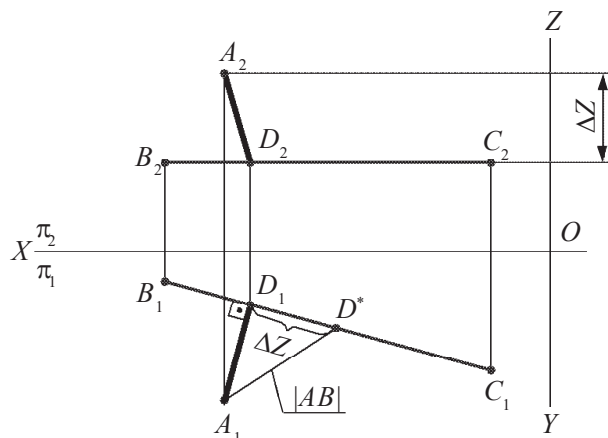
Фронтальная проекция B_2C_2 основания BC будет равна натуральной величине, а $B_2D_2 = D_2C_2$ (пропорции на проекциях сохраняются); B_1D_1 достраивается по линиям связи.



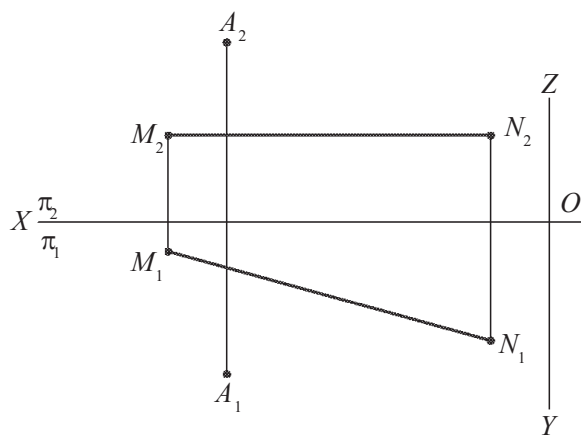
Задача 9. Определить расстояние от точки A до прямой BC ; $A(60, 10, 15)$, $B(10, 30, 15)$, $C(45, 30, 30)$.



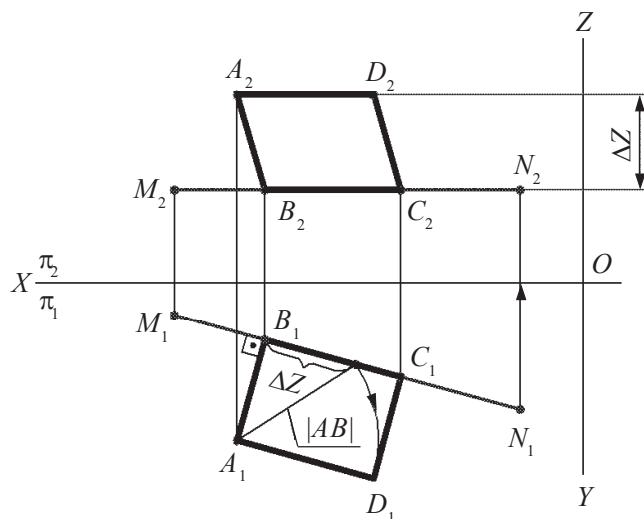
Решение. Расстояние от точки до прямой определяется перпендикуляром, опущенным из заданной точки на прямую. Построение перпендикуляра из точки A к BC начинаем с горизонтальной проекции. Поскольку прямая BC параллельна горизонтальной плоскости проекций, то $A_1D_1 \perp B_1C_1$. Проекция D_2 достраивается по линиям связи; AD – отрезок общего положения. Для определения его натуральной величины воспользуемся способом прямоугольного треугольника.



Задача 10. Построить проекции квадрата $ABCD$, сторона BC которого расположена на прямой MN ; $A(55, 25, 30)$, $M(65, 5, 15)$, $N(10, 20, 15)$.



Решение.



1. По условию $AB \perp BC$, $BC \in MN$, $MN \parallel \pi_1$, следовательно, прямой угол без искажения будет проецироваться на π_1 .
2. Строим $A_1B_1 \perp M_1N_1$, по линии связи находим B_2 .
3. По двум проекциям A_1B_1 и A_2B_2 определяем натуральную величину стороны квадрата способом прямоугольного треугольника: строим треугольник $A_1B_1B^*$ ($A_1B_1 \perp B_1B^*$, $|B_1B^*| = |\Delta z|$). Гипотенуза A_1B^* – натуральная величина стороны квадрата.
4. Так как по условию $BC \in MN$, $MN \parallel \pi_1$, то $|B_1C_1| = |A_1D_1| = |A_1B^*|$.
5. C_2 и D_2 строим по линиям связи.

Вопросы для самопроверки

1. Назовите виды проецирования в зависимости от направления проецирующих лучей.
2. Какой чертеж называется комплексным?
3. Как называются плоскости проекций?
4. Какие прямые сохраняют метрические свойства при ортогональном проецировании?
5. Сформулируйте свойство проецирования прямого угла.
6. Назовите признаки проекций прямых частного и общего положения.
7. Каким способом можно определить натуральную величину и углы наклона к плоскостям проекций отрезка прямой общего положения?
8. Как проецируются на эпюре параллельные, пересекающиеся, скрещивающиеся прямые?
9. Что такое след прямой?
10. Какие точки называются конкурирующими?

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Построить горизонтальную, фронтальную и профильную проекции точки A , удаленной от плоскости проекций π_1 на 40 мм, от плоскости π_2 – на 35 мм, от плоскости π_3 – на 35 мм.

Задача 2. По заданным координатам построить горизонтальную, фронтальную и профильную проекции точек $A(60, 20, 30)$, $B(45, 0, 45)$, $C(30, 40, 0)$, $D(15, 0, 0)$.

В прил. 1 приведено 30 вариантов заданий для самостоятельной работы по теме «Точка, прямая, плоскость». Каждый вариант включает три задачи, относящиеся к различным параграфам рассмотренной главы. Решение задач осуществляется только графическим методом.

2. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ ПОВЕРХНОСТИ

Поверхностью называют непрерывное множество точек или линий, ограничивающих некоторый объем или разделяющих пространство.

В аналитической геометрии поверхность определяется как непрерывное множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\Phi(x, y, z) = 0$. По виду уравнения поверхности разделяют на *алгебраические* и *трансцендентные*.

Если уравнение в левой своей части содержит многочлены n -степени, то поверхность называют *алгебраической n -порядка*. Например, плоскость является поверхностью первого порядка, сфера – поверхностью второго порядка и т. д.

К трансцендентным относят поверхности, которые описываются уравнениями, содержащими хотя бы одну неалгебраическую функцию (логарифмическую, показательную, тригонометрическую, например, $x = \cos x$).

Понятие поверхности тесно связано с понятием геометрического тела. *Геометрическим телом* называют любую замкнутую область пространства вместе с ее границей – *поверхностью*. Наиболее известными и востребованными в инженерной графике поверхностями являются границы тел в трехмерном евклидовом пространстве.

В начертательной геометрии, использующей только графический способ задания геометрических фигур, наиболее целесообразным является кинематический способ определения поверхности как совокупности всех последовательных положений линии, называемой *образующей*, движущейся в пространстве. В зависимости от вида образующей различают линейчатые (образующая – прямая линия) и нелинейчатые поверхности.

Если образующая перемещается в пространстве по некоторому закону, то образованная при этом поверхность называется *закономерной*. В противном случае образуется *незакономерная* поверхность.

2.1. Ортогональные проекции плоскости

Плоскость является одним из фундаментальных понятий в геометрии. Аналитическая зависимость координат принадлежащих ей точек выражается в форме многочлена первой степени: $Ax + By + Cz + D = 0$. Поэтому плоскость в математике определяется как поверхность первого порядка.

2.1.1. Способы задания плоскости на ортогональном чертеже

На чертеже плоскость может быть задана:

- проекциями трех точек, не лежащих на одной прямой (рис. 2.1, а);
- проекциями точки и прямой (рис. 2.1, б);
- проекциями двух пересекающихся прямых (рис. 2.1, в);
- проекциями двух параллельных прямых (рис. 2.1, г);
- плоской фигурой (рис. 2.1, д);
- следами плоскости (рис. 2.1, е).

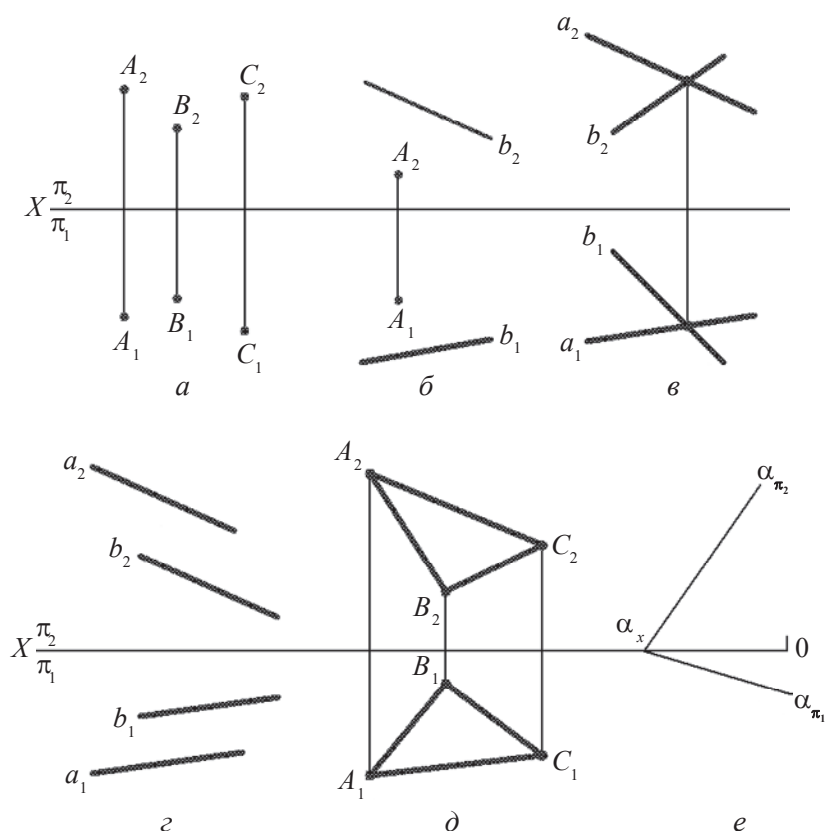


Рис. 2.1. Способы задания плоскости на чертеже

2.1.2. Следы плоскости

Следами плоскости называются линии, по которым плоскость пересекается с плоскостями проекций (рис. 2.2).

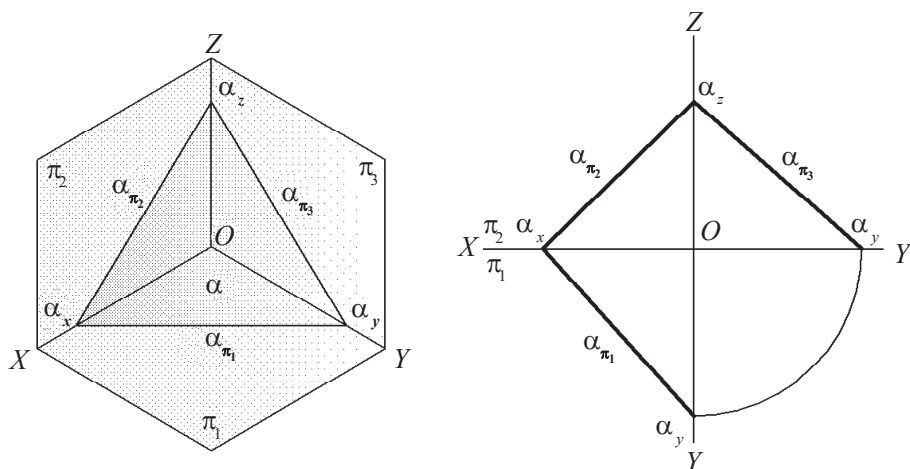


Рис. 2.2. Следы плоскости α :

$\alpha\pi_1$ – горизонтальный; $\alpha\pi_2$ – фронтальный; $\alpha\pi_3$ – профильный; $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ – точки схода следов

Выводы:

1. Достаточно легко перейти от одного способа задания плоскости к другому.
2. Если прямая лежит в плоскости, то следы прямой располагаются на следах плоскости.
3. Чтобы построить следы плоскости, заданной двумя прямыми, достаточно построить следы этих прямых, лежащих в плоскости, и соединить одноименные следы прямых.

2.1.3. Плоскости общего и частного положений

Плоскостью общего положения называется плоскость, которая не параллельна и не перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций. Плоскость общего положения имеет три следа: горизонтальный – α_{π_1} , фронтальный – α_{π_2} и профильный – α_{π_3} (рис. 2.2).

Плоскости частного положения – это плоскости, перпендикулярные или параллельные плоскости проекций. Они делятся на *проецирующие плоскости* и *плоскости уровня*.

Проецирующей называется плоскость, перпендикулярная какой-либо одной плоскости проекций. Отличительным свойством проецирующих плоскостей является то, что проекции всех точек или плоских фигур, лежащих в плоскости, располагаются на соответствующих следах, например, на рис. 2.3, *а* треугольник ABC занимает горизонтально-проецирующее положение, потому что горизонтальная проекция треугольника «вырождается» в отрезок на горизонтальном следе плоскости, а фронтальный след плоскости проходит перпендикулярно оси OX . Аналогично на рис. 2.3, *б* плоскость занимает фронтально-проецирующее положение, а треугольник ABC проецируется в отрезок, совпадающий с фронтальным следом.

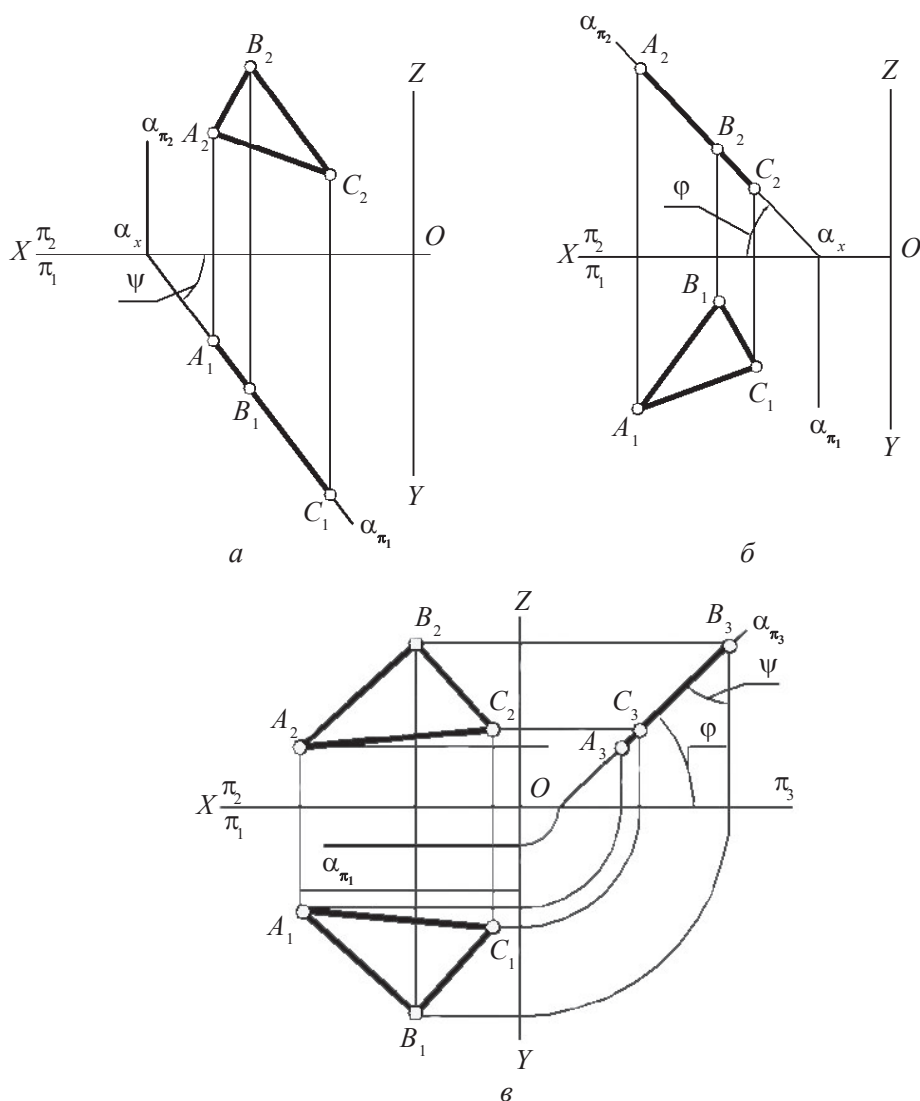


Рис. 2.3. Проецирующие плоскости, заданные треугольником ABC и следами:

а – горизонтально-проецирующая (плоскость, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций); *б* – фронтально-проецирующая (плоскость, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций); *в* – профильно-проецирующая (плоскость, перпендикулярная профильной плоскости проекций); φ – угол наклона плоскости к горизонтальной плоскости проекций; ψ – угол наклона плоскости к фронтальной плоскости проекций

Плоскостью уровня называются плоскости, параллельные плоскостям проекций (рис. 2.4).

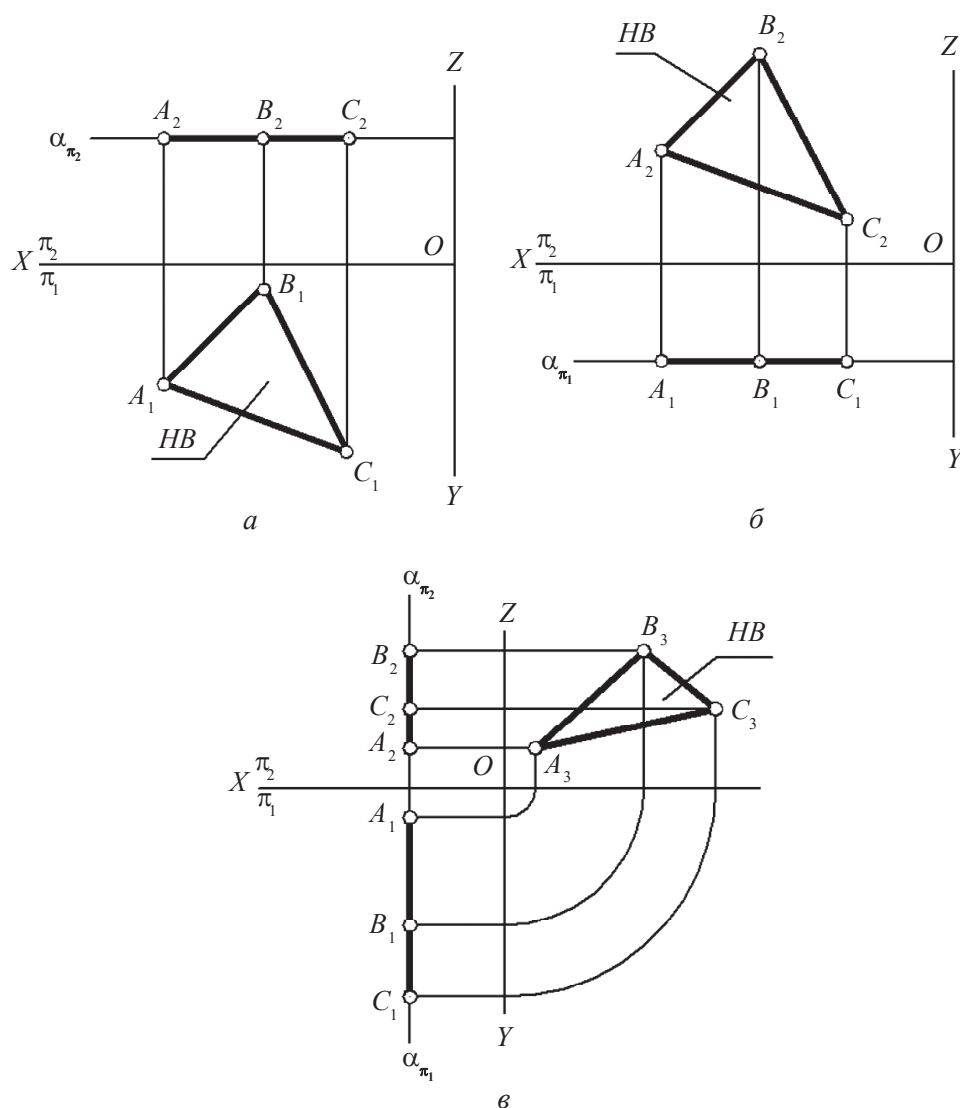


Рис. 2.4. Плоскости уровня, заданные треугольником ABC и следами:

a – горизонтальная (плоскость, параллельная горизонтальной плоскости проекций); $б$ – фронтальная (плоскость, параллельная фронтальной плоскости проекций); $в$ – профильная (плоскость, параллельная профильной плоскости проекций)

Инвариантным свойством плоскостей уровня является то, что фигуры, лежащие в плоскостях, параллельных какой-либо плоскости проекций, проецируются на эту плоскость без искажения, в натуральную величину, а на другой плоскости проекций проецируются на след, параллельный оси координат, в отрезок. Также при параллельном перемещении плоской фигуры относительно плоскости проекций ее проекция не изменяется.

2.1.4. Принадлежность прямой и точки плоскости

Прямая принадлежит плоскости, если она имеет с плоскостью хотя бы две общие точки (рис. 2.5, a).

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости (рис. 2.5, $б$).

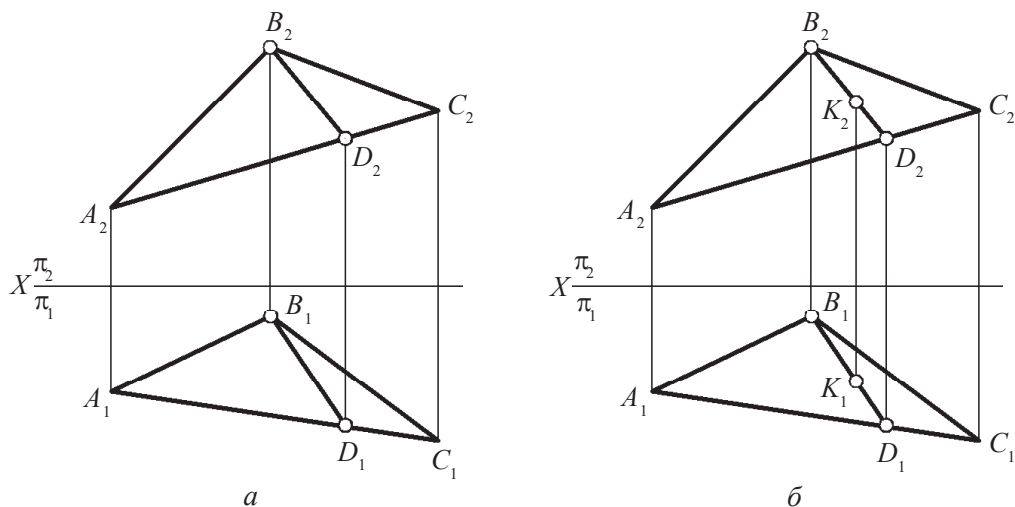
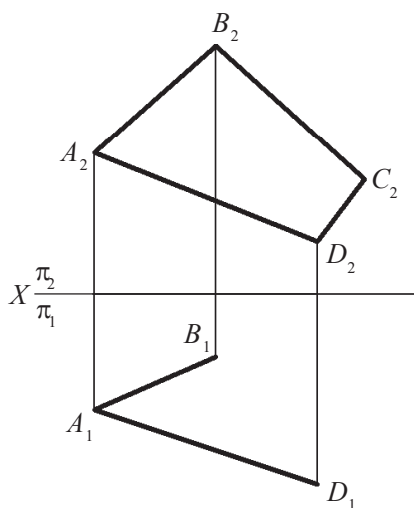
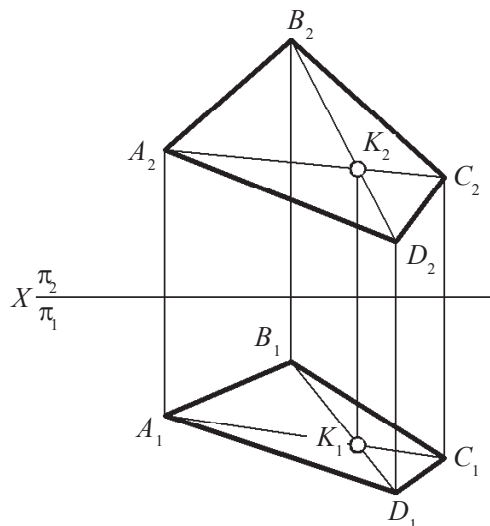


Рис. 2.5. Принадлежность прямой и точки плоскости, заданной треугольником ABC :
 a – прямой, заданной отрезком BD ; $б$ – точки K



Задача. Дана плоскость, заданная четырехугольником $ABCD$. Достроить горизонтальную проекцию вершины C ; $A(60, 20, 30)$, $B(35, 10, 50)$, $C(5, \dots, 25)$, $D(15, 35, 10)$.

Решение. Построим две проекции диагонали BD и фронтальную проекцию диагонали AC . Определим фронтальную проекцию точки пересечения диагоналей K_2 . Далее по проекционной связи и принадлежности точки K диагонали BD строим точку K_1 и проводим через две точки, A_1 и K_1 , горизонтальную проекцию диагонали AC .



2.1.5. Особые линии плоскости

В задачах на построение плоских геометрических фигур, например, прямоугольника, равнобедренного треугольника, ромба и т. п., используют особые или главные линии плоскости. К ним относятся линии уровня и прямые, перпендикулярные этим линиям уровня, которые называются линиями наибольшего наклона плоскости к плоскостям проекций.

Перпендикуляр к плоскости, или нормаль, строят на основании свойства проецирования прямого угла, используя признак перпендикулярности прямой и плоскости: *прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости, в качестве которых используют линии уровня плоскости.*

2.2. Многогранники

Многогранники – замкнутые поверхности, составленные из плоских многоугольников – граней.

Тела, ограниченные этими поверхностями, также называют многогранниками. Линии пересечения граней называются ребрами, а точки пересечения ребер – вершинами многогранника.

2.2.1. Призмы

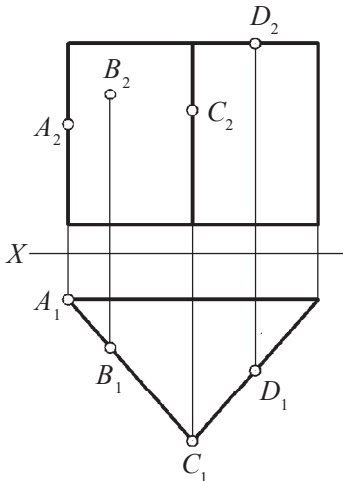


Рис. 2.6. Проекции прямой призмы: A, B, C, D – точки, принадлежащие поверхности призмы

Призмой называется многогранник, у которого боковые грани являются параллелограммами, а верхняя и нижняя грани (основания) – конгруэнтные многоугольники. Боковые грани *прямой призмы* – прямоугольники – перпендикулярны ее основаниям.

На рис. 2.6 основания прямой призмы параллельны горизонтальной плоскости проекций, боковые ребра перпендикулярны горизонтальной плоскости проекций. Следовательно, боковая поверхность призмы является *проецирующей* относительно π_1 , поэтому горизонтальные проекции всех точек, принадлежащих боковой поверхности призмы, расположены на проекции граней и совпадают с очерком на плоскости проекций π_1 .

2.2.2. Пирамиды

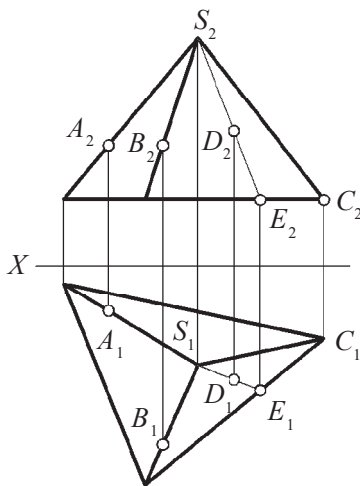


Рис. 2.7. Проекции пирамиды: A, B, C, D, E – точки, принадлежащие поверхности пирамиды

Пирамида – многогранник, у которого одна грань (основание) – многоугольник, а все остальные (боковые грани) – треугольники с общей вершиной (рис. 2.7).

На рис. 2.7 построены недостающие проекции точек по одной заданной проекции на поверхности треугольной пирамиды из условия принадлежности точек прямой или плоскости. Точки A и B принадлежат ребрам, точка C является вершиной, поэтому достаточно провести линии проекционной связи, если задана одна из проекций точки.

Для построения проекций точки D , принадлежащей грани пирамиды, если задана фронтальная проекция D_2 , следует провести через D_2 и вершину S_2 вспомогательную прямую линию S_2E_2 до пересечения с основанием в точке E_2 . Затем по линии проекционной связи находят горизонтальную проекцию E_1 на основании и проводят горизонтальную проекцию вспомогательной прямой S_1E_1 , на которой в проекционной связи находят горизонтальную проекцию D_1 .

2.3. Поверхности вращения

Поверхности вращения образуются вращением линии – *образующей* – вокруг неподвижной оси. В зависимости от вида образующей (прямая или кривая) поверхности вращения делятся на *линейчатые* (конус, цилиндр – рис. 2.8) и *нелинейчатые* (сфера, тор – рис. 2.9).

На чертеже поверхность может быть задана *очерком*. Очерком называются линии, ограничивающие область проекций поверхности или следы проецирующей поверхности, огибающей заданную поверхность. Проецирующей относительно плоскости проекций называется поверхность, все точки которой проецируются на эту плоскость проекций на одну линию.

Поверхность считается заданной, если можно однозначно определить принадлежность какой-либо точки данной поверхности.

Точка принадлежит поверхности, если она расположена на линии этой поверхности, по возможности простой формы – окружности или прямой.

Как правило, для построения точек на поверхности вращения используют окружности, которые каждая точка описывает при вращении вокруг оси вращения, эти линии называются параллелями. Параллели лежат в плоскостях, перпендикулярных оси вращения. Точки на очерковых линиях называют характерными. Рассмотрим алгоритм построения проекций точек на поверхностях вращения, представленных на рис. 2.8 и рис. 2.9.

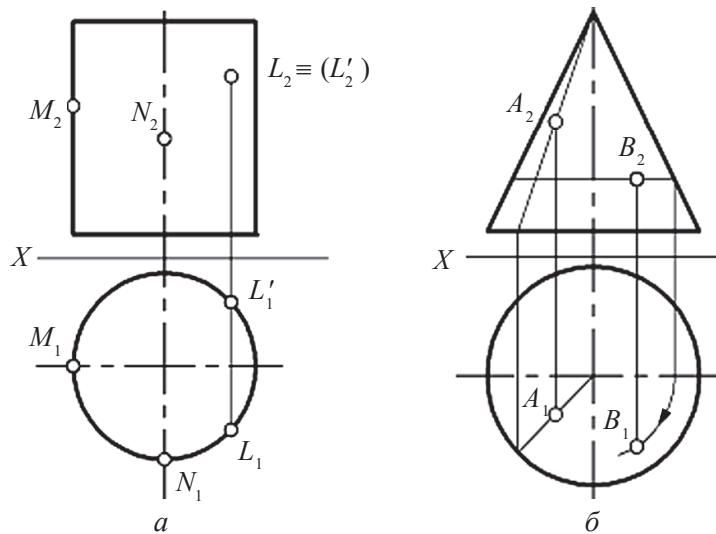


Рис. 2.8. Проекции прямых круговых цилиндра (а) и конуса (б):
А, В, М, N, L – точки, принадлежащие их поверхностям

На рис. 2.8, а изображены проекции *прямого кругового цилиндра*, цилиндрическая поверхность которого образована вращением прямолинейной образующей вокруг оси вращения параллельной образующей. Так как образующие прямого кругового цилиндра – горизонтально-проецирующие прямые, то поверхность цилиндра является проецирующей относительно плоскости π_1 и горизонтальные проекции всех точек, принадлежащие поверхности цилиндра, на плоскости π_1 совпадают с очерком цилиндра.

На рис. 2.8, б построены проекции *прямого кругового конуса*, коническая поверхность которого образуется при вращении прямолинейной образующей линии вокруг оси и пересекающей ось вращения в точке, которая называется вершиной конуса, основание которого – окружность. Коническая поверхность непроекцирующая. Если задана фронтальная проекция точки B_2 , то для построения горизонтальной проекции точки B_1 , принадлежащей поверхности прямого кругового конуса, через точку B_2 проводят параллель, измеряют радиус параллели от оси до очерка, проводят линию проекционной связи, находят точку пересечения окружности параллели и линии проекционной связи.

Можно построить точки на конической поверхности с помощью прямолинейной образующей; например, если задана проекция A_2 , то проводят прямую линию через A_2 и вершину конуса, находят точку пересечения образующей с основанием конуса, затем в проекционной связи строят горизонтальную проекцию образующей и проекцию A_1 .

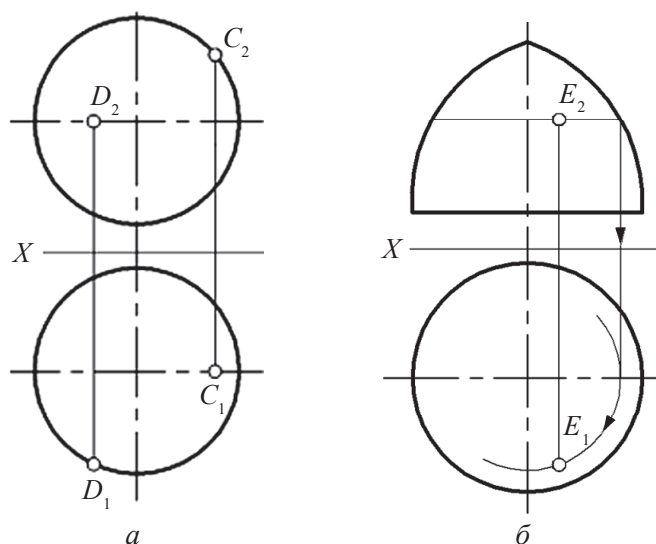


Рис. 2.9. Проекции сферы (а) и самопересекающегося тора (б):
D, C, E – точки, принадлежащие их поверхностям

На рис. 2.9, а построены проекции *сферы*, которая образуется вращением окружности вокруг диаметра, проекции сферы на любой плоскости проекций представляют собой окружность. Точки C и D являются характерными, потому что лежат на очерках. Точка C принадлежит очерку сферы на фронтальной плоскости проекций, эта линия называется главным меридианом, точка D также принадлежит очерку на горизонтальной плоскости проекций – экватору. Вспомогательные построения не выполняют, достаточно провести линии проекционной связи и найти недостающие проекции на соответствующих проекциях очерков.

На рис. 2.9, б заданы очерки *самопересекающегося тора*. Тор образуется при вращении окружности или ее дуги вокруг неподвижной оси, лежащей в плоскости этой окружности, но не проходящей через ее центр. Проекции точки E построены с помощью параллели. Профильные проекции точек можно построить по фронтальной и горизонтальной проекциям.

Вопросы для самопроверки

1. Перечислите способы задания плоскости на чертеже.
2. Назовите свойства проекций плоскостей частного положения.
3. Какие линии называются особыми линиями плоскости?
4. Сформулируйте признаки принадлежности точки, прямой линии плоскости.
5. Какая прямая называется нормалью плоскости?
6. Назовите признак перпендикулярности прямой и плоскости.
7. Что называется очерком поверхности?
8. Какая линия называется образующей линией?
9. Как называются поверхности в зависимости от вида образующей?
10. Сформулируйте признак принадлежности точки поверхности.
11. Какие поверхности относятся к проецирующим?
12. Сформулируйте алгоритм построения проекций точек на поверхностях вращения.
13. Перечислите виды многогранников.
14. Сформулируйте алгоритм определения видимости проекций многогранника.

Задачи для самостоятельного решения

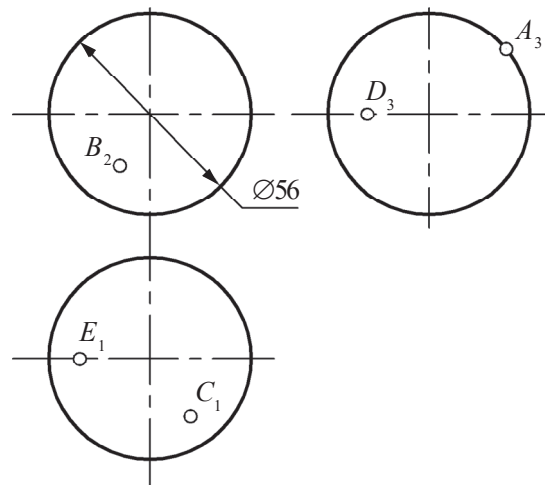
Задача 1. Построить проекции параллелограмма $ABCD$, занимающего горизонтально-проецирующее положение под углом 30° к плоскости проекций π_2 . Построить следы плоскости; $A(40, 5, 15)$, $B(30, ?, 30)$, $C(10, ?, 25)$.

Задача 2. Через прямую AB , провести горизонтально-проецирующую плоскость и фронтально-проецирующую плоскость. Плоскости задать следами. $A(60, 30, 10)$, $B(35, 10, 25)$.

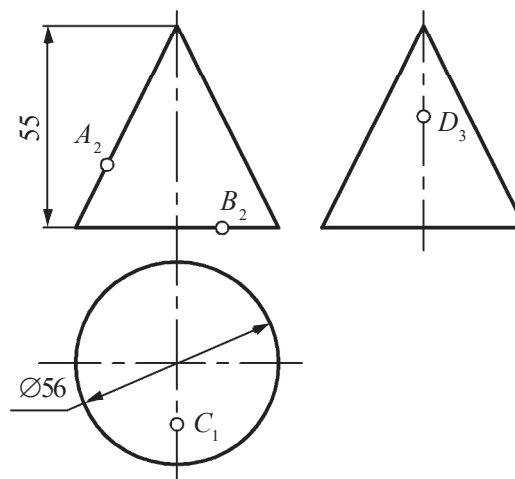
Задача 3. Построить проекции прямой правильной четырехугольной пирамиды $ABCD$, основанием которой является квадрат $ABCD$, если задана диагональ AC , а диагональ BD параллельна плоскости проекций π_2 . Высота пирамиды SO равна 60 мм; $A(80, 65, 75)$, $C(55, 10, 45)$.

Задача 4. Построить проекции прямой треугольной призмы, приняв треугольник ABC за ее основание. Высота призмы 55 мм; $A(60, 70, 5)$, $B(35, 80, 45)$, $C(20, 45, 15)$.

Задача 5. Построить отсутствующие проекции точек, принадлежащих поверхности сферы.



Задача 6. Построить отсутствующие проекции точек, принадлежащих поверхности конуса.



3. ПОСТРОЕНИЕ ПРОЕКЦИЙ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Одной из основных задач начертательной геометрии является построение проекций пересечения геометрических форм. Результатом пересечения может быть одна или несколько точек, в простейшем случае – линия, плоская фигура или более сложная поверхность.

3.1. Построение линии пересечения поверхности плоскостью

Линия пересечения поверхности плоскостью в общем случае является плоской кривой линией, состоящей из множества общих точек, принадлежащих обоим пересекающимся объектам.

В настоящем пособии рассматривается пересечение поверхности плоскостями частного положения, потому что построение сечения поверхности плоскостью общего положения требует преобразования проекций и некоторых вспомогательных построений. Если секущая плоскость является плоскостью частного положения (проецирующей или плоскостью уровня), то одна из проекций линии пересечения вырождается в прямую линию, совпадающую с проекцией следа секущей плоскости. Следовательно, одна проекция линии пересечения определена, необходимо построить вторую, а затем по двум проекциям можно построить и третью проекцию.

Другие проекции линии пересечения строятся по точкам. Построение начинают с *характерных*, или *опорных*, точек. К ним относят общие точки:

- лежащие на очерках поверхности;
- определяющие границу видимости;
- ближайшие и наиболее удаленные относительно плоскостей проекций;
- вершины кривых.

Промежуточные точки выбираются произвольно для уточнения характера кривой линии, эти точки строятся по признаку принадлежности точки поверхности, например, с помощью вспомогательных параллелей.

3.1.1. Пересечение поверхности цилиндра плоскостями

В сечении цилиндра плоскостью могут получаться окружность, эллипс, прямые (образующие). Например, при пересечении прямого кругового цилиндра фронтально проецирующей плоскостью фронтальная и горизонтальная проекции определены, потому что фронтальная проекция линии пересечения совпадает с проекцией следа плоскости, горизонтальная проекция совпадает с очерком, потому что цилиндрическая поверхность является проецирующей.

3.1.2. Пересечение поверхности сферы плоскостями

При пересечении сферы плоскостями всегда получается окружность, причем если секущая плоскость параллельна плоскостям проекций, то окружность проецируется на соответствующей плоскости проекций без искажения, т. е. в натуральную величину. Если секущая плоскость наклонена к плоскости проекций, то проекция окружности представляет собой эллипс. Если секущая плоскость является проецирующей, то окружность проецируется в прямую, совпадающую со следом плоскости.

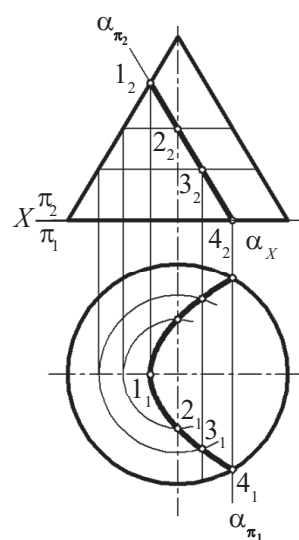
3.1.3. Пересечение поверхности прямого кругового конуса плоскостями

При пересечении конической поверхности плоскостями в зависимости от положения секущей плоскости получается пять сечений (коники):

- 1) если плоскость проходит через вершину, она пересекает коническую поверхность по двум образующим;
- 2) если плоскость пересекает все образующие под углом большим, чем угол наклона образующей, в сечении получается эллипс;
- 3) если плоскость перпендикулярна оси вращения конуса, в сечении получается окружность;
- 4) если плоскость параллельна двум образующим, в сечении получается гипербола;
- 5) если плоскость параллельна одной образующей, в сечении получается парабола; пример построения рассмотрен в следующей задаче.

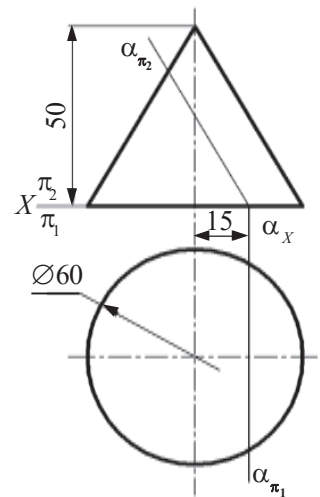
Задача. Построить проекции линии пересечения конуса с плоскостью, параллельной образующей конуса.

Решение. Плоскость α – фронтально-проецирующая, при этом она параллельна образующей конуса. Следовательно, линия пересечения ее с конусом – парабола.



Фронтальная проекция линии пересечения совпадает со следом плоскости α . Проекция характерных точек – 1_2 и 4_2 , проекции промежуточных точек – 2_2 и 3_2 .

Горизонтальные проекции этих точек строятся на пересечении линий проекционной связи с параллелями, на которых лежат соответствующие точки.



3.1.4. Построение линии пересечения многогранника с плоскостью

Линия пересечения многогранника с плоскостью есть многоугольник, вершины которого – точки пересечения ребер многогранника с плоскостью, а стороны – линии пересечения его граней с плоскостью.

На рис. 3.1 приведено построение сечения трехгранной пирамиды фронтально-проецирующей плоскостью α .

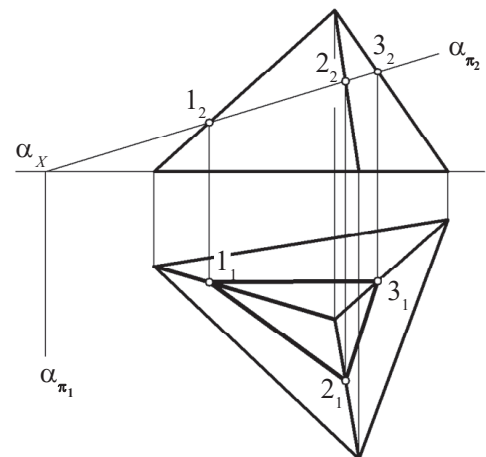


Рис. 3.1. Проекция пересечения пирамиды плоскостью

3.2. Построение сечения геометрических тел плоскостью

Для определения сечения геометрических тел сначала требуется построить проекции линии пересечения поверхности с плоскостью, а затем, используя способ замены плоскостей проекций, выполнить фигуру сечения. На рис. 3.2 выполнено построение натуральной величины сечения прямого кругового конуса плоскостью α . Построение натуральной величины сечения конуса выполняется на дополнительной плоскости, параллельной плоскости сечения α (способ замены плоскостей проекций).

Проводим ось симметрии параболы параллельно следу α_{π_2} . Натуральную величину сечения строим по ортогональным проекциям. На фронтальной проекции отрезки 1_2-2_2 , 2_2-3_2 и другие проецируются в натуральную величину. На горизонтальной проекции расстояния точек $2_1, 3_1, 4_1$ от оси симметрии параболы (a, b, c) равны соответствующим расстояниям точек $2_0, 3_0, 4_0$ на дополнительной плоскости.

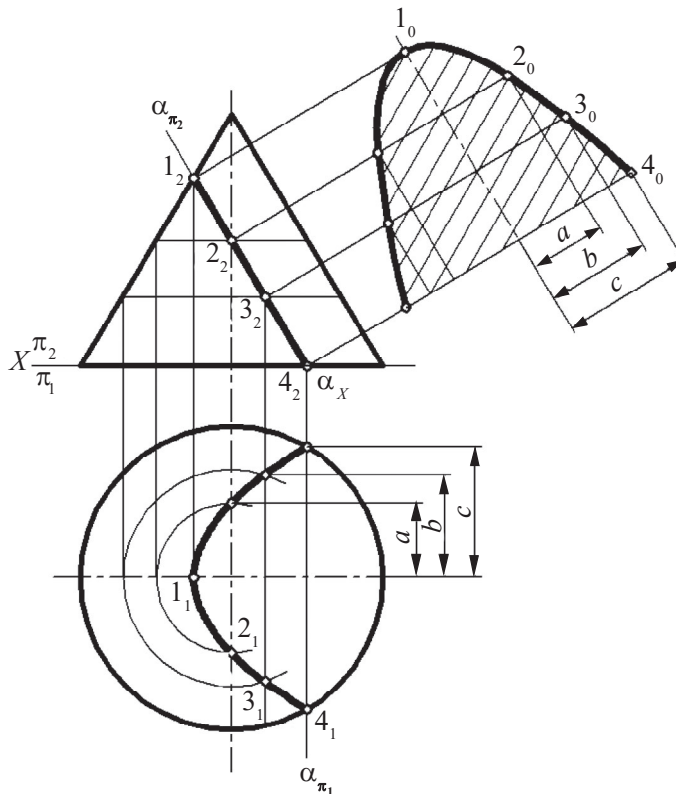


Рис. 3.2. Построение сечения прямого кругового конуса плоскостью

3.3. Построение выреза геометрического тела плоскостями, другими телами

Если вырез выполнен плоскостями, то линия выреза является сочетанием плоских линий: окружностей, эллипсов, парабол, гипербол, прямых линий и пр.

Если вырез выполнен фигурой, порядок которой 2 и больше (например, цилиндрической поверхностью), то линия выреза в общем случае – пространственная кривая линия.

Графически задача сводится к построению общих точек, принадлежащих поверхности и плоскостям (поверхностям), образующим вырез.

Алгоритм решения:

1. Определить название и расположение плоскостей выреза относительно плоскостей проекций.

2. Определить характер линий пересечения поверхности плоскостями.
3. Обозначить и построить проекции характерных точек на очерке поверхности, на линиях пересечения плоскостей выреза, экстремальные точки.
4. Обозначить и найти проекции дополнительных, промежуточных точек, необходимых для построения.
5. Соединить построенные точки с учетом характера линий выреза.
6. Определить видимость линий.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

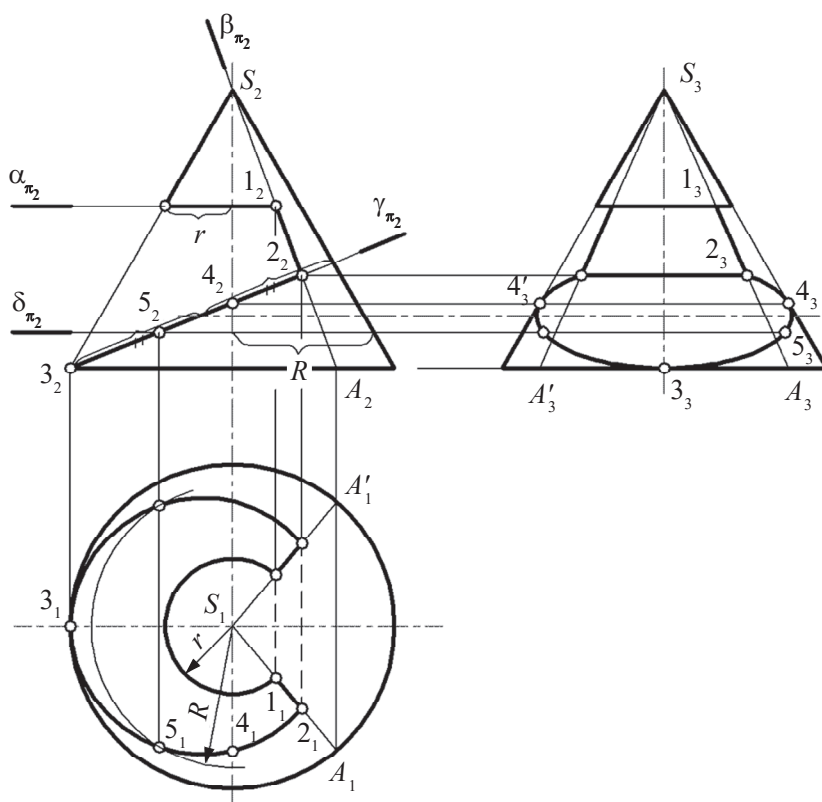
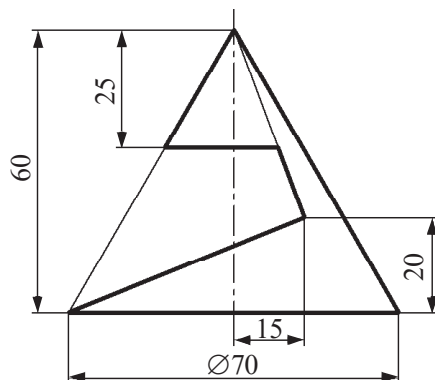
Задача 1. По заданной фронтальной проекции построить горизонтальную и профильную проекции конуса с вырезом.

Решение. Вырез выполнен тремя плоскостями:
 – α – горизонтальная плоскость, перпендикулярна оси конуса;
 – β – фронтально-проецирующая плоскость, проходит через вершину конуса;
 – γ – фронтально-проецирующая плоскость, наклонена к оси конуса и пересекает все образующие.

Сначала строим горизонтальную проекцию.

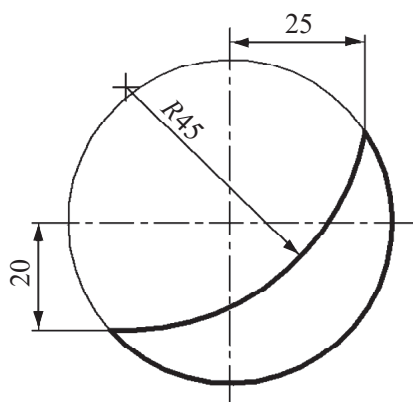
В сечении конуса плоскостью α получается часть окружности, которая проецируется на горизонтальную плоскость проекций в натуральную величину. Радиус окружности равен расстоянию от оси конуса до очерковой образующей.

В сечении конуса плоскостью β получаются прямые линии – образующие. Строим образующие по двум точкам: S – вершина конуса, A – точка на основании. Точки 1 и 2 строим в проекционной связи на образующих SA .



В сечении плоскостью γ получается часть эллипса. Эллипс строим по точкам: точка 3 принадлежит основанию конуса, точка 4 – очерковой образующей на профильной плоскости проекций, точка 5, промежуточная точка, находится с помощью параллели, на которой расположена точка.

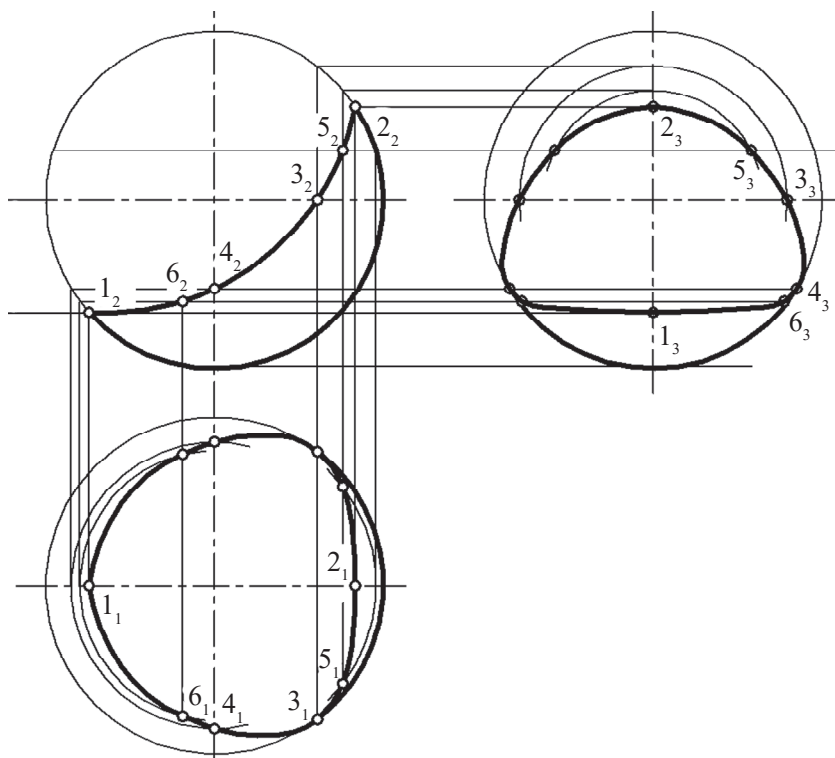
Профильную проекцию конуса с вырезом строим по проекционной связи с фронтальной и горизонтальной проекциями. Определяем видимость линий выреза и очерка конуса на горизонтальной и профильной плоскостях проекций.



Задача 2. По заданной фронтальной проекции построить горизонтальную и профильную проекции сферы диаметра 60 мм с вырезом.

Решение. Вырез выполнен фронтально-проецирующей цилиндрической поверхностью.

Линия выреза является пространственной кривой линией. Строим линию выреза по точкам. Характерные точки: точки 1 и 2 расположены на очерковой окружности главного меридиана сферы, точка 3 принадлежит экватору сферы, точка 4 находится на очерковой окружности в профильной плоскости проекций. Строим горизонтальные и профильные проекции характерных точек в проекционной связи. Построение промежуточных точек 5 и 6 выполняется с помощью параллелей сферы, на которых расположены точки.



Профильную проекцию сферы с вырезом строим в проекционной связи с фронтальными и горизонтальными проекциями.

Определяем видимость сферы. Видимую часть линии выреза и очерка сферы на горизонтальной и профильной плоскостях проекций обводим сплошной основной толстой линией.

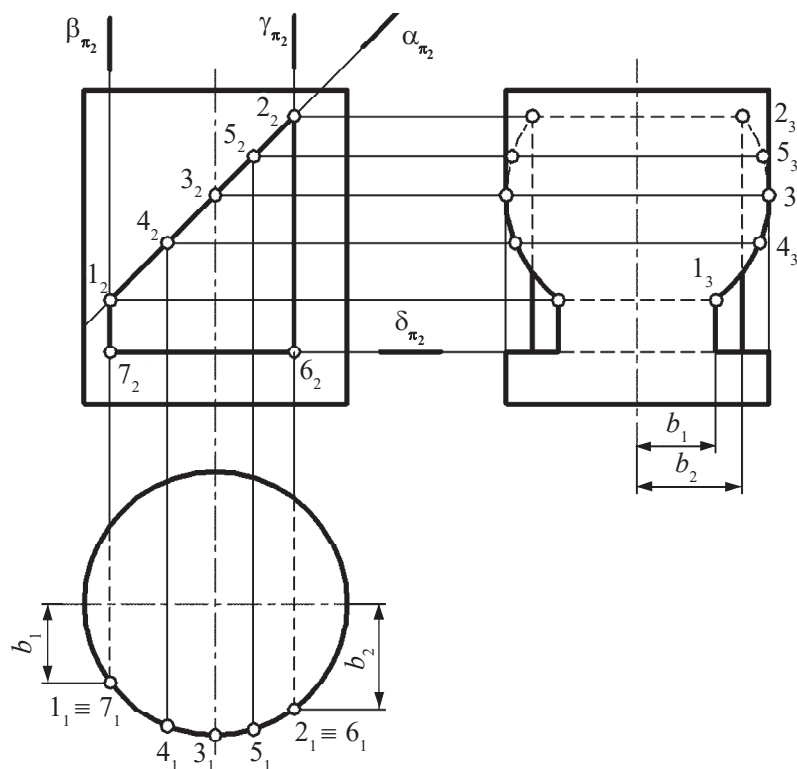
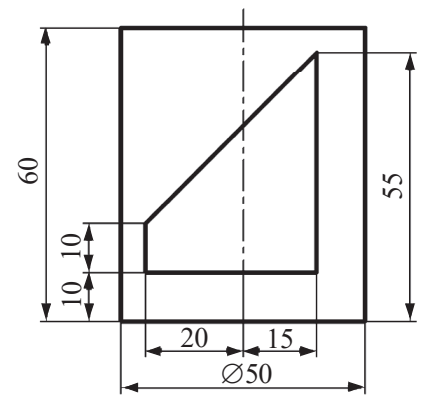
Задача 3. По заданной фронтальной проекции построить горизонтальную и профильную проекции цилиндра с вырезом.

Решение. Вырез выполнен четырьмя плоскостями:

- α – фронтально-проецирующая плоскость, наклонена к оси цилиндра и пересекает все образующие. В сечении цилиндра плоскостью α получается часть эллипса, который строим по точкам 1–5, точка 3 – характерная точка, расположена на очерке цилиндра в профильной плоскости проекций;

- β и γ – профильные плоскости, параллельные оси цилиндра, в сечении цилиндра получают отрезки прямых линий – образующие цилиндра, 1–7 и 2–6;

- δ – горизонтальная плоскость, перпендикулярная оси цилиндра, в сечении цилиндра получается окружность.



Цилиндрическая поверхность является горизонтально-проецирующей поверхностью, поэтому проекция линии выреза на горизонтальной плоскости проекций совпадает с очерком цилиндра. Находим горизонтальные проекции точек 1–7.

Профильную проекцию линии выреза строим по двум проекциям – горизонтальной и фронтальной в проекционной связи.

Определяем видимость цилиндра с вырезом. На профильной плоскости проекций точка 3 – граница видимости на очерке цилиндра. Линии невидимого контура, расположенные за очерком, обводим тонкой штриховой линией.

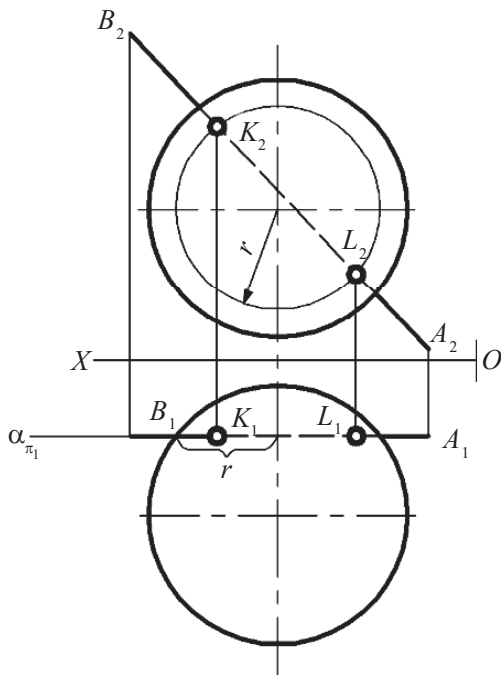
3.4. Пересечение поверхности и прямой линии

Прямая, пересекаясь с поверхностью, имеет с ней общие точки – точки пересечения. Для определения точек пересечения используют вспомогательные секущие плоскости – посредники.

Алгоритм решения:

1. Построить проекции вспомогательной секущей плоскости – проецирующей или плоскости уровня, проходящей через заданную прямую. При этом одна проекция прямой совпадет со следом секущей плоскости.
2. Построить проекции линии пересечения этой плоскости с заданной поверхностью.
3. Определить точки пересечения заданной прямой с построенной линией пересечения.
4. Определить видимость участков прямой.

Вспомогательную плоскость выбирают, как правило, в частном положении и таким образом, чтобы проекции линии пересечения ее с заданной поверхностью были простыми в построении – окружностями или прямыми линиями.



Задача. Построить проекции точек пересечения прямой AB со сферой и определить видимость прямой.

Решение.

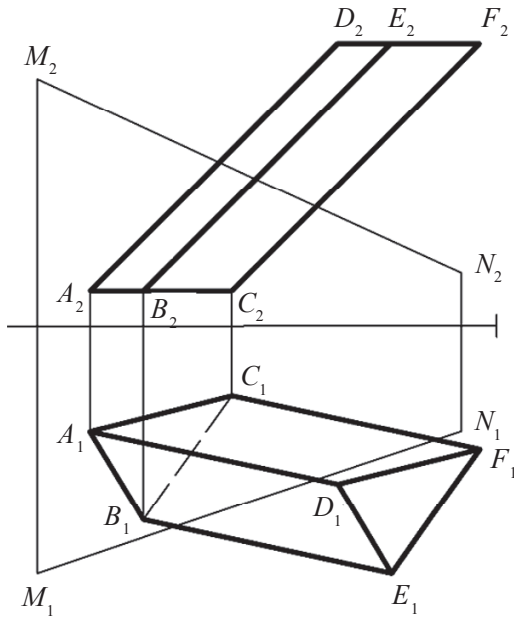
1. Через прямую AB проведем фронтальную плоскость – посредник α . Зададим ее следом α_{π_1} .
2. Строим проекции линии пересечения плоскости α со сферой. Это окружность с радиусом r .
3. Определяем фронтальные проекции точек пересечения этой окружности с прямой – K_2, L_2 . По линиям связи достраиваем горизонтальные проекции точек – K_1, L_1 .
4. Определяем видимость. На плоскости π_1 участок внутри сферы K_1, L_1 невидим. Участок K_1, B_1 виден, так как расположен выше экватора, а участок от L_1 до очерка сферы невидим, так как он расположен ниже экватора. На фронтальной проекции прямая видима только вне очерка сферы.

Вопросы для самопроверки

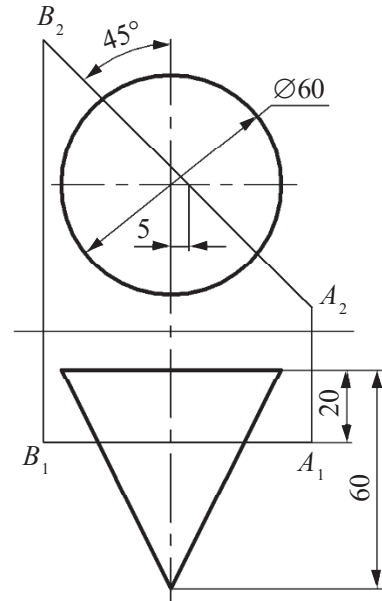
1. Какие точки на поверхности называются характерными?
2. Перечислите линии пересечения цилиндрической поверхности плоскостями.
3. Сформулируйте алгоритм определения точек пересечения прямой линии с поверхностью.
4. Какая линия получается при пересечении конуса плоскостью, параллельной оси вращения?
5. Какая линия получается при пересечении конуса плоскостью, параллельной одной образующей?
6. Как называется линия цилиндрического выреза на конусе?
7. Назовите линии пересечения многогранника плоскостями.

Задачи для самостоятельного решения

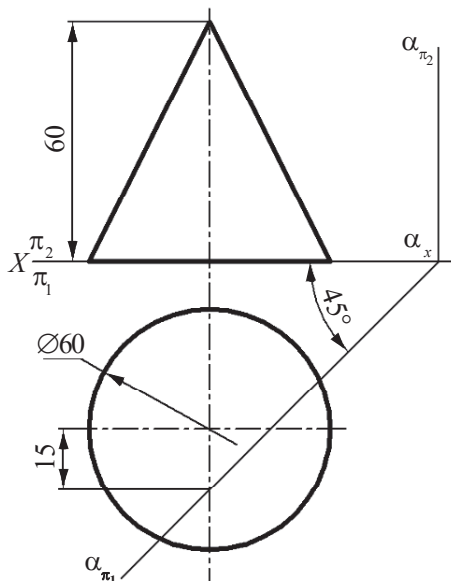
Задача 1. Построить проекции точек пересечения прямой с призмой и определить видимость. $A(115, 30, 10)$, $B(100, 55, 10)$, $C(75, 20, 10)$, $D(45, 45, 80)$, $M(130, 70, 70)$, $N(10, 30, 15)$.



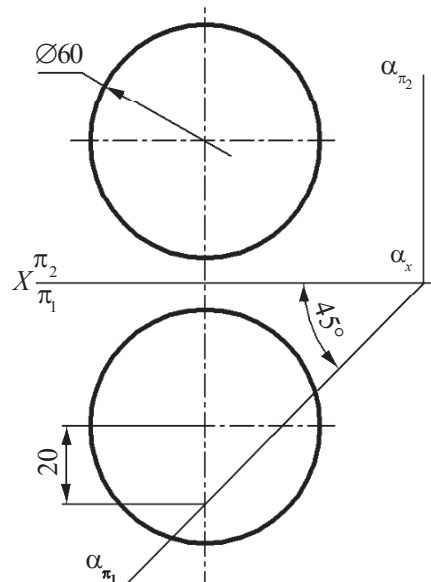
Задача 2. Построить проекции точек пересечения прямой с конусом и определить видимость.



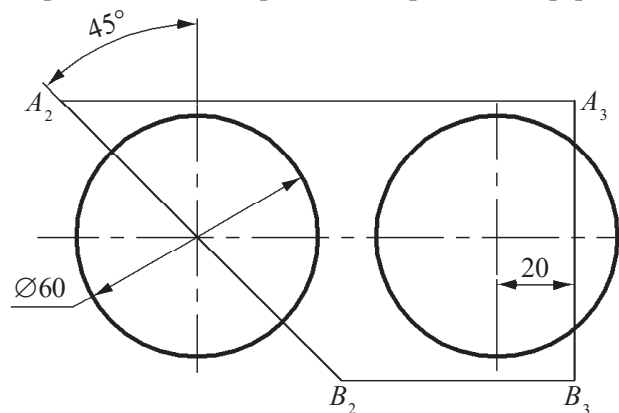
Задача 3. Построить проекции линии пересечения конуса с плоскостью – гиперболы и натуральную величину сечения.



Задача 4. Построить проекции линии пересечения сферы с плоскостью и натуральную величину сечения.

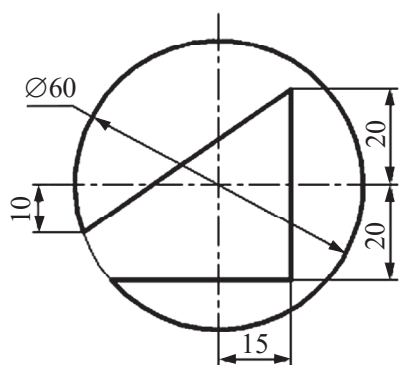


Задача 5. Построить проекции точек пересечения прямой со сферой и определить видимость.

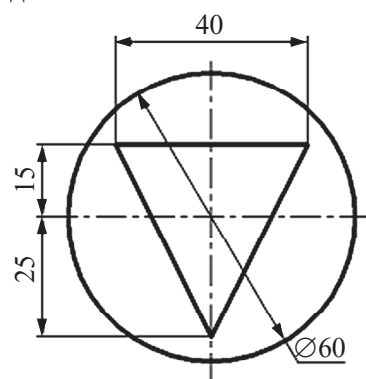


Задачи 6–11. По заданной фронтальной проекции построить горизонтальную и профильную проекции тел с вырезом.

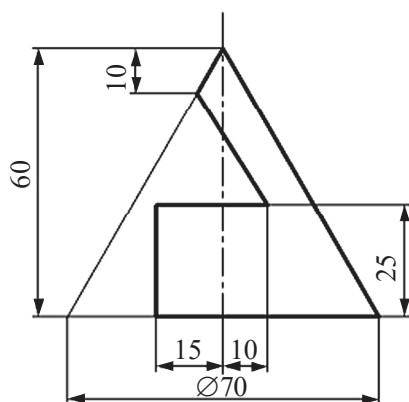
Задача 6.



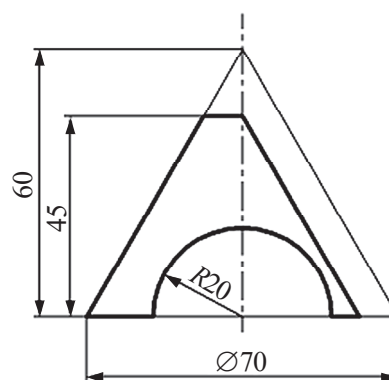
Задача 7.



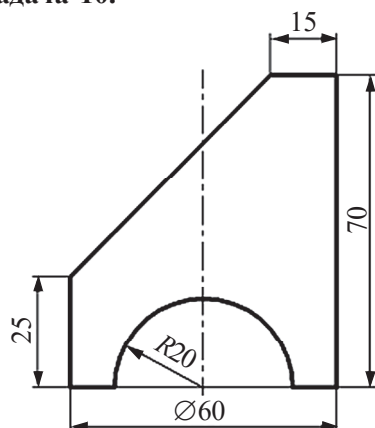
Задача 8.



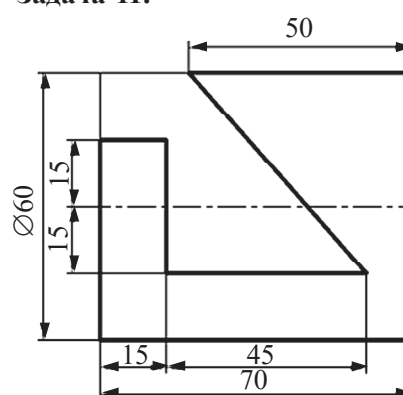
Задача 9.



Задача 10.



Задача 11.



4. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Изделия сложной формы можно представить как сочетание различных поверхностей вращения и многогранников. Границы между ними – это множество общих точек, принадлежащих одновременно обеим формообразующим поверхностям. Линия пересечения поверхностей в общем случае – пространственная кривая, проекции которой – плоские кривые. В частном случае проекции линии пересечения могут быть кривыми 2-го порядка (дугой окружности, эллипса, параболы, гиперболы) или прямыми линиями.

4.1. Общий прием построения линий взаимного пересечения поверхностей

Для нахождения проекций общих точек чаще всего используют либо плоскости-посредники, либо сферы-посредники. Посредники выбирают таким образом, чтобы они пересекали заданные поверхности по простым для построения линиям (прямые или окружности) и на пересечении этих линий были расположены точки, принадлежащие линии пересечения.

Алгоритм построения проекций точек, принадлежащих линии пересечения следующий:

- на чертеже задаем проекцию посредника;
- определяем линии пересечения каждой из поверхностей с этим посредником;
- обозначаем проекции точек пересечения построенных линий и принадлежащие заданным поверхностям.

Этот алгоритм повторяем несколько раз, чтобы получить необходимое количество точек для построения проекций линии пересечения. Расположение посредников и количество точек зависит от вида поверхностей, их взаимного расположения и крупности чертежа. Построенные точки соединяем с учетом видимости и характера линии пересечения.

4.1.1. Использование плоскостей частного положения в качестве посредников

Пример 1. Построение проекций линии пересечения поверхностей полусферы и цилиндра (рис. 4.1). Линия пересечения в данном случае является биквадратной кривой (кривой Вивиани).

Решение задачи начинаем с анализа чертежа заданных поверхностей. Поскольку обе поверхности являются поверхностями вращения, то их линия пересечения будет пространственной кривой.

Поверхность цилиндра является проецирующей относительно фронтальной плоскости проекций (ось цилиндра и его образующие перпендикулярны этой плоскости). Из этого следует, что все фронтальные проекции точек, принадлежащие поверхности цилиндра, будут расположены на окружности (фронтальной проекции цилиндра). Таким образом, фронтальная проекция линии пересечения совпадает с окружностью (проекцией цилиндра).

Решение задачи начнем с фронтальной плоскости проекций и обозначим на данной окружности общие точки, принадлежащие цилиндру и полусфере. Прежде всего обозначим обязательные для построения точки. Это самая высокая и самая низкая точки 1_2 и 6_2 , точка на границе видимости (обозначим одну из двух симметричных точек) 4_2 . Затем обозначим проекции промежуточных точек для уточнения характера линии пересечения. Их положение выбираем произвольно на длинных участках. Это точки 2_2 , 3_2 и 5_2 .

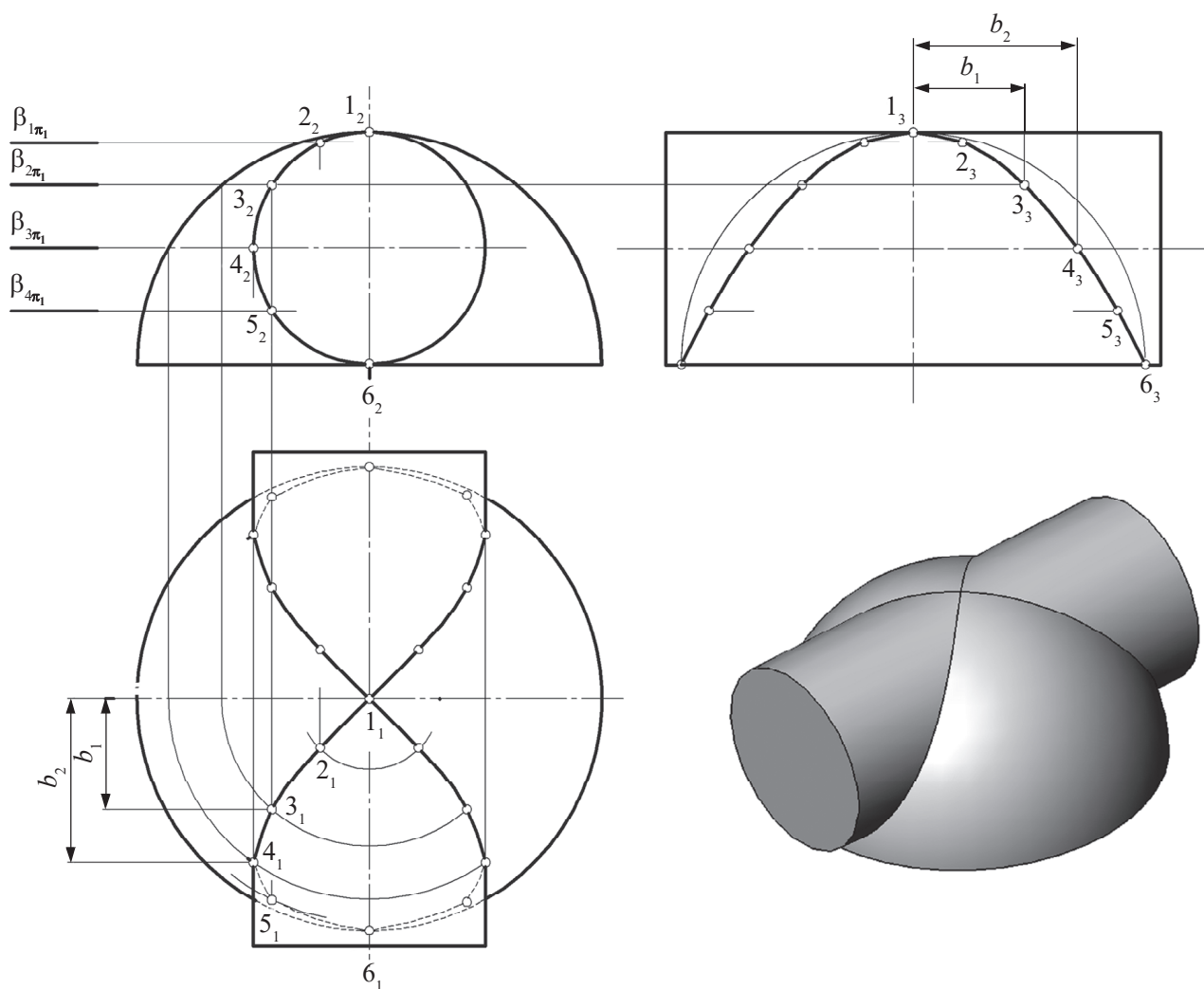


Рис. 4.1. Построение проекций линии пересечения полусферы с цилиндром

На следующем этапе решения задачи определяем, проекции каких из обозначенных точек можем построить без использования посредников. К таким точкам относятся точки 1 и 6. Точка 1 расположена на очерке полусферы и верхней образующей цилиндра, а точка 6 – на экваторе полусферы и нижней образующей цилиндра. Соответствующие проекции этих точек 1_1 и 6_1 на горизонтальной плоскости проекций и 1_3 и 6_3 на профильной строим по линиям связи.

Для построения проекций остальных обозначенных точек воспользуемся горизонтальными плоскостями-посредниками, проходящими через точки 2, 3, 4 и 5. Каждая из этих плоскостей пересекает цилиндр по прямым линиям (образующим цилиндра), а полусферу – по окружностям (параллелям). Обозначим их $\beta_1\pi_2$, $\beta_2\pi_2$, $\beta_3\pi_2$, $\beta_4\pi_2$.

Сначала строим горизонтальные проекции этих точек 2_1 , 3_1 , 4_1 , 5_1 , определяя их положение на пересечении соответствующих образующих цилиндра и параллелей полусферы. Профильные проекции точек 2_3 , 3_3 , 4_3 , 5_3 строим, используя линии связи, проведенные от соответствующих фронтальных проекций, и относительные координаты по оси $Y - b_1$, b_2 и т. д.

Соединяем построенные точки плавными линиями с учетом симметрии и видимости. На горизонтальной плоскости проекций видима будет та часть линии пересечения, которая расположена на фронтальной проекции выше точки 4_2 . Расположенная ниже точки 4_2 проекция линии пересечения на горизонтальной плоскости будет невидимой (обводим штриховой линией). Часть очерка полусферы на горизонтальной плоскости будет закрыта цилиндром, следовательно, как и невидимая, она тоже выполняется штриховой линией. На профильной проекции заданных поверхностей невидимая часть линии пересечения совпадает с видимой.

Пример 2. Построение горизонтальной и фронтальной проекций линии пересечения цилиндра и конуса и определение их видимости (рис. 4.2).

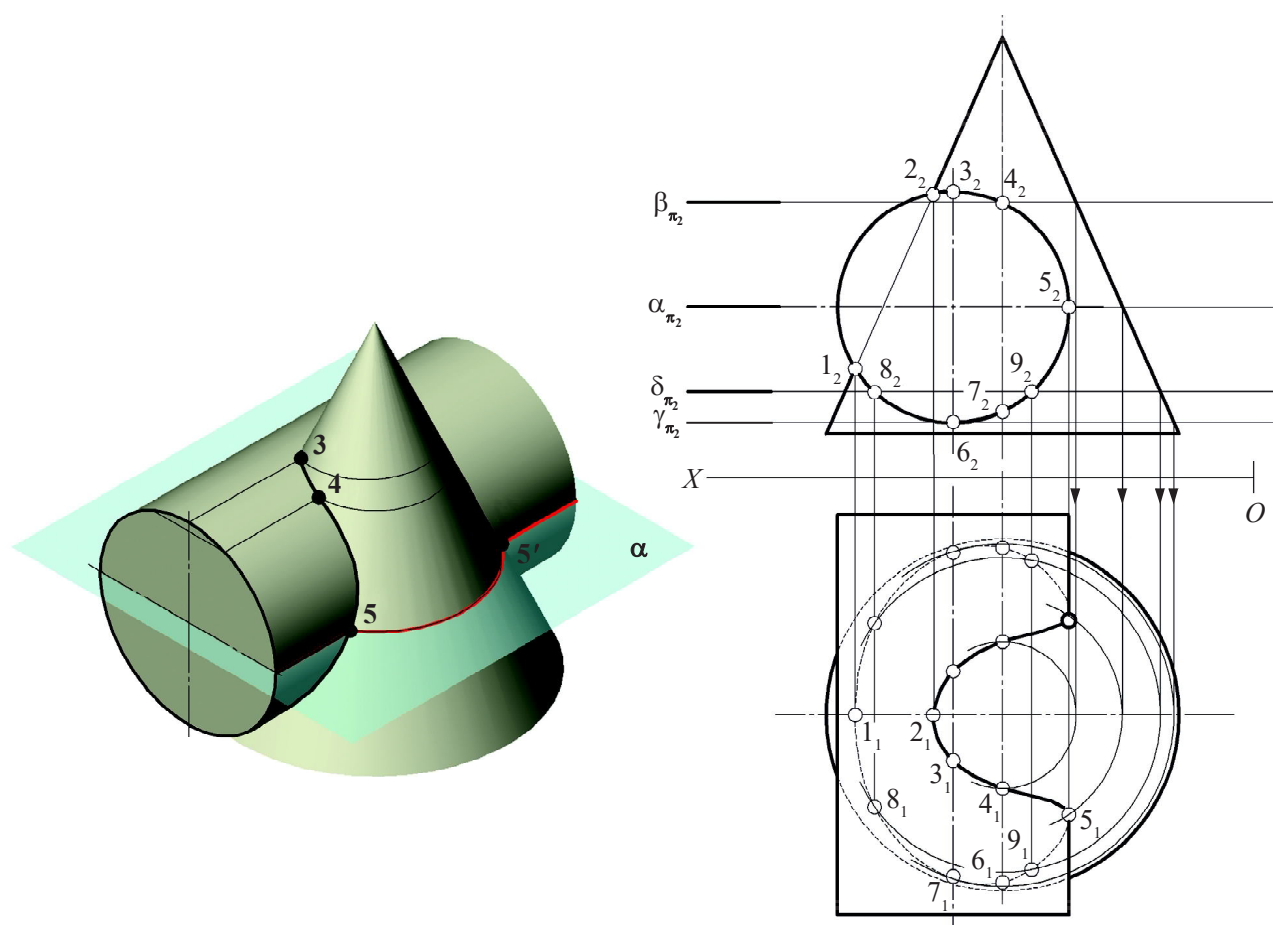


Рис. 4.2. Использование способа вспомогательных секущих плоскостей для построения проекций линии пересечения поверхностей конуса и цилиндра

Решение задачи начнем с анализа чертежа заданных поверхностей. Поверхность цилиндра является проецирующей относительно фронтальной плоскости проекций. В этой задаче проекция линии пересечения будет не полная окружность, а только та ее часть, которая является общей для конуса и цилиндра. Горизонтальную проекцию линии пересечения будем строить по точкам, фронтальные проекции которых предварительно обозначим на этой окружности.

Сначала обозначим точки на левой образующей конуса 1_2 и 2_2 , затем наивысшую точку 3_2 , 4_2 – точку на границе видимости для профильной проекции, 5_2 – точку на границе видимости для горизонтальной проекции, 6_2 – самую низкую точку проекции линии пересечения на π_2 . Еще добавим точку 7_2 на границе видимости для π_3 и две промежуточные точки для уточнения характера линии 8_2 и 9_2 , выбранные произвольно. Начинаем построение с определения горизонтальных проекций точек 1_1 и 2_1 , так как в этом случае достаточно провести линии связи до пересечения с горизонтальной проекцией образующей конуса.

Для построения проекций остальных точек следует воспользоваться плоскостями-средниками. В этом случае это будут горизонтальные плоскости α , β , γ , δ , проходящие через обозначенные точки. Каждая из плоскостей будет пересекать конус по параллели, проходящей через искомую точку, а цилиндр – по образующим. На пересечении построенных линий отметим горизонтальные проекции соответствующих точек. Проекция линии пересечения на горизонтальной плоскости будет симметричной фигурой, поэтому на чертеже обозначим точки только на одной ее половине. Соединим построенные точки плавной линией с учетом види-

мости. Участок линии, проходящей через точки $2_1, 3_1, 4_1, 5_1$ и симметричной ее части, будет видимый, поэтому соединяем его сплошной толстой линией, а остальную часть линии выполняем штриховой линией. Горизонтальную проекцию линии основания конуса внутри контура цилиндра выполняем штриховой линией, а оставшуюся часть – сплошной толстой.

Пример 3. Построение проекций линии пересечения конуса и цилиндра и определение видимости (рис. 4.3).

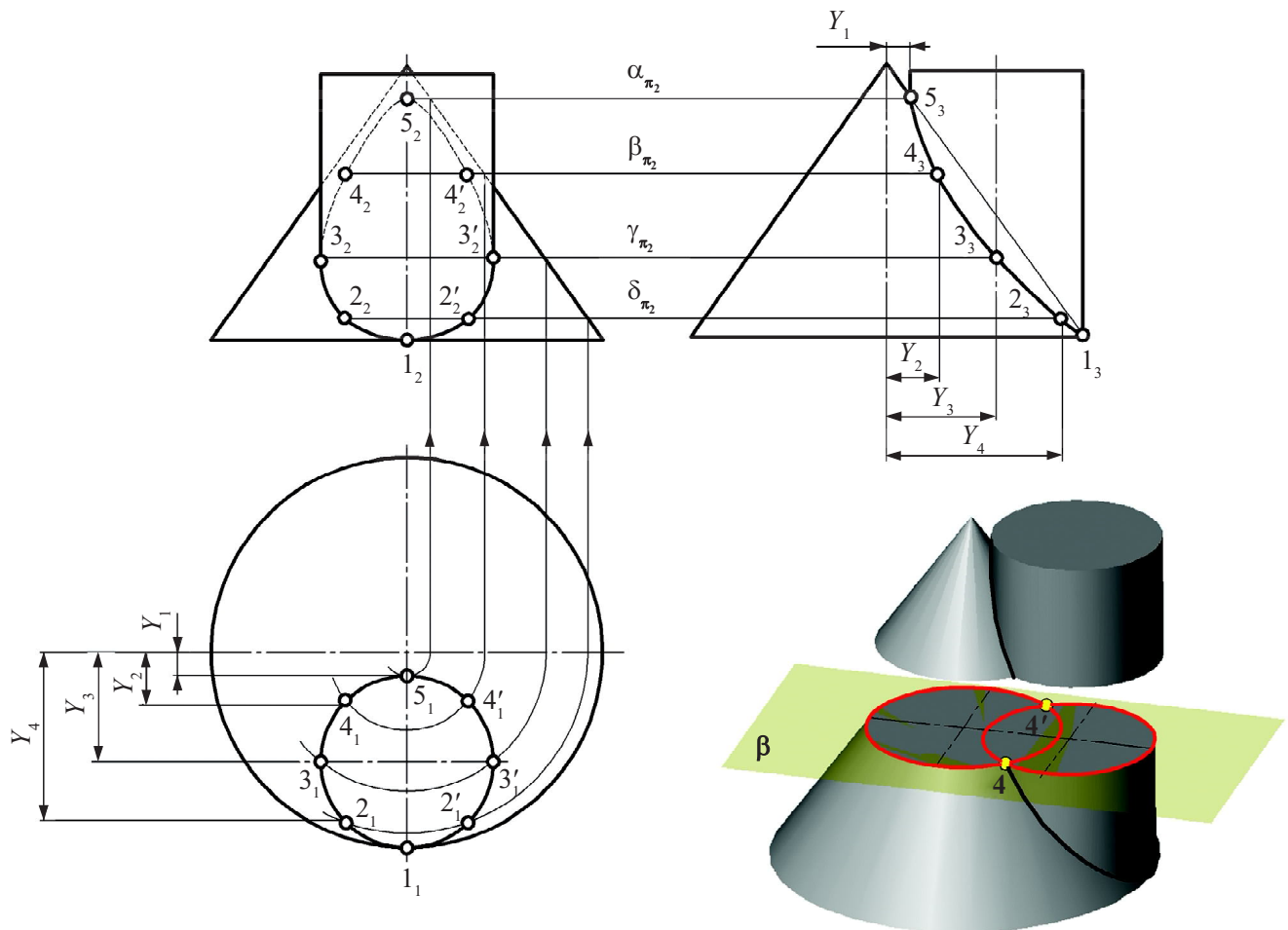


Рис. 4.3. Пример построения проекций линии пересечения конуса и цилиндра

Так же как и в предыдущих задачах, решение начинаем с анализа чертежа. Поскольку поверхность цилиндра является проецирующей относительно горизонтальной плоскости проекций, то горизонтальная проекция линии пересечения – окружность. Построение фронтальной и профильной проекций линии пересечения будем выполнять по точкам, горизонтальные проекции которых обозначим на π_1 .

Прежде всего обозначим ближайшую к нам точку 1_1 , затем самую удаленную 5_1 , точки на границе видимости цилиндра 3_1 и симметричную $3'_1$. Кроме обязательных характерных точек обозначим промежуточные точки, которые необходимы для уточнения характера линии пересечения. Их положение выбираем произвольно. Это точки 2_1 и 4_1 и симметричные $2'_1$ и $4'_1$.

Сначала построим на π_2 и π_3 проекции тех точек, которые не требуют использования посредников. Точка 1 расположена на основании конуса. Для построения 1_2 и 1_3 используем линии проекционной связи.

Для построения проекций остальных точек используем горизонтальные плоскости-посредники, которые будут пересекать конус и цилиндр по окружностям. Положение следов этих плоскостей на π_2 будем определять при помощи параллелей, проходящих через точки 2_1 ,

$3_1, 4_1, 5_1$. Обозначим эти плоскости $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Положение точек 2_2 и $2'_2, 3_2$ и $3'_2, 4_2$ и $4'_2, 5_2$ строим на соответствующих следах плоскостей по линиям связи.

Проекцию точки 5_3 можно построить на пересечении образующих цилиндра и конуса, расположенных в одной плоскости, параллельной π_3 , а 5_2 достроить по линиям связи.

Профильные проекции этих точек строим по линиям связи и относительным координатам $Y(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$.

4.1.2. Использование способа концентрических секущих сфер-посредников

Концентрические сферы-посредники могут использоваться только в тех случаях, когда заданы поверхности вращения, оси которых пересекаются и расположены в плоскости, параллельной плоскости проекций.

При решении задач такого рода используют свойство сферы, соосной с поверхностью вращения, пересекать эту поверхность по параллели, плоскость которой перпендикулярна оси поверхности, а проекция линии пересечения – прямая, проходящая через точки пересечения очерковых образующих.

Для того чтобы сфера была соосной с каждой из пересекающихся поверхностей вращения, ее центр располагают в точке пересечения осей этих поверхностей.

Сфера-посредник должна быть таких размеров, чтобы, пересекая заданные поверхности, она позволяла определить их общие точки, принадлежащие линии пересечения.

Минимальная вспомогательная сфера в общем случае должна быть вписанной в одну из поверхностей, а другую пересекать.

Максимальная сфера определяется расстоянием от точки пересечения осей до наиболее удаленной точки пересечения очерковых образующих заданных поверхностей вращения.

Количество сфер-посредников зависит от размеров заданных фигур и их взаимного расположения.

Решение задач начинают с определения точки пересечения осей, заданных поверхностей вращения, это будет центр вспомогательных сфер-посредников. Затем определяют точки пересечения очерковых образующих, в общем случае эти точки будут общими для заданных поверхностей и будут принадлежать линии пересечения поверхностей.

На следующем этапе решения задачи определяют радиус минимальной сферы, для этого строят окружность (проекция сферы), вписанную в наибольшую из поверхностей. После чего строят линию касания, которая проходит через точку касания перпендикулярно оси этой поверхности, и линию пересечения минимальной сферы со второй поверхностью, которая пройдет через точки пересечения их очерков, перпендикулярно соответствующей оси. На пересечении построенных линий будет точка, общая для всех поверхностей.

Для следующих сфер-посредников радиус выбирают произвольно, больше, чем минимальный, но меньше максимального с учетом количества вспомогательных сфер.

Каждая сфера больше, чем минимальная, пересекает заданные поверхности по линиям, проекции которых прямые и проходят через точки пересечения очерка сферы-посредника с очерком соответствующей поверхности. Точка пересечения этих линий будет искомой точкой линии пересечения поверхностей. Построенные таким образом общие точки соединяют плавной кривой линией.

Пример 1. Построение проекций линии пересечения поверхностей конуса и цилиндра (рис. 4.4).

Решение задачи начинаем с анализа чертежа. Заданы две поверхности вращения, оси которых пересекаются и параллельны фронтальной плоскости проекций.

Определим общие точки на пересечении очерковых образующих 1_2 и 2_2 , они будут принадлежать линии пересечения поверхностей.

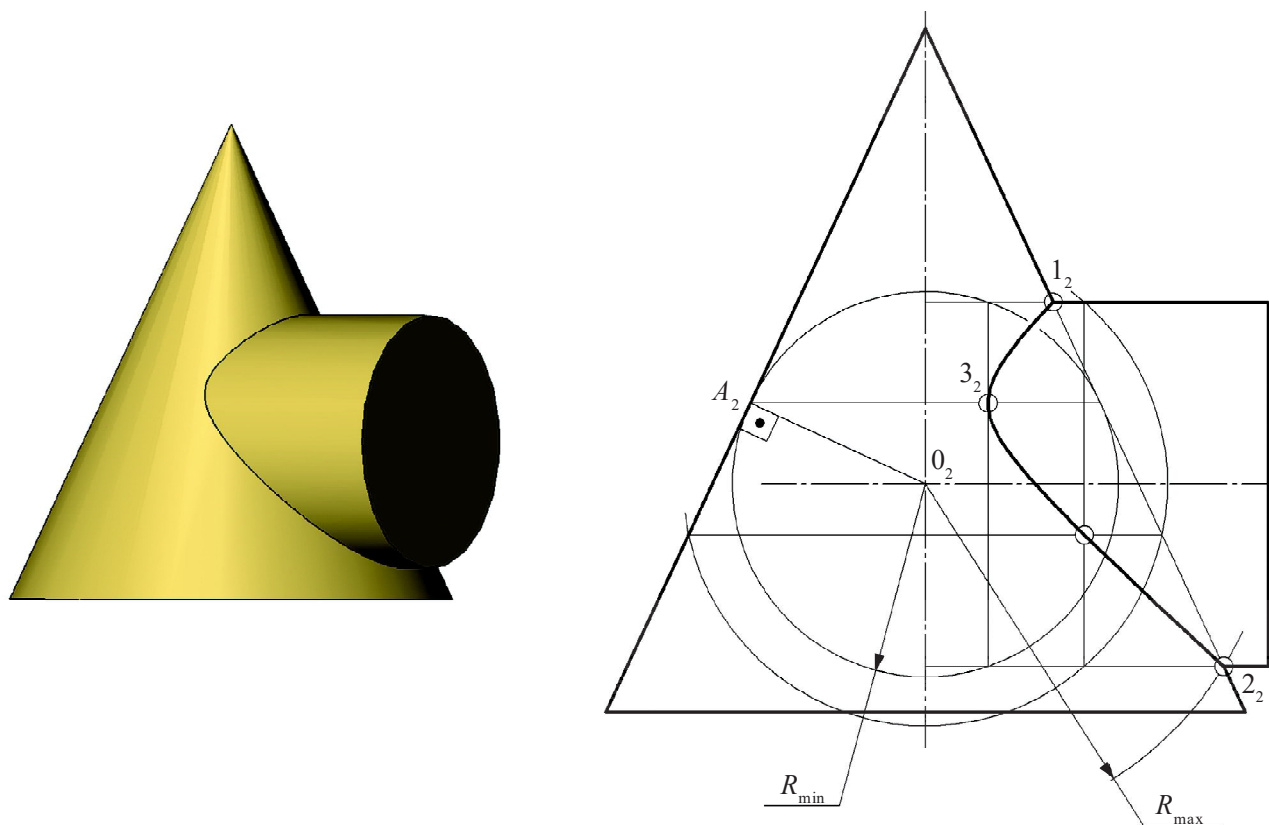


Рис. 4.4. Использование способа вспомогательных концентрических сфер для построения проекций линии пересечения поверхностей конуса и цилиндра

Для определения проекций других точек, принадлежащих линии пересечения поверхностей, воспользуемся сферами-посредниками.

Определим точку пересечения осей O_2 , это будет центр сфер-посредников.

Построим проекции минимальной сферы, это будет окружность, вписанная в треугольник (проекция конуса). Радиус данной окружности определяем построением перпендикуляра из центра сфер O_2 к левой очерковой образующей конуса A_2 . Соединим левую точку касания A_2 с правой точкой касания прямой линией (эта линия должна быть перпендикулярна оси конуса). Затем построим проекцию линии пересечения минимальной сферы с цилиндром. Это будет прямая, перпендикулярная оси цилиндра и проходящая через точки пересечения очерковых образующих цилиндра и минимальной сферы. Точка пересечения построенных линий 3_2 будет принадлежать линии пересечения поверхностей.

Построим еще одну вспомогательную сферу, радиус которой будет больше R_{\min} и меньше R_{\max} . Построим линии пересечения этой сферы с каждой из поверхностей. Они будут проходить через точки пересечения очерков перпендикулярно осям соответствующих поверхностей. Точка пересечения построенных линий — это еще одна точка линии пересечения поверхностей.

Соединяем построенные точки плавной кривой. Проекция линии пересечения поверхностей построена.

Пример 2. Построение проекций линии пересечения поверхностей конуса и тора (рис. 4.5).

Решение начинаем с определения общих точек 1_2 и 2_2 , расположенных на пересечении очерковых образующих.

Определяем точку пересечения осей O_2 . Затем определяем радиус минимальной сферы. Для этого проведем вспомогательную прямую через центр дуги очерковой образующей торовой

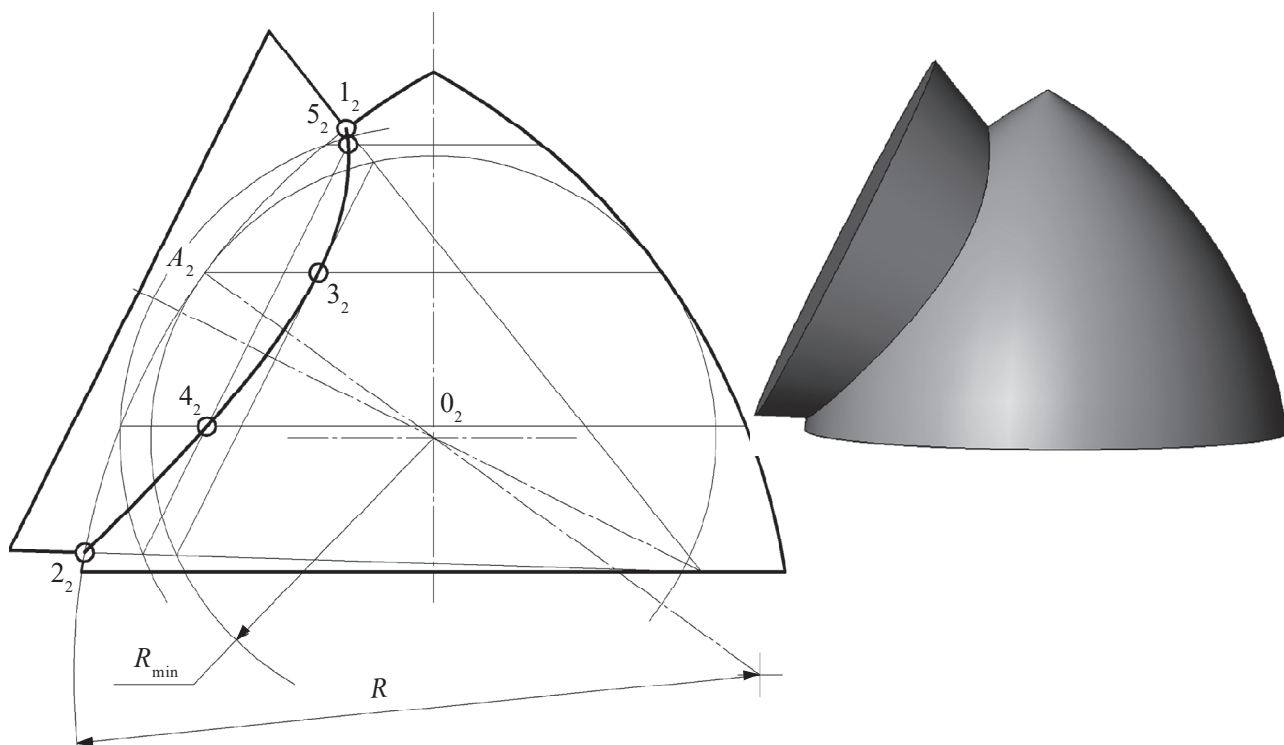


Рис. 4.5. Использование способа вспомогательных концентрических сфер для построения проекций линии пересечения поверхностей тора и конуса

поверхности и центр сфер O_2 . Точка пересечения вспомогательной прямой с очерковой образующей торовой поверхности будет точкой касания A_2 минимальной сферы и тора. Строим сферу R_{\min} и определяем проекции линии касания и линии пересечения заданных поверхностей. Общая точка построенных линий 3_2 будет принадлежать искомой линии пересечения. Для определения проекций других точек 4_2 и 5_2 , принадлежащих линии пересечения, строим еще одну вспомогательную сферу, радиус которой меньше R_{\max} .

Пример 3. Построение проекций линии пересечения поверхностей двух усеченных конусов (рис. 4.6).

Решение задачи выполняется аналогично решению двух предыдущих задач. Определяем точки пересечения очерковых образующих 1_2 и 2_2 . Находим точку пересечения осей и определяем радиус минимальной сферы. После построений обнаруживаем, что сфера является вписанной в оба конуса. Это частный случай. Линия пересечения таких поверхностей, согласно *теореме Монжа*, распадается на две плоские кривые. Для построения этих плоских кривых необходимо определить точку 3_2 , точку одновременного касания заданных конусов с минимальной сферой-посредником.

Проекция точки 3_2 может быть определена следующим образом. Сначала через точку касания вписанной сферы проводим прямую, перпендикулярную вертикальной оси большего конуса, затем от точки касания второго конуса и вписанной сферы проводим прямую, перпендикулярную наклоненной оси меньшего конуса. На пересечении построенных линий будет расположена проекция 3_2 .

Проводим прямые линии через точки $1_2, 3_2$ и $2_2, 3_2$. Линия пересечения заданных конусов построена.

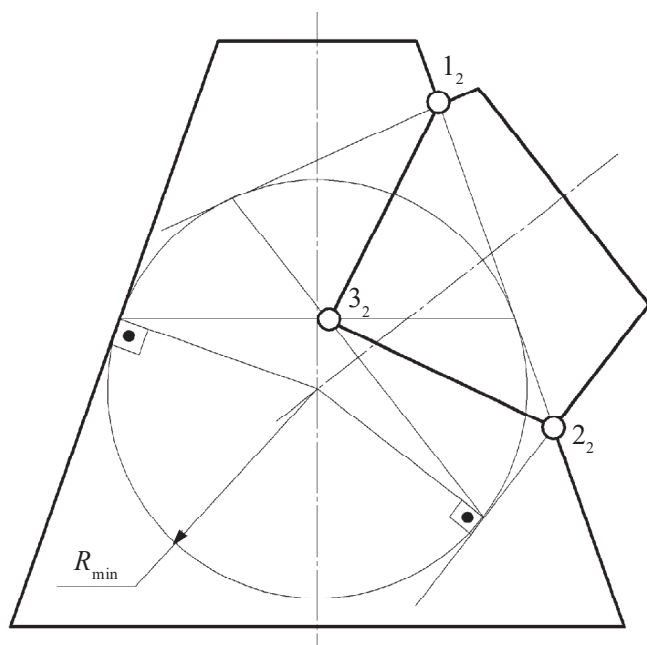


Рис. 4.6. Построение проекции линии пересечения поверхностей вращения 2-го порядка, описанных вокруг общей сферы

4.2. Построение разверток поверхностей

Разверткой поверхности называют плоскую фигуру, полученную путем совмещения поверхности с плоскостью без складок и разрывов. Такое совмещение возможно только для развертываемых поверхностей – цилиндрических, конических, поверхностей с ребром возврата, многогранников. Если поверхность неразвертываемая, то строят условные развертки, например, развертку сферы.

4.2.1. Построение развертки цилиндрической поверхности

Для построения развертки цилиндра (рис. 4.7) необходимо знать длину окружности основания и размеры образующих от нижней до верхней границы боковой поверхности.

Длину окружности вычисляем по формуле $2\pi r$. Для определения размеров образующих аппроксимируем поверхность цилиндра 12-гранной призмой. Основание цилиндра на горизонтальной плоскости проекций разделим на 12 равных частей, соединим их хордами и через каждую точку деления построим проекции ребер призмы. Так как данный цилиндр является симметричной фигурой, то обозначим проекции точек деления только на одной половине цилиндра. Развертка цилиндра тоже будет состоять из двух симметричных частей, поэтому можем ограничиться построением лишь одной ее половины.

По горизонтали отложим отрезок, равный половине длины окружности, и разделим его на шесть равных частей, точки деления обозначим в соответствии с обозначениями на проекциях. Через каждую точку проведем перпендикулярные прямые, размер которых будет равен соответствующему размеру ребер призмы. Соединим верхние точки плавной кривой линией. Правую границу развертки выполним штрихпунктирной линией, это соответствует тому, что на чертеже только половина развертки. Сверху над разверткой помещаем специальный знак.

4.2.2. Построение развертки конической поверхности

Для того чтобы построить развертку конуса (рис. 4.8), необходимо сначала построить сектор, радиус которого равен длине образующей конуса, а длина дуги равна длине окружности

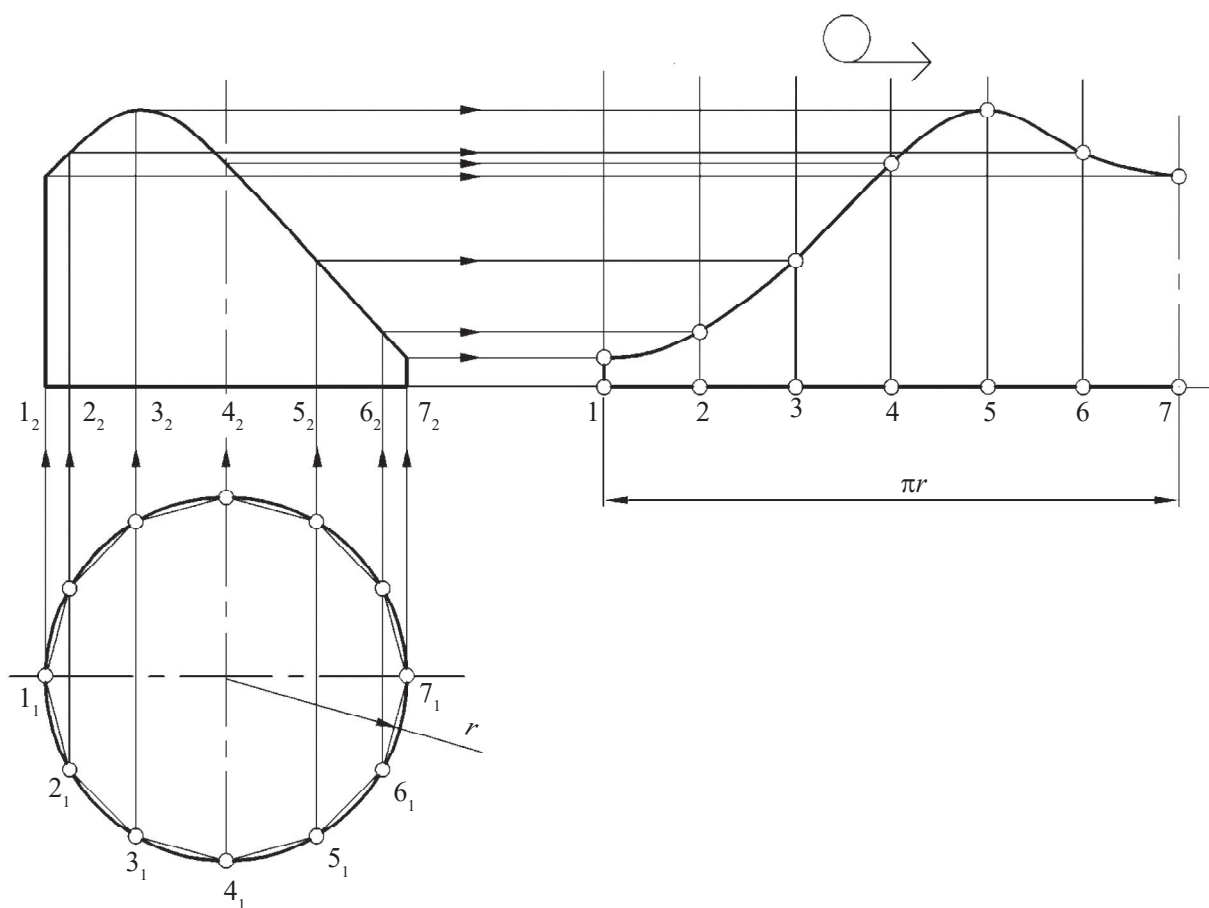


Рис. 4.7. Построение развертки поверхности цилиндра

основания конуса. Так как в примере требуется построить развертку конической поверхности, ограниченной кривой линией, то необходимо определить размеры образующих от основания конуса до данной кривой. Для этого аппроксимируем коническую поверхность поверхностью 12-гранной пирамиды. Горизонтальную проекцию основания делим на 12 равных частей. Обозначаем точки деления на горизонтальной и фронтальной проекции только на одной половине конуса, поскольку это симметричная фигура. Через каждую точку деления проведем образующие и обозначим точки пересечения образующих с верхней границей развертываемой конической поверхности. Это будут точки A_2, B_2, C_2 и т. д.

Поскольку заданная фигура имеет плоскость симметрии, можем построить половину развертки. На дуге сектора отложим шесть равных отрезков, обозначим точки деления теми же цифрами, что и на проекциях основания конуса. Построим через каждую точку деления образующую. Для того чтобы отложить на каждой образующей отрезок, размер которого будет соответствовать расстоянию от основания до верхней границы развертываемой конической поверхности, необходимо определить натуральную величину каждого такого отрезка, кроме отрезков, расположенных на очерковых образующих (их фронтальные проекции изображены в натуральную величину). Натуральную величину остальных отрезков определяем методом вращения вокруг оси конуса.

Рассмотрим использование этого метода на примере определения натуральной величины отрезка $2B$. Горизонтальную проекцию отрезка $2_1B_1S_1$ вращаем вокруг оси конуса до тех пор, пока он не будет параллелен фронтальной плоскости проекций. При этом фронтальная проекция точки 2 перемещается в положение точки 1_2 , а B_2 – в положение, обозначенное B . Перемещение выполняется по горизонтальным прямым до совмещения с очерковой образующей. Натуральная величина искомого отрезка обозначена буквой b . Аналогично определяются натуральные величины остальных отрезков.

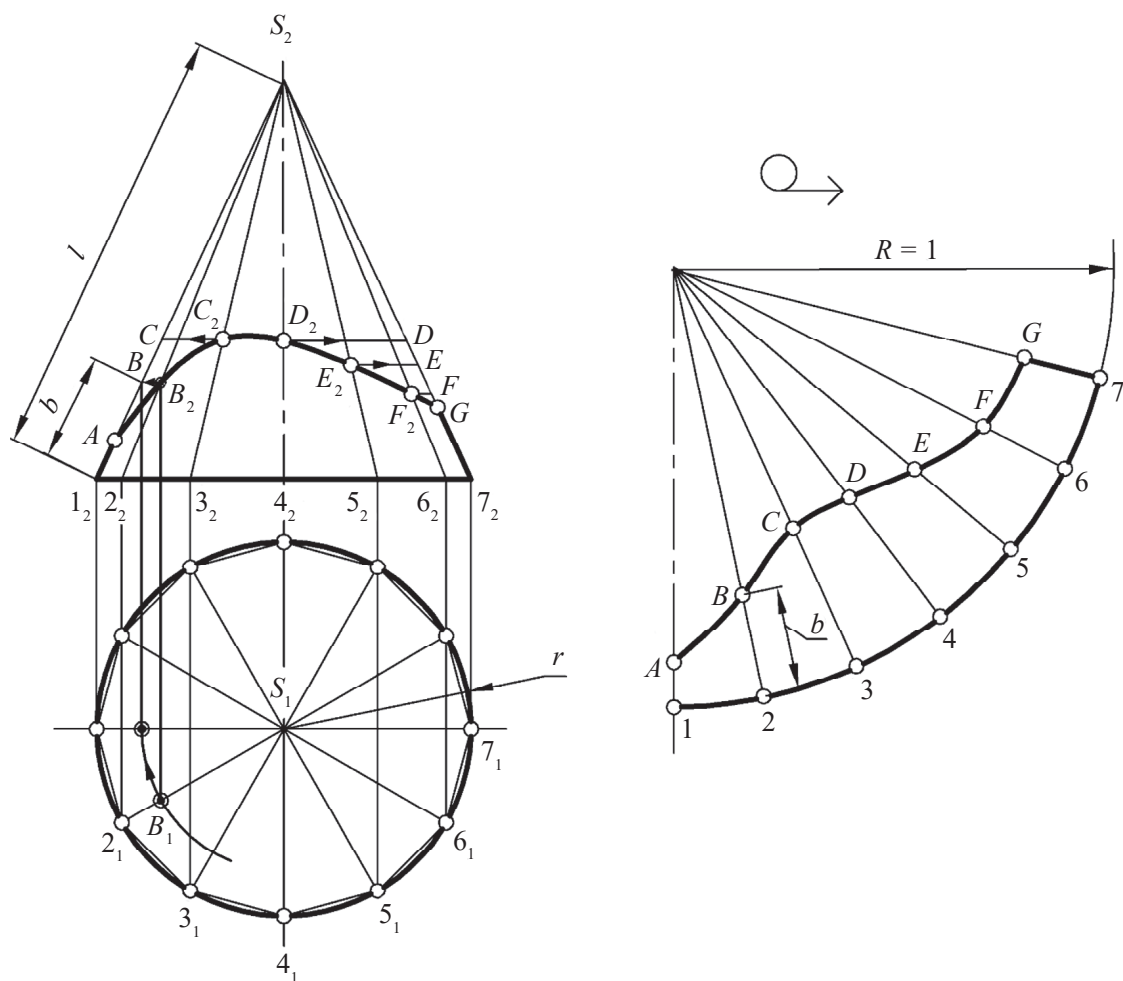


Рис. 4.8. Построение развертки конической поверхности

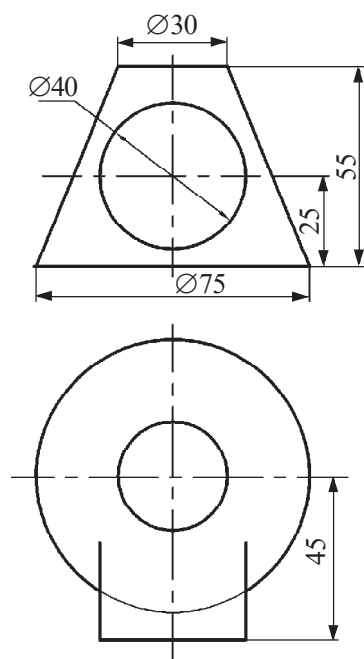
Вопросы для самопроверки

1. Какую линию называют линией пересечения поверхностей?
2. Какие точки линии пересечения называют характерными?
3. Для чего нужны промежуточные точки?
4. Какие плоскости можно выбирать в качестве плоскостей-посредников?
5. По каким линиям плоскости-посредники должны пересекать поверхности?
6. По какой линии пересекаются поверхности вращения?
7. По какой линии пересекаются многогранники с поверхностью вращения?
8. В каких случаях можно использовать способ концентрических сфер-посредников?
9. Где располагают центр сфер-посредников?
10. Какие поверхности называют соосными?
11. Какая сфера-посредник является минимальной?
12. Какая сфера-посредник является максимальной?
13. В каком случае линия пересечения поверхностей вращения представляет собой две плоские кривые?
14. Как определить точку пересечения линий касания в частном случае пересечения поверхностей?
15. Является ли развертка плоской фигурой?
16. Для чего выполняют аппроксимацию поверхности при построении развертки?
17. Какую развертку – точную или приближенную – получают в результате аппроксимации поверхности?
18. Какой поверхностью аппроксимируют поверхность цилиндра?
19. Какой поверхностью аппроксимируют поверхность конуса?
20. В каком случае допускается построить только половину развертки?

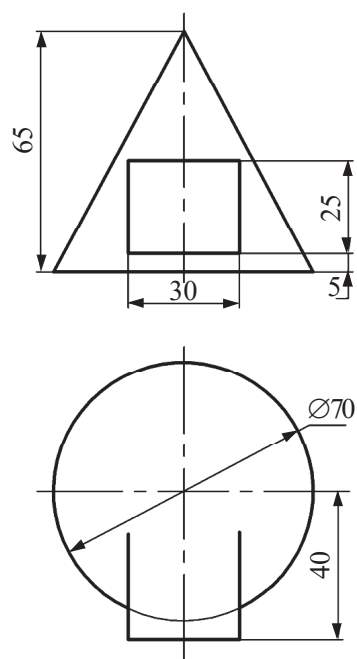
Задачи для самостоятельного решения

Задачи 1–7. Построить проекции линии пересечения поверхностей способом плоскостей-посредников. Задание выполнить в трех проекциях, определить видимость.

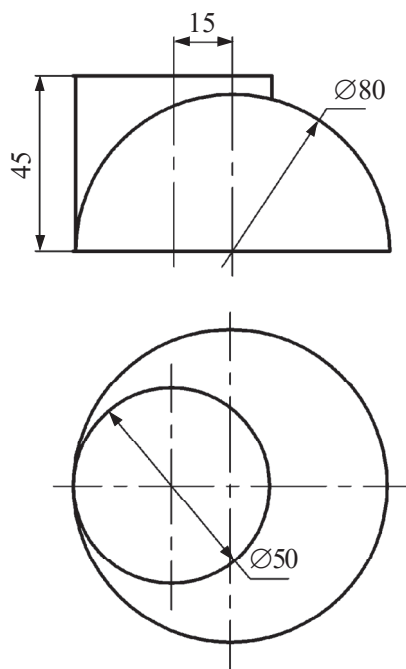
Задача 1.



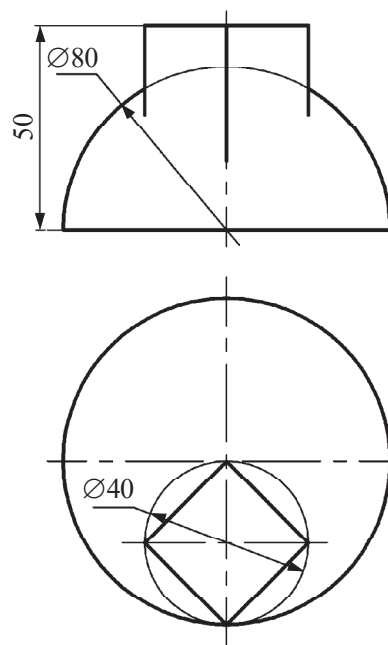
Задача 2.



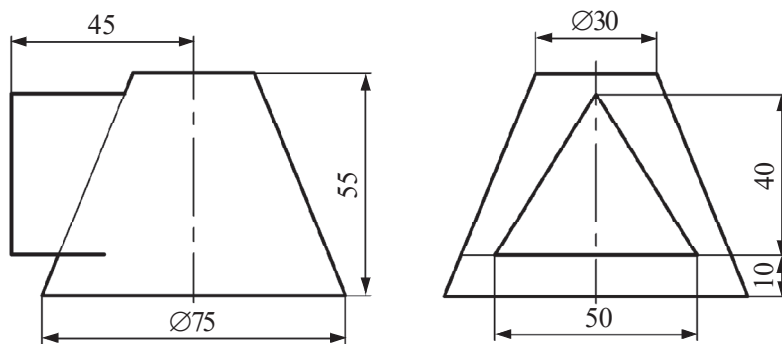
Задача 3.



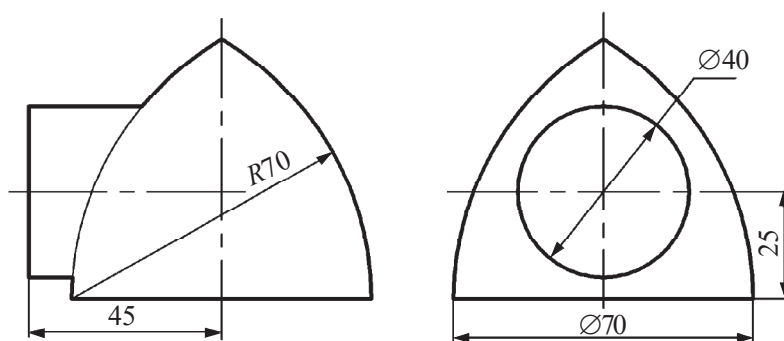
Задача 4.



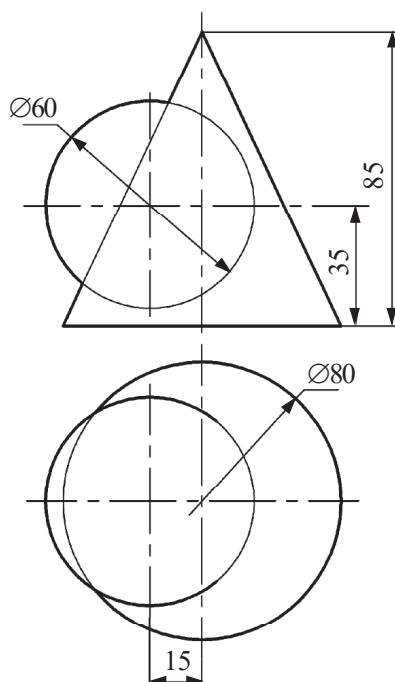
Задача 5.



Задача 6.

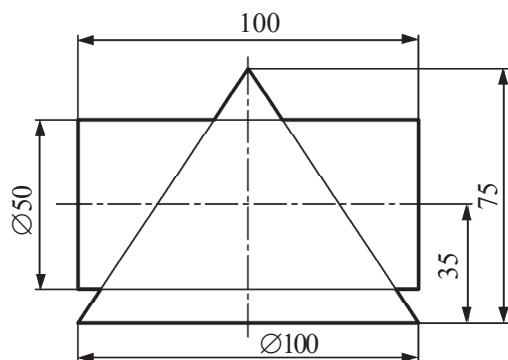


Задача 7.

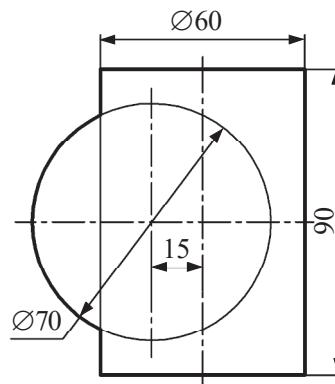


Задачи 8–11. Используя способ концентрических сфер-посредников, построить фронтальную проекцию линии пересечения поверхностей.

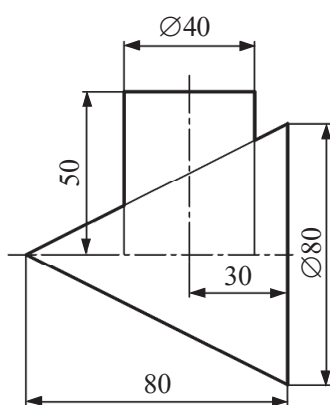
Задача 8.



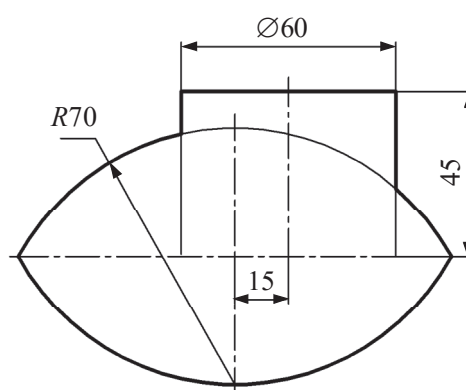
Задача 9.



Задача 10.



Задача 11.



Варианты задач к теме «Точка, прямая, плоскость»

Вариант 1

1. Через точку $C(10, 25, 20)$ провести горизонтальную прямую CD , пересекающую отрезок прямой AB ; $A(60, 20, 30)$, $B(30, 10, 10)$, $|CD| = 60$ мм.
2. Определить натуральную величину прямой AB и углы наклона φ и ψ ее к плоскостям проекций π_1 и π_2 ; $A(70, 30, 20)$, $B(30, 10, 5)$.
3. Построить проекции прямоугольного треугольника ABC , катет которого $|BC| = 30$ мм принадлежит прямой MN ; $A(20, 40, 35)$, $M(70, 35, 15)$, $N(10, 10, 15)$, $X_B < X_C$.

Вариант 2

1. Через точку $E(10, 25, 40)$ провести фронтальную прямую $|EF| = 60$ мм, пересекающую прямую MN ; $M(70, 35, 30)$, $N(25, 10, 5)$.
2. На прямой AB построить точку C , удаленную от точки A на 40 мм. Построить следы прямой. $A(75, 45, 5)$, $B(20, 10, 25)$, $Y_A = 45$ мм.
3. Построить проекции квадрата $ABCD$, сторона которого BC принадлежит прямой MN ; $A(65, 30, 40)$, $M(80, 10, 5)$, $N(20, 10, 35)$, $X_B > X_C$.

Вариант 3

1. На прямой AB найти точку C , равноудаленную от плоскостей проекций π_1 и π_2 ; $A(70, 10, 40)$, $B(20, 40, 10)$.
2. Построить точку B , симметричную точке A относительно прямой MN ; $A(50, 5, 15)$, $M(70, 20, 50)$, $N(15, 20, 20)$.
3. Определить расстояние между параллельными прямыми AB и CD ; $|CD| = 50$ мм; $A(70, 0, 10)$, $B(25, 30, 10)$, $C(75, 20, 35)$, $D(?, ?, ?)$, $X_D < X_C$.

Вариант 4

1. Через точку $A(90, 15, 35)$ построить отрезок горизонтально проецирующей прямой $|AB| = 30$ мм, через точку $C(70, 5, 15)$ – отрезок фронтально проецирующей прямой $|CD| = 35$ мм, через точку $M(50, 15, 20)$ – отрезок профильно-проецирующей прямой $|MN| = 40$ мм.
2. Достроить горизонтальную проекцию прямой AB , если $|AB| = 60$ мм; $A(80, 15, 5)$, $B(35, ?, 30)$, $Y_A < Y_B$. На прямой AB построить точку C , удаленную от точки A на 40 мм.
3. Построить проекции равнобедренного треугольника ABC , если дано его основание AB , а вершина C принадлежит прямой EF ; $A(55, 10, 5)$, $B(10, 10, 25)$, $E(75, 25, 30)$, $F(0, 40, 50)$.

Вариант 5

1. Построить проекции параллелограмма $ABCD$ и принадлежащую его плоскости горизонталь AK ; $A(60, 20, 30)$, $B(35, 10, 10)$, $C(0, 35, 25)$, $D(?, ?, ?)$.
2. Достроить фронтальную проекцию прямой AB , если $|AB| = 60$ мм; $A(70, 30, 50)$, $B(20, 10, ?)$, $Z_B < Z_A$. Найти фронтальный след прямой.
3. Построить проекции квадрата $ABCD$, диагональ которого BD принадлежит прямой MN ; $A(35, 5, 5)$, $M(80, 20, 10)$, $N(10, 20, 40)$.

Вариант 6

1. Через точку $A(20, 5, 50)$ провести отрезок $|AB| = 50$ мм профильной прямой, пересекающей отрезок прямой MN ; $M(50, 10, 15)$, $N(10, 30, 40)$.
2. Достроить горизонтальную проекцию прямой AB , если угол наклона ее к фронтальной плоскости проекций равен 30° . Построить следы прямой. $A(60, 10, 30)$, $B(10, ?, 5)$, $Y_A < Y_B$.

3. Построить проекции квадрата $ABCD$, сторона которого BC принадлежит прямой MN ; $A(45, 45, 35)$, $M(65, 25, 10)$, $N(10, 10, 10)$.

Вариант 7

1. Через точку $A(65, 25, 35)$ провести прямую, пересекающую отрезок MN в точке B , удаленной от профильной плоскости проекций на 35 мм; $M(55, 5, 5)$, $N(10, 20, 25)$.

2. Достроить фронтальную проекцию прямой AB , если угол наклона ее к горизонтальной плоскости проекций равен 30° ; $A(55, 5, 10)$, $B(15, 40, ?)$, $Z_B > Z_A$.

3. Через точку $C(45, 30, 35)$ построить прямую $|CD| = 40$ мм, параллельную прямой AB . Определить расстояние между параллельными прямыми AB и CD ; $A(60, 10, 20)$, $B(25, 10, 5)$, $X_D < X_C$.

Вариант 8

1. Через точку $C(65, 5, 10)$ провести отрезок горизонтальной прямой $|CD| = 50$ мм под углом 30° к фронтальной плоскости проекций. Определить расстояние от точки A до прямой CD ; $A(60, 40, 30)$, $X_D < X_C$.

2. Достроить фронтальную проекцию отрезка $|AB| = 60$ мм и найти угол наклона ее к горизонтальной плоскости проекций – φ ; $A(65, 45, 10)$, $B(25, 10, ?)$, $Z_B > Z_A$. Построить следы прямой, заданной отрезком AB .

3. Построить проекции прямоугольного равнобедренного треугольника ABC , катет которого BC принадлежит прямой EF ; $A(25, 30, 35)$, $E(85, 10, 25)$, $F(20, 10, 5)$, $X_B < X_C$.

Вариант 9

1. Через точку $M(55, 10, 35)$ провести отрезок фронтальной прямой MN длиной 40 мм под углом 45° к горизонтальной плоскости проекций. Определить расстояние от точки A до прямой MN ; $A(20, 25, 35)$, $X_M > X_N$, $Z_M < Z_N$.

2. Построить проекции сферы, касающейся отрезка прямой AB с центром в точке C ; $A(85, 20, 5)$, $B(25, 20, 50)$, $C(70, 40, 45)$.

3. Построить проекции прямоугольника $ABCD$, сторона которого $|BC| = 30$ мм принадлежит прямой MN ; $A(50, 40, 30)$, $M(60, 10, 10)$, $N(5, 25, 10)$.

Вариант 10

1. Через точку $C(55, ?, 20)$ провести отрезок горизонтальной прямой CD длиной 50 мм, пересекающей отрезок AB под прямым углом. $A(60, 5, 5)$, $B(15, 40, 35)$.

2. Определить натуральную величину отрезка прямой AB и углы наклона его к плоскостям проекций π_1 и π_2 . Построить следы прямой AB ; $A(60, 25, 10)$, $B(15, 5, 20)$.

3. Построить проекции сферы, касающейся отрезка AB с центром в точке C ; $A(75, 10, 25)$, $B(25, 10, 10)$, $C(35, 35, 40)$.

Вариант 11

1. Через точку $A(35, ?, 50)$ провести отрезок фронтальной прямой AD длиной 50 мм, пересекающей отрезок EK под прямым углом; $E(70, 40, 35)$, $K(15, 10, 5)$.

2. На прямой MN построить точку K , удаленную от точки N на 30 мм. Построить следы прямой; $M(55, 10, 20)$, $N(20, 30, 5)$.

3. Построить проекции прямоугольного равнобедренного треугольника ABC , катет которого BC принадлежит прямой MN ; $A(60, 40, 10)$, $M(75, 10, 30)$, $N(15, 25, 30)$, $X_B > X_C$.

Вариант 12

1. Построить проекции сферы с центром в точке A . Радиус сферы равен длине отрезка AB ; $A(40, 35, 35)$, $B(20, 15, 20)$.

2. Достроить фронтальную проекцию равнобедренного треугольника ABC , если BC – основание треугольника. $A(60, 30, ?)$, $B(35, 10, 0)$, $C(10, 10, 35)$.

3. Через точку $A(85, 10, 20)$ провести прямую $|AB| = 50$ мм параллельно отрезку прямой CD . Определить расстояние от точки $E(75, 45, 40)$ до прямой AB ; $C(50, 10, 10)$, $D(10, 25, 10)$, $X_B < X_A$.

Вариант 13

1. Определить расстояние от вершины B параллелограмма $ABCD$ до стороны AD ; $A(75, 40, 65)$, $B(65, 10, 25)$, $C(10, 10, 10)$, $D(?, ?, ?)$.

2. Достроить горизонтальную проекцию равнобедренного треугольника ABC , если BC – основание треугольника. $A(65, ?, 45)$, $B(50, 5, 10)$, $C(15, 40, 10)$.

3. Построить фронтальную прямую $|AB| = 50$ мм, которая наклонена к горизонтальной плоскости проекций под углом 30° . Фронталь AB удалена от фронтальной плоскости проекций на 20 мм и пересекает прямую CD в точке A ; $C(45, 15, 5)$, $D(5, 30, 30)$, $X_A < X_B$, $Z_A < Z_B$.

Вариант 14

1. Построить отрезок горизонтальной прямой $|MN| = 50$ мм, удаленный от горизонтальной плоскости проекций на 20 мм. Угол наклона к фронтальной плоскости проекций 45° . Прямая MN пересекает прямую EF в точке N ; $E(65, 10, 30)$, $F(10, 25, 10)$, $X_M > X_N$.

2. Достроить фронтальную проекцию отрезка прямой EF , если $|EF| = 55$ мм. Построить следы прямой EF ; $E(60, 25, 30)$, $F(30, 5, ?)$, $Z_F > Z_E$.

3. Построить проекции квадрата $ABCD$, сторона которого BC принадлежит прямой EF ; $A(55, 35, 25)$, $E(5, 10, 30)$, $F(60, 10, 55)$, $X_B > X_C$.

Вариант 15

1. На прямой AB построить точку C , равноудаленную от фронтальной и горизонтальной плоскостей проекций. $A(55, 30, 5)$, $B(15, 5, 40)$.

2. Достроить горизонтальную проекцию отрезка прямой $|MN| = 50$ мм. Построить следы прямой. $M(65, 40, 10)$, $N(30, ?, 30)$, $Y_M > Y_N$.

3. Построить проекции равнобедренного треугольника ABC , основание которого $|BC| = 50$ мм принадлежит прямой EF ; $A(30, 5, 40)$, $E(80, 10, 10)$, $F(15, 45, 10)$.

Вариант 16

1. Через точку $A(70, 30, 25)$ провести горизонтальную прямую AB , пересекающую отрезок прямой CD в точке B ; $C(45, 35, 5)$, $D(5, 5, 30)$.

2. В треугольнике ABC определить расстояние от вершины A до основания BC ; $A(35, 35, 40)$, $B(75, 10, 20)$, $C(25, 10, 5)$.

3. Построить проекции ромба $ABCD$, диагональ которого $|BD| = 60$ мм принадлежит прямой KL ; $A(30, 10, 5)$, $K(75, 10, 25)$, $L(5, 50, 25)$.

Вариант 17

1. Через точку $C(10, 40, 30)$ провести прямую CD , пересекающую прямую AB в точке D , удаленной от горизонтальной плоскости проекций на 15 мм; $A(60, 20, 30)$, $B(30, 10, 10)$.

2. Достроить горизонтальную проекцию отрезка прямой MN , если угол наклона ее к фронтальной плоскости проекций равен 45° . Построить следы прямой MN ; $M(75, 60, 5)$, $N(30, ?, 20)$, $Y_M > Y_N$.

3. Построить проекции равнобедренного треугольника ABC , если дано его основание AB , а вершина C принадлежит прямой MN ; $A(80, 15, 30)$, $B(25, 40, 30)$, $M(55, 0, 10)$, $N(15, 30, 20)$.

Вариант 18

1. Построить проекции параллелограмма $ABCD$ и принадлежащую ему фронталь AK ; $A(70, 35, 25)$, $B(40, 50, 55)$, $C(5, 25, 40)$.

2. Достроить фронтальную проекцию отрезка прямой EF , если угол наклона ее к горизонтальной плоскости проекций равен 30° . Построить следы прямой. $E(60, 5, ?)$, $F(15, 25, 5)$, $Z_E > Z_F$.

3. Построить проекции квадрата $ABCD$, диагональ которого BD принадлежит прямой EF ; $A(35, 10, 50)$, $E(85, 15, 30)$, $F(5, 50, 30)$.

Вариант 19

1. Через точку $A(60, ?, 15)$ провести отрезок $|AB| = 60$ мм горизонтальной прямой, пересекающей отрезок CD под прямым углом. $C(50, 5, 5)$, $D(5, 60, 30)$.

2. На отрезке прямой AB построить точку C , удаленную от точки A на 50 мм; $A(60, 40, 50)$, $B(15, 10, 15)$.

3. Построить проекции квадрата $ABCD$, сторона которого BC принадлежит прямой EF ; $A(85, 5, 30)$, $E(80, 30, 55)$, $F(25, 30, 15)$, $X_B > X_C$.

Вариант 20

1. Через точку $A(65, 40, 40)$ провести прямую AB , пересекающую прямую EF в точке B , которая удалена от фронтальной плоскости проекций на 20 мм; $E(60, 5, 5)$, $F(15, 30, 35)$.

2. Найти натуральную величину отрезка AB и углы наклона его к плоскостям проекций π_1 и π_2 . Построить следы прямой. $A(65, 45, 15)$, $B(15, 10, 50)$.

3. Через точку $A(70, 20, 35)$ провести прямую $|AB| = 50$ мм параллельно прямой MN . Определить расстояние между параллельными прямыми. $M(60, 5, 10)$, $N(10, 40, 10)$.

Вариант 21

1. Через точку $A(20, ?, 20)$ провести горизонтальную прямую $|AB| = 65$ мм, пересекающую параллельные прямые CD и MN ; $C(90, 30, 35)$, $D(45, 5, 10)$, $M(55, 40, 30)$, $N(10, ?, ?)$.

2. Определить расстояние от вершины D параллелограмма $ABCD$ до стороны AB ; $A(70, 5, 20)$, $B(30, 5, 40)$, $C(10, 30, 25)$, $D(?, ?, ?)$.

3. Построить проекции прямоугольного равнобедренного треугольника ABC , катет которого BC принадлежит прямой MN ; $A(60, 15, 5)$, $M(75, 55, 25)$, $N(10, 15, 25)$, $X_B > X_C$.

Вариант 22

1. Построить проекции фронтальной прямой EF , удаленной от фронтальной плоскости проекций на 25 мм и пересекающей параллельные прямые AB и CD в точках E и F ; $A(80, 35, 0)$, $B(35, 0, 55)$, $C(45, 40, 0)$, $D(10, ?, ?)$.

2. Определить расстояние от вершины B до стороны CD треугольника BCD ; $B(70, 50, 35)$, $C(60, 5, 10)$, $D(15, 35, 10)$.

3. Построить проекции квадрата $ABCD$, сторона которого BC принадлежит прямой EF ; $A(55, 40, 5)$, $E(75, 10, 25)$, $F(10, 10, 55)$, $X_B > X_C$.

Вариант 23

1. Через точку $M(20, 45, ?)$ провести отрезок $|MN| = 50$ мм горизонтальной прямой, пересекающей отрезок AB под прямым углом; $A(65, 50, 5)$, $B(10, 0, 40)$.

2. Определить натуральную величину отрезка прямой CD и углы ее наклона к плоскостям проекций π_1 и π_2 . Построить следы прямой. $C(60, 10, 40)$, $D(10, 25, 5)$.

3. Построить проекции сферы с центром в точке A , касающейся отрезка MN ; $A(50, 50, 40)$, $M(70, 0, 20)$, $N(10, 40, 20)$.

Вариант 24

1. Через точку $E(60, ?, 45)$ провести отрезок $|EF| = 65$ мм фронтальной прямой, пересекающей отрезок MN под прямым углом. $M(40, 0, 10)$, $N(15, 35, 50)$.

2. На прямой CD построить точку B , удаленную от точки C на 35 мм; $C(50, 10, 0)$, $D(10, 30, 25)$.

3. Построить проекции равнобедренного треугольника ABC , если дано основание AC , а высота $|OB| = 40$ мм параллельна горизонтальной плоскости проекций; $A(60, 10, 15)$, $C(35, 30, 50)$.

Вариант 25

1. На прямой AB найти точку C , удаленную от плоскости π_1 на 15 мм, точку D , удаленную от плоскости π_2 на 25 мм, и точку K , принадлежащую фронтальной плоскости проекций. $A(70, 35, 5)$, $B(25, 10, 20)$.

2. Определить расстояние между параллельными прямыми AB и CD ; $A(30, 20, 55)$, $B(30, 50, 20)$, $C(15, 10, 35)$, $D(?, ?, 5)$.

3. Построить проекции ромба $ABCD$, диагональ которого $|BD| = 60$ мм принадлежит прямой MN ; $A(50, 50, 50)$, $M(75, 10, 30)$, $N(5, 50, 30)$.

Вариант 26

1. На прямой AB найти точку C , удаленную от плоскости π_1 на 15 мм, точку D , удаленную от плоскости π_2 на 20 мм, и точку K , принадлежащую фронтальной плоскости проекций. $A(70, 30, 5)$, $B(25, 10, 20)$.

2. Построить проекции сферы с центром в точке D . Радиус сферы равен S отрезка прямой CD ; $C(60, 5, 10)$, $D(25, 40, 35)$.

3. Построить проекции ромба $ABCD$, если дана диагональ AC , а диагональ $|BD| = 70$ мм параллельна фронтальной плоскости проекций. $A(70, 60, 55)$, $C(40, 15, 20)$.

Вариант 27

1. Построить проекции профильной прямой $|AB| = 50$ мм, которая наклонена к фронтальной плоскости проекций под углом 60° и пересекает прямую CD . Построить точку пересечения прямых AB и CD ; $A(?, 10, 40)$, $C(35, 20, 15)$, $D(5, 45, 35)$.

2. Достроить фронтальную проекцию прямой AB , если угол наклона ее к горизонтальной плоскости проекций 45° ; $A(50, 5, 5)$, $B(10, 25, ?)$, $Z_B > Z_A$.

3. Построить проекции равнобедренного треугольника ABC , если дано основание AB , а его вершина C принадлежит профильно проецирующей прямой $|MN| = 60$ мм; $A(70, 30, 25)$, $B(25, 30, 45)$, $M(75, 10, 10)$, $N(?, ?, ?)$.

Вариант 28

1. На прямой CD построить точку A , удаленную от плоскости π_1 на 20 мм, точку B , удаленную от плоскости π_2 на 15 мм, и точку N , принадлежащую горизонтальной плоскости проекций. $C(55, 15, 5)$, $D(5, 30, 30)$.

2. Достроить горизонтальную проекцию отрезка прямой CD , если угол наклона ее к фронтальной плоскости проекций 30° ; $C(55, 40, 5)$, $D(10, ?, 20)$, $Y_C > Y_D$.

3. Построить проекции прямоугольника $ABCD$, если дана сторона BC , а вершина A принадлежит горизонтально-проецирующей прямой $|MN| = 40$ мм; $B(45, 10, 5)$, $C(10, 10, 30)$, $M(65, 30, 10)$, $N(?, ?, ?)$, $Z_M < Z_N$.

Вариант 29

1. Через точку $A(55, 30, 40)$ провести прямую AB , пересекающую отрезок CD под прямым углом в точке B ; $C(45, 10, 5)$, $D(15, 10, 35)$.

2. Достроить горизонтальную проекцию прямой $|AB| = 70$ мм. Построить следы прямой. $A(60, ?, 5)$, $B(5, 5, 30)$, $Y_A > Y_B$.

3. Построить проекции сферы с центром в точке C , касающейся отрезка AB ; $A(20, 5, 35)$, $B(20, 30, 5)$, $C(35, 35, 30)$.

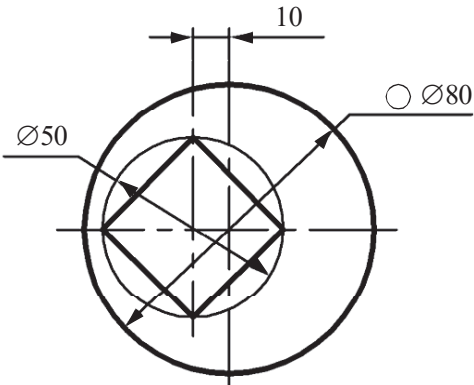
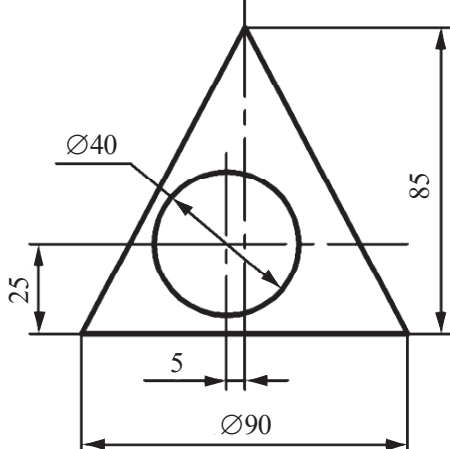
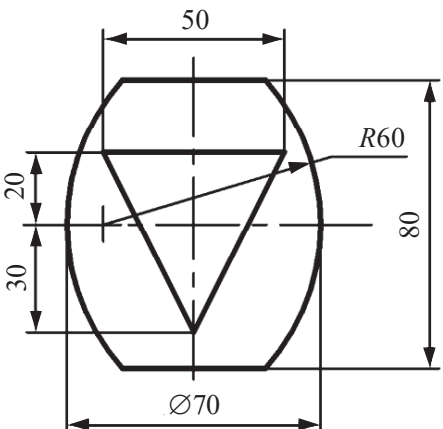
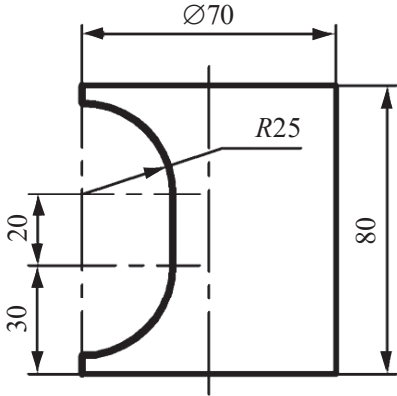
Вариант 30

1. Через точку $M(50, 40, 35)$ провести прямую $|MN| = 50$ мм параллельно прямой EF ; $E(75, 20, 10)$, $F(35, 30, 25)$.

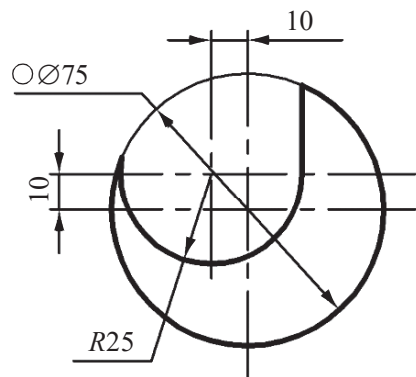
2. Достроить фронтальную проекцию прямой $|CD| = 60$ мм; $C(55, 30, ?)$, $D(15, 10, 10)$, $Z_C > Z_D$.

3. Построить проекции квадрата $ABCD$, если дана сторона AB , а сторона AD параллельна горизонтальной плоскости проекций. $A(20, 10, 10)$, $B(10, 40, 35)$, $X_D > X_A$.

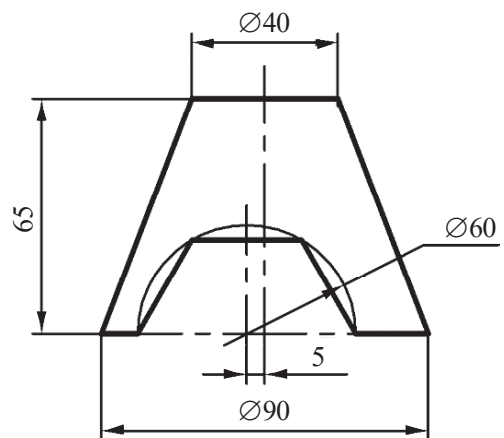
Варианты задач к теме
«Тело с вырезом»

<p>1</p> 	<p>2</p> 
<p>3</p> 	<p>4</p> 

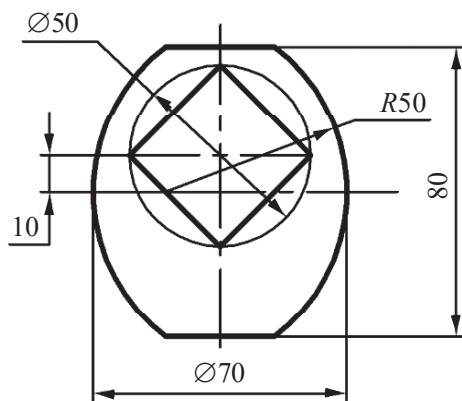
5



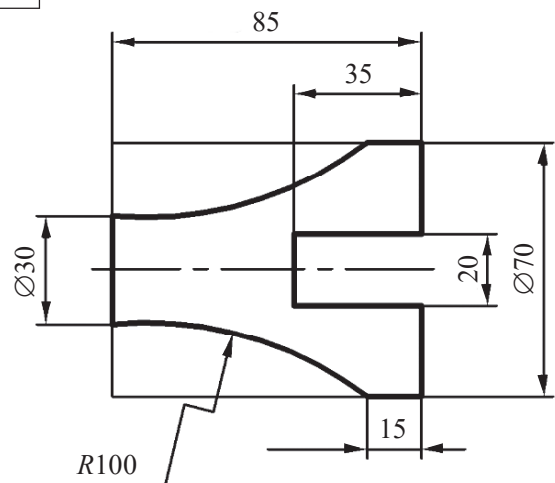
6



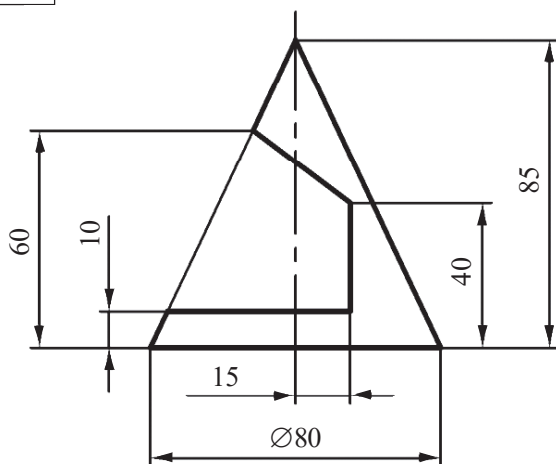
7



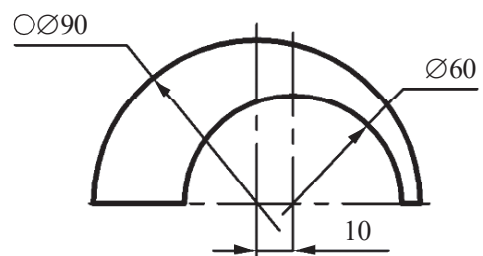
8



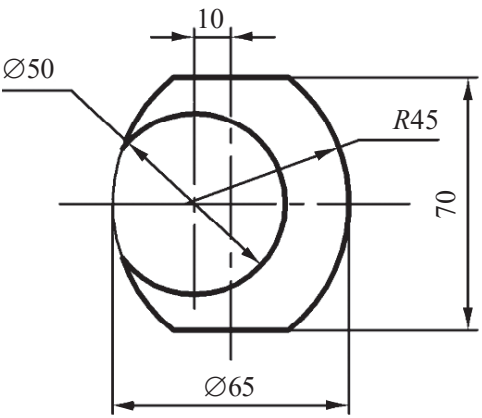
9



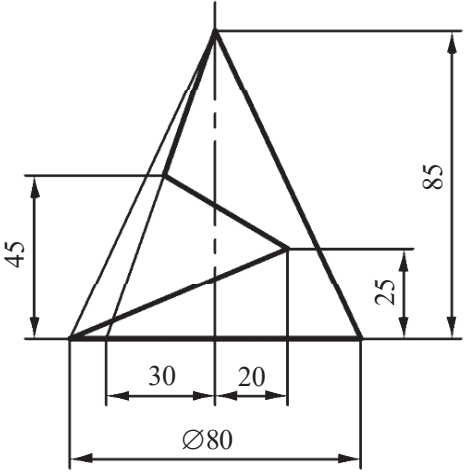
10



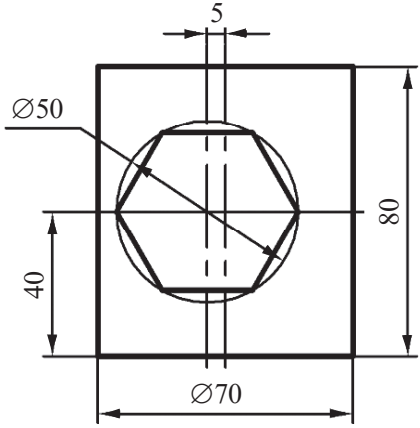
11



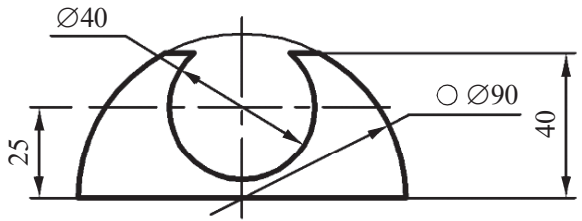
12



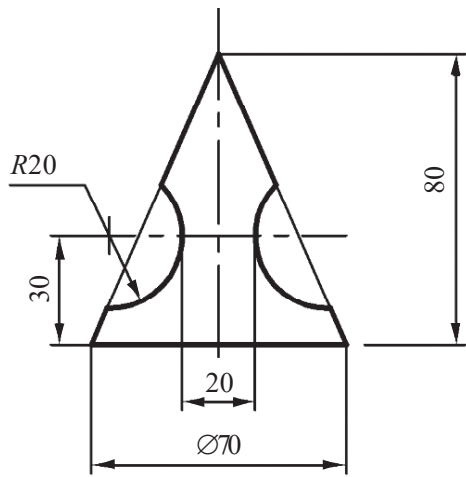
13



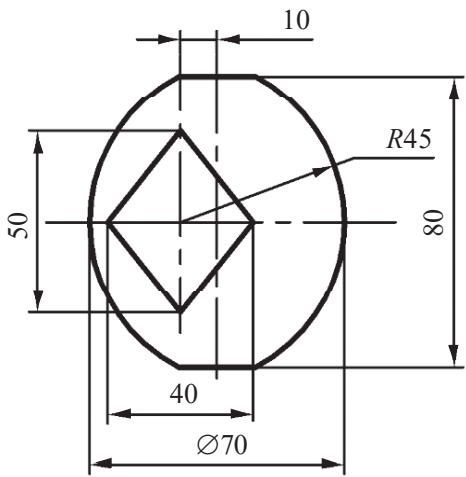
14



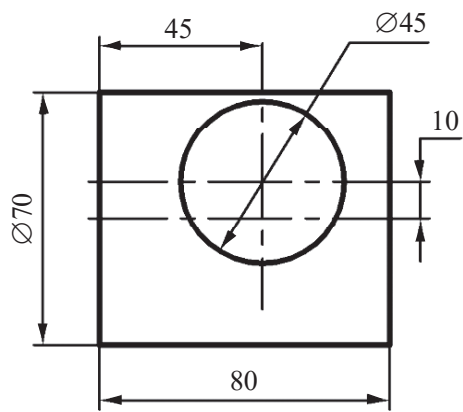
15



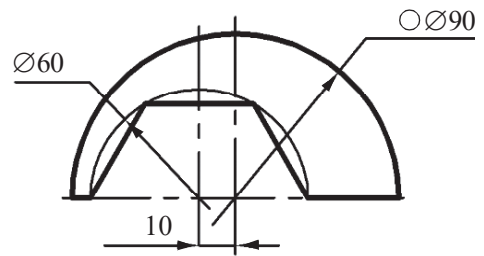
16



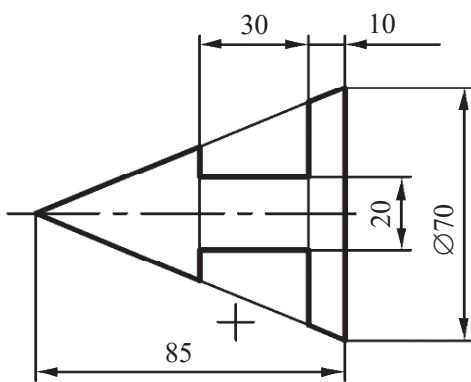
17



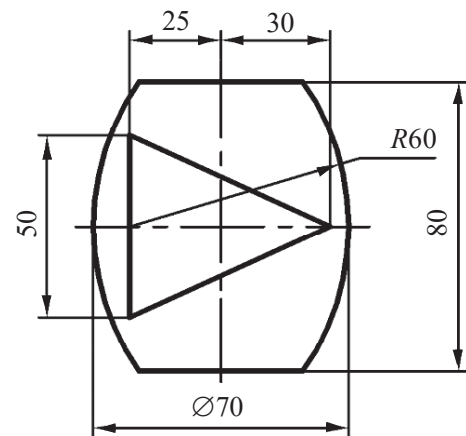
18



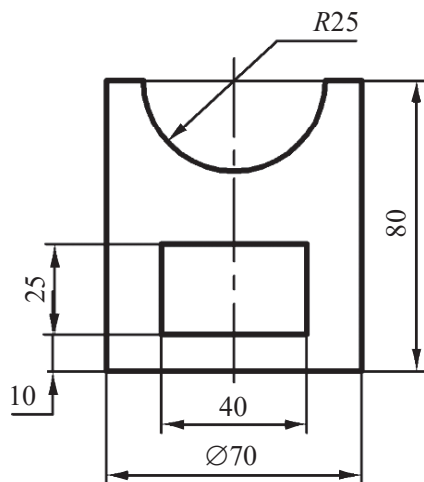
19



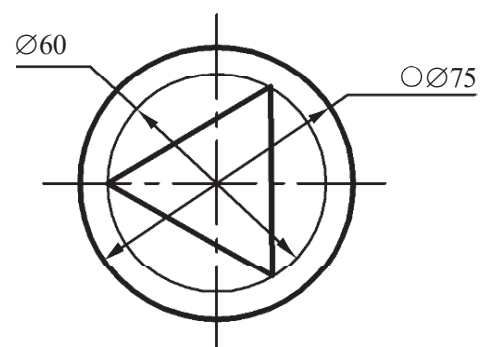
20



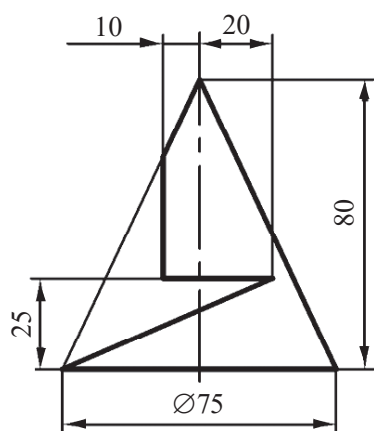
21



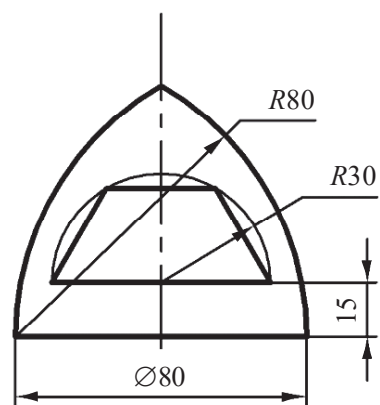
22



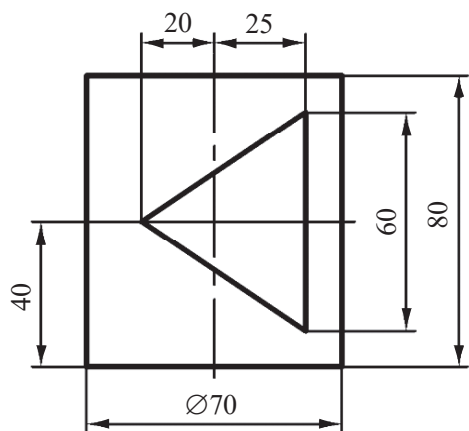
23



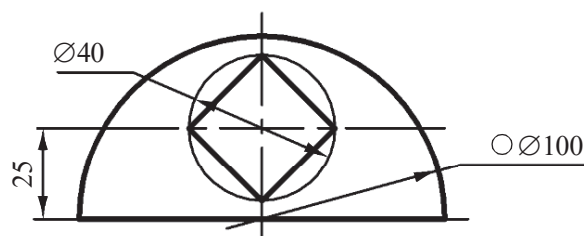
24



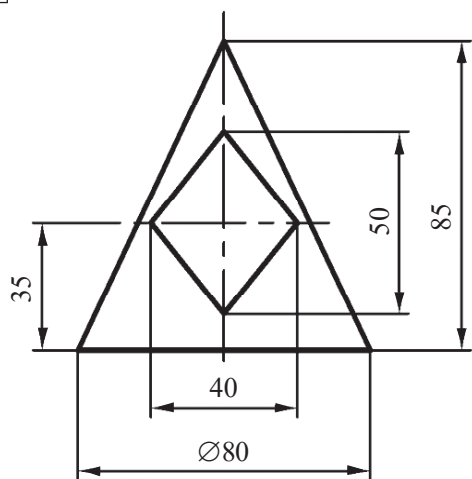
25



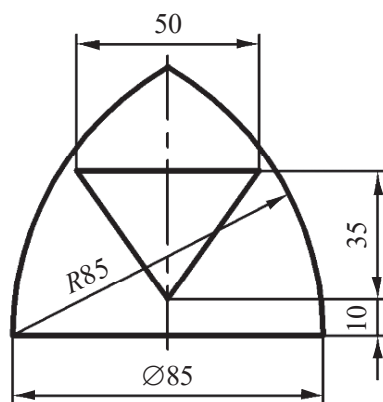
26



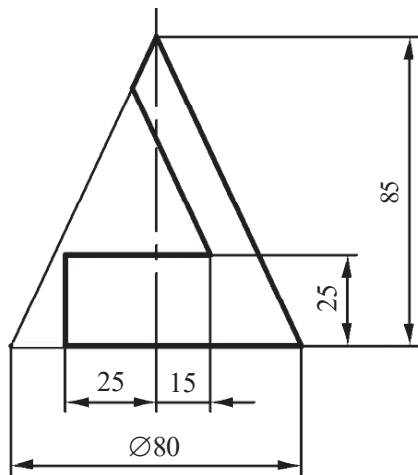
27



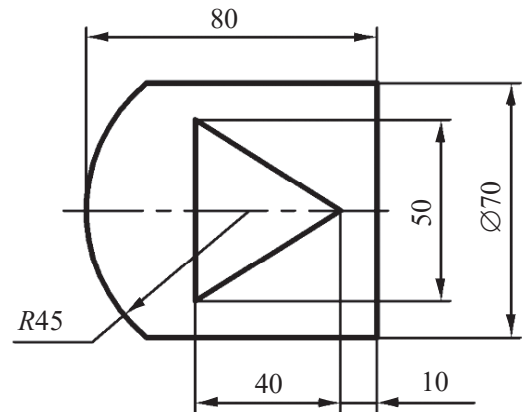
28



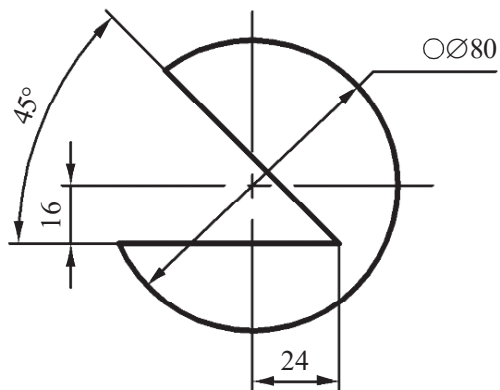
29



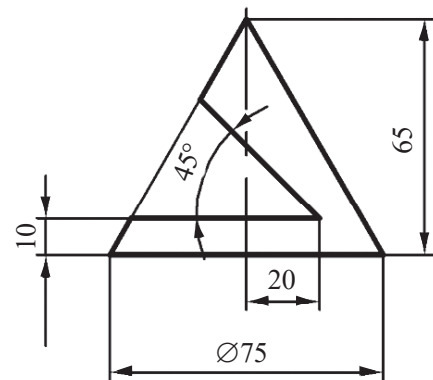
30



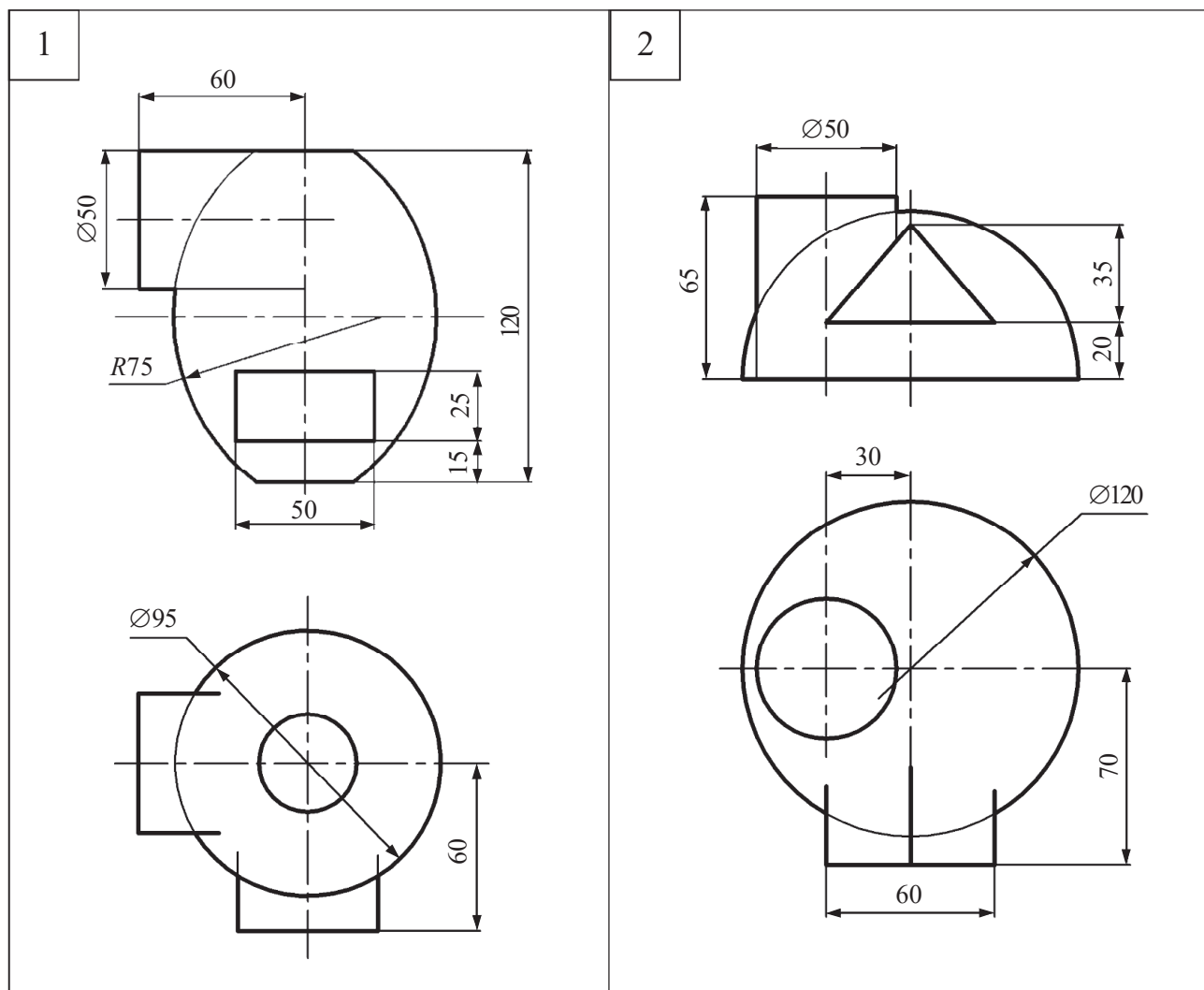
31



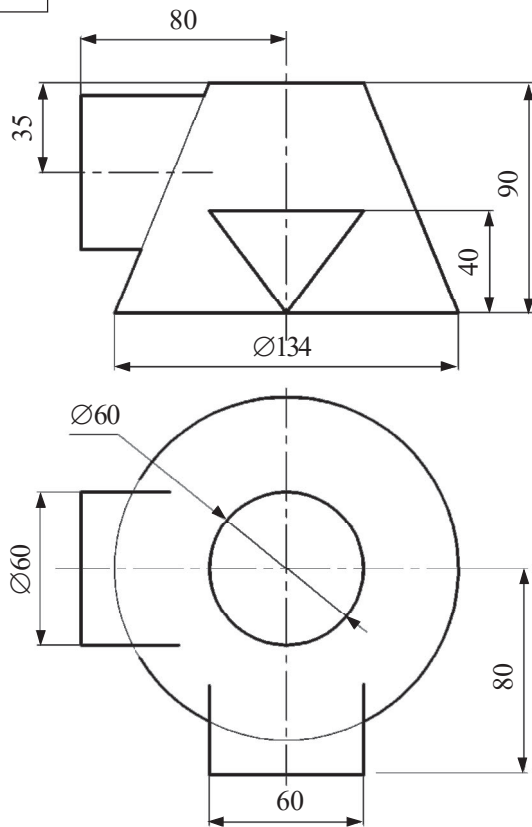
32



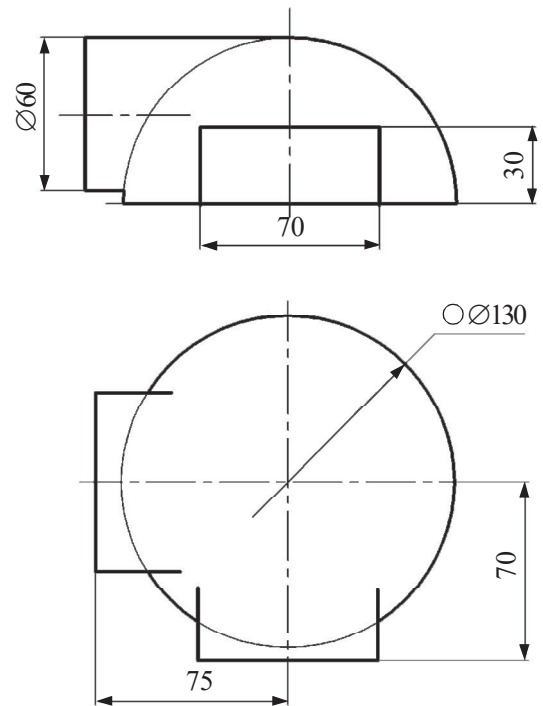
**Варианты задач по теме
«Пересечение поверхностей. Способ секущих плоскостей»**



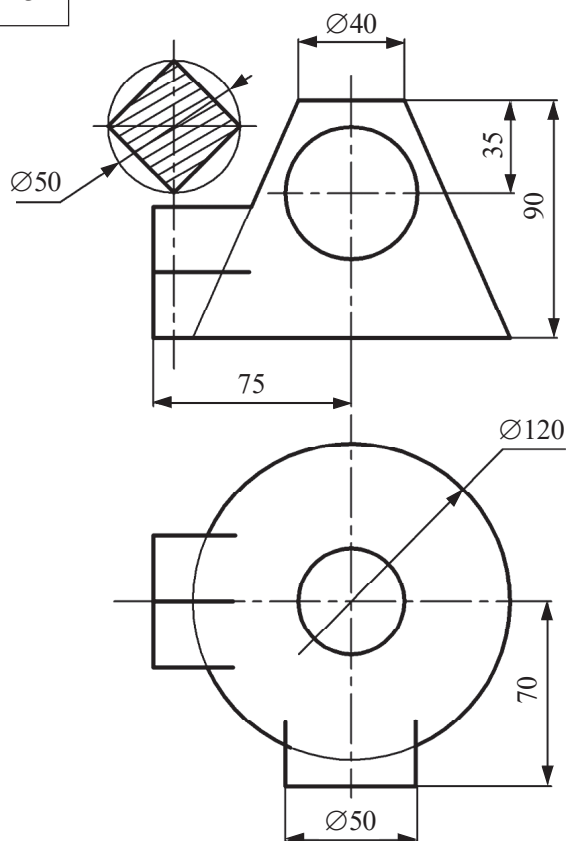
3



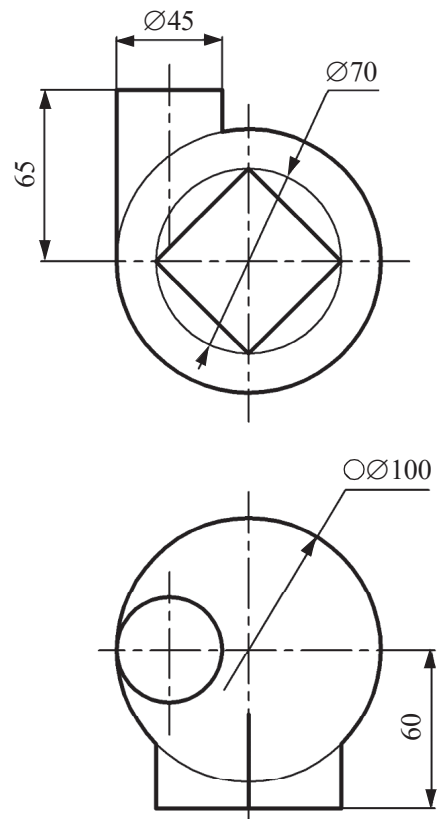
4



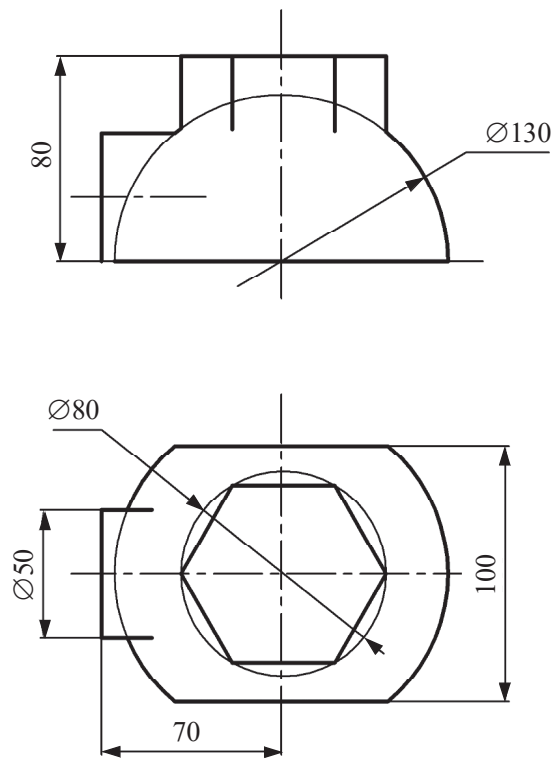
5



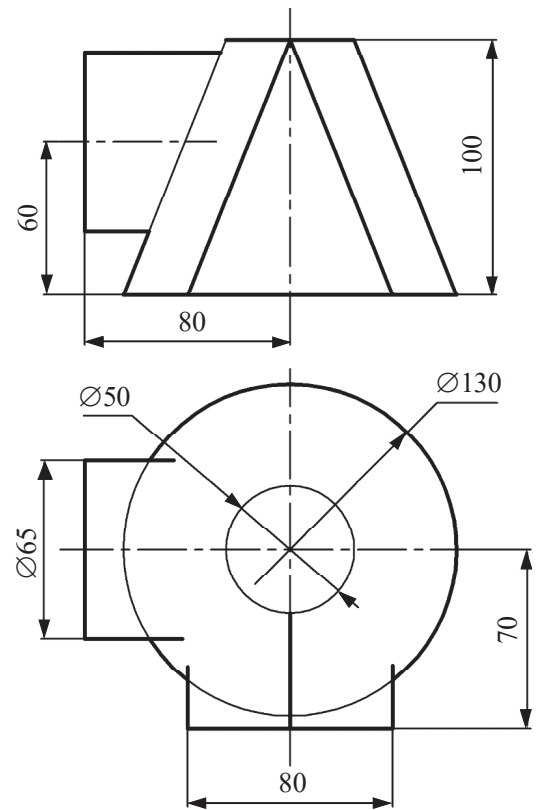
6



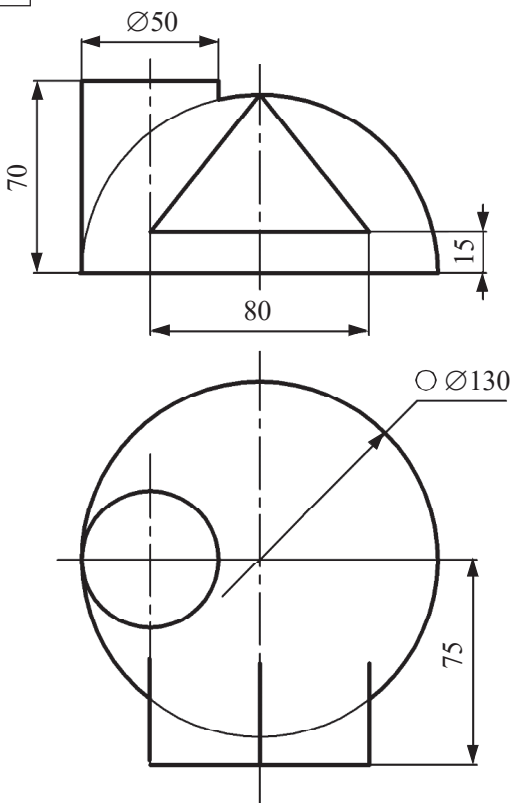
7



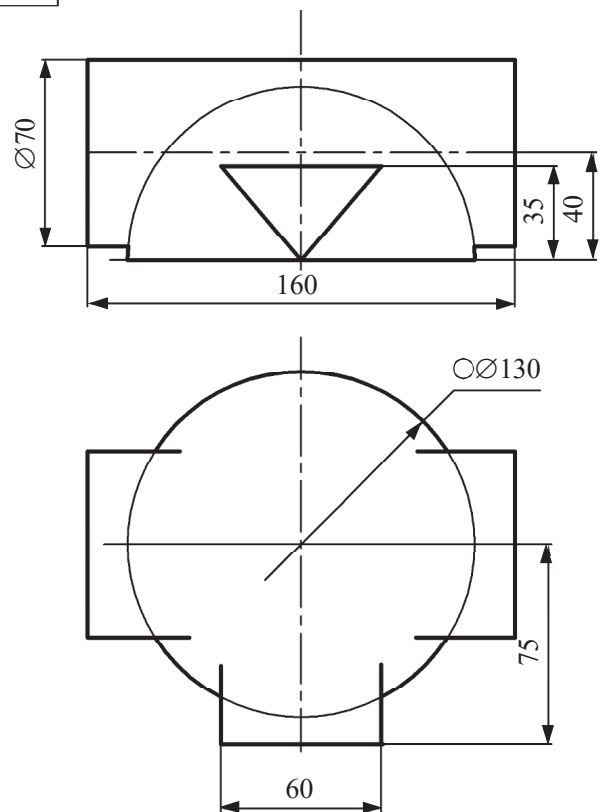
8



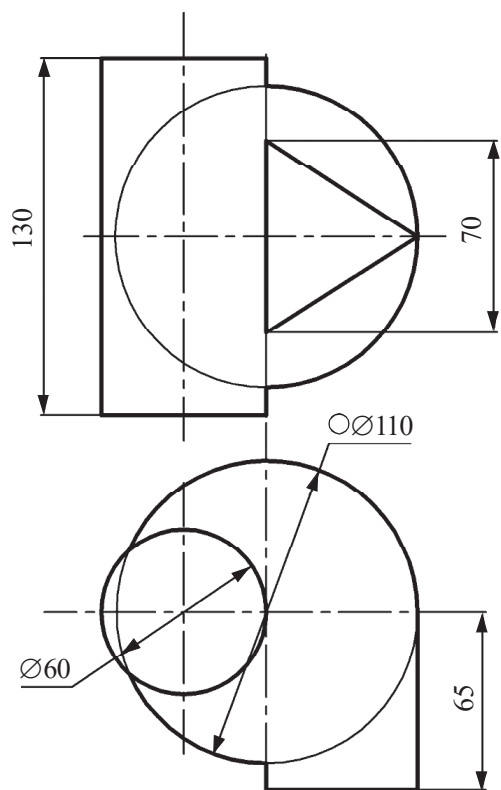
9



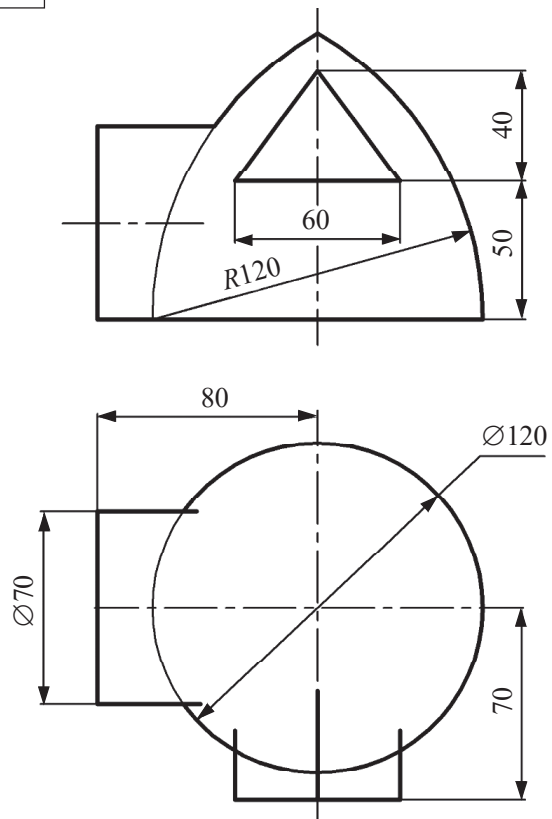
10



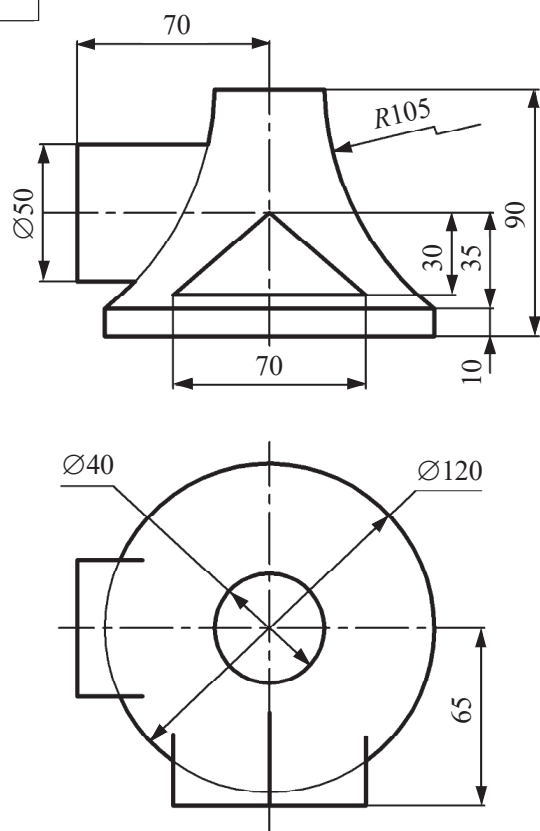
11



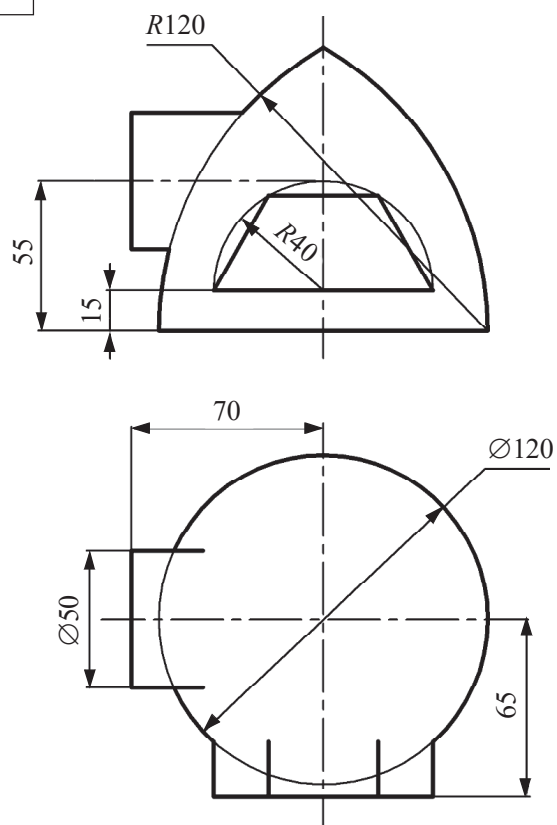
12

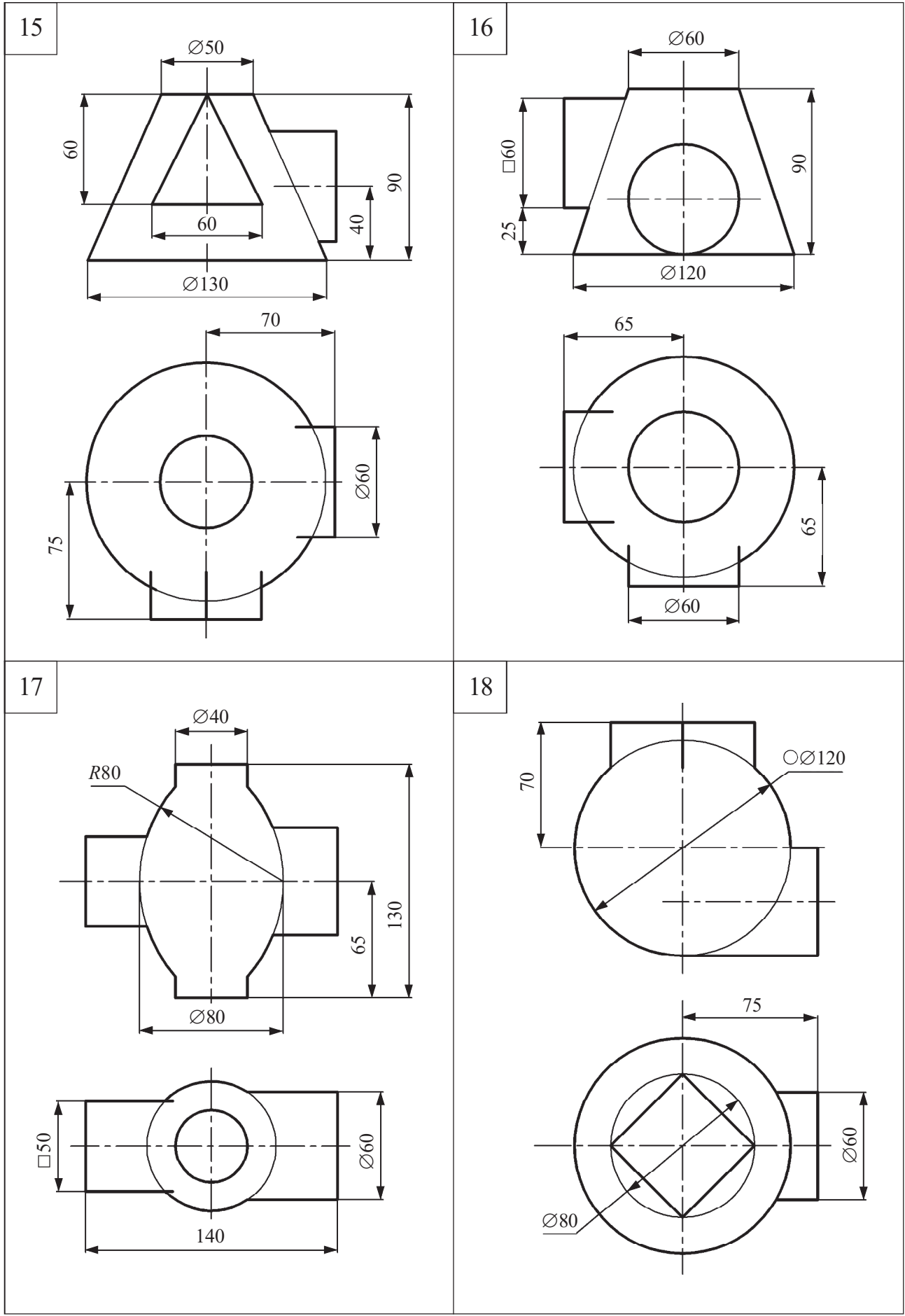


13

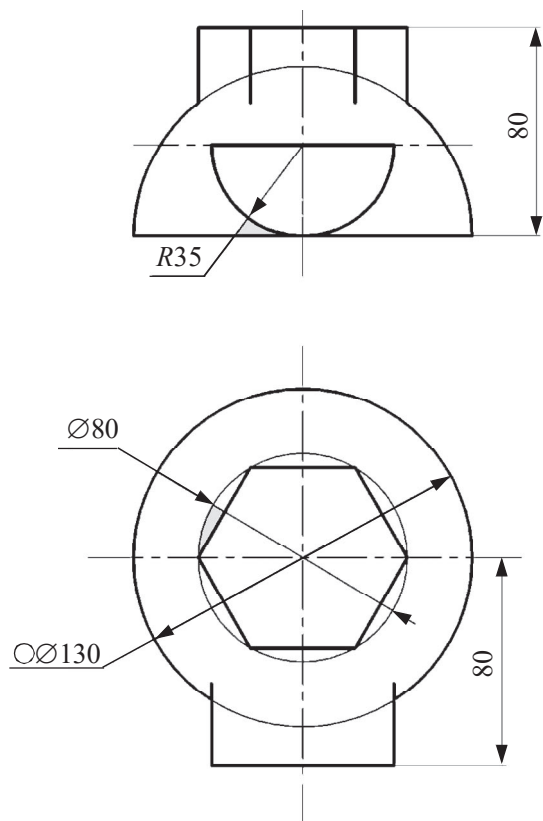


14

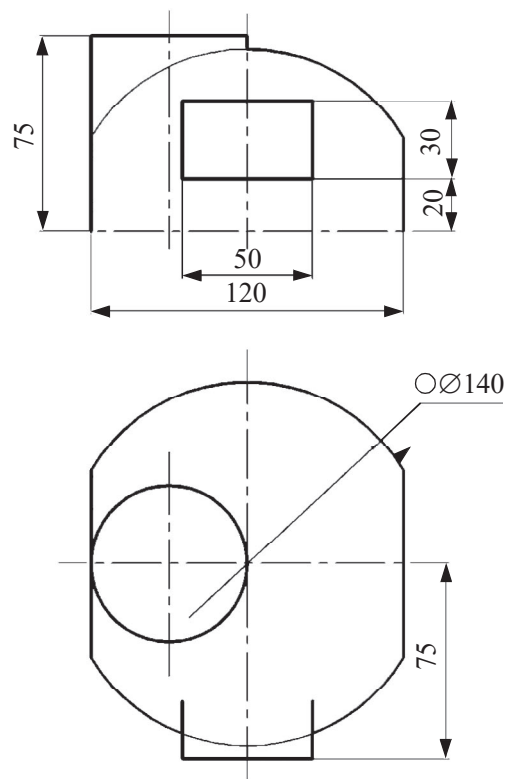




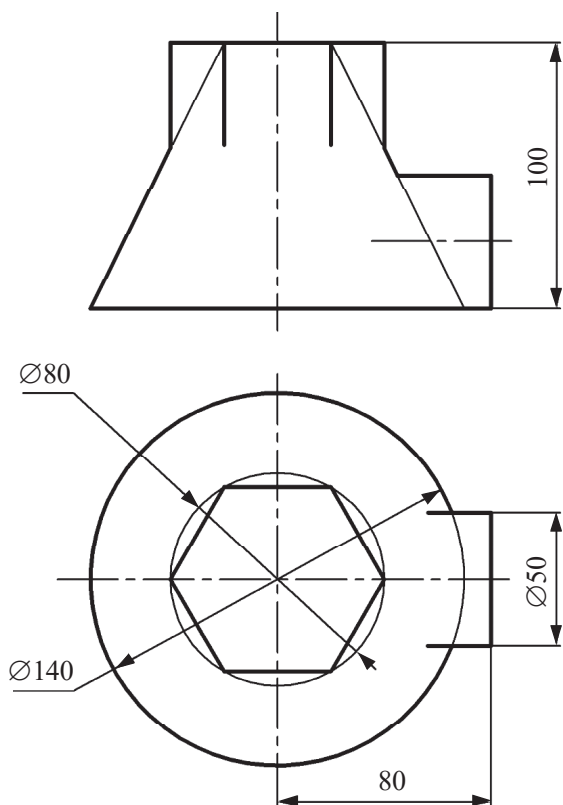
19



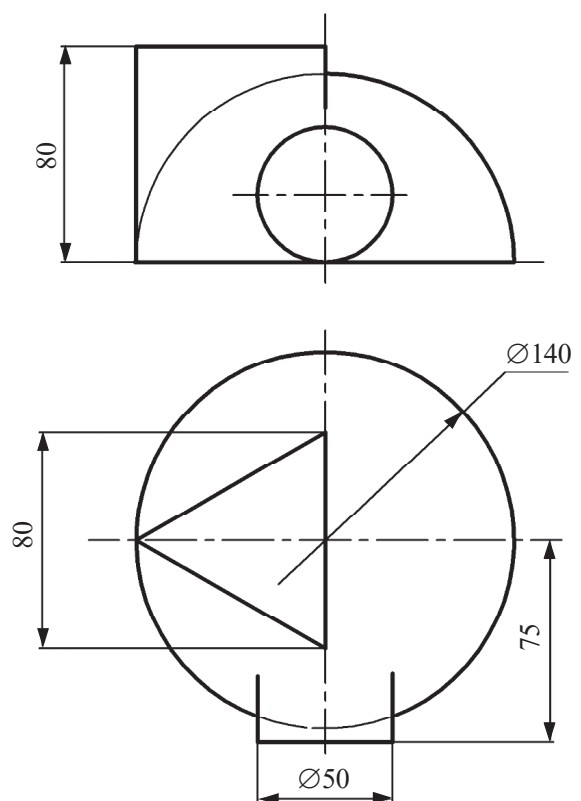
20



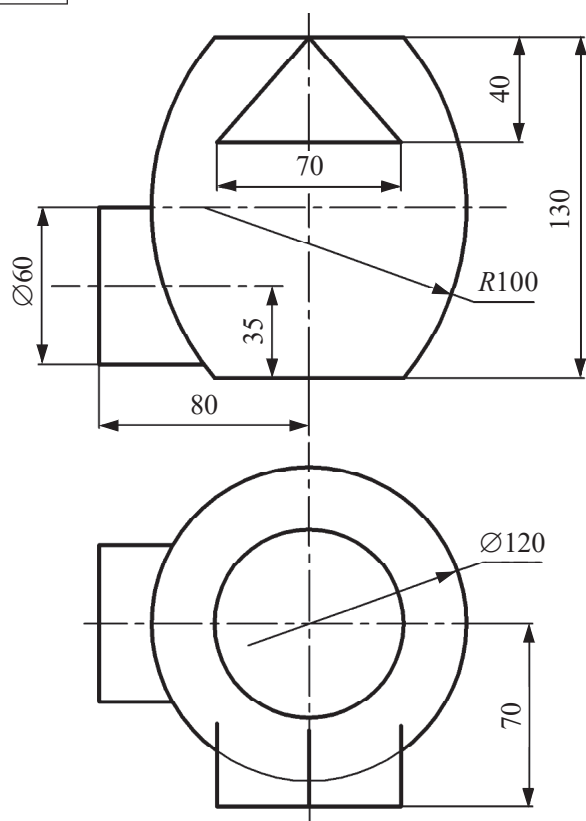
21



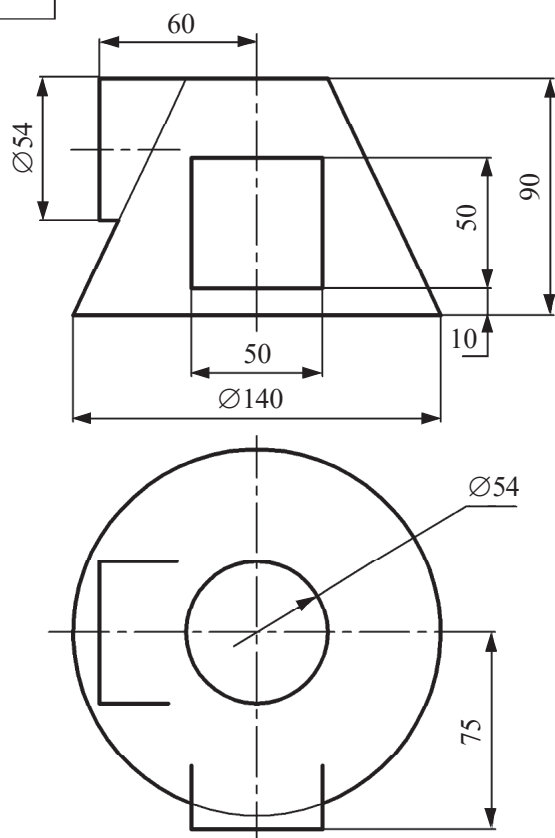
22



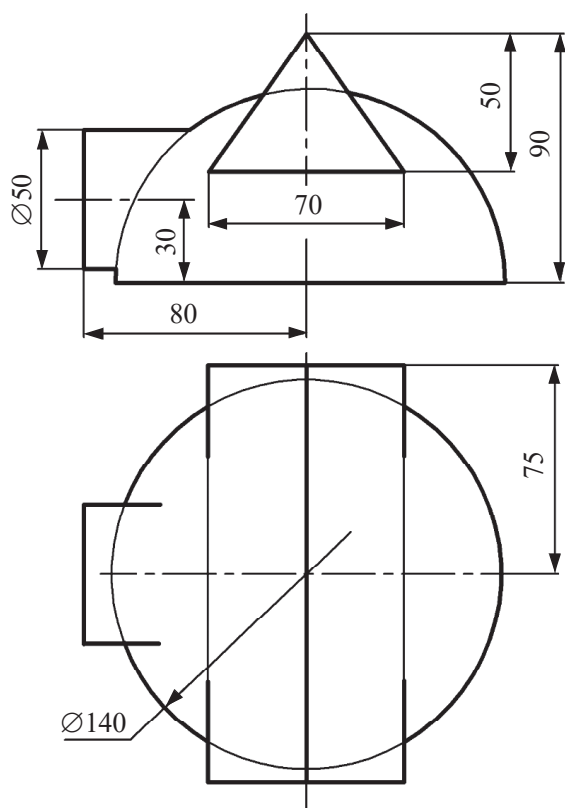
23



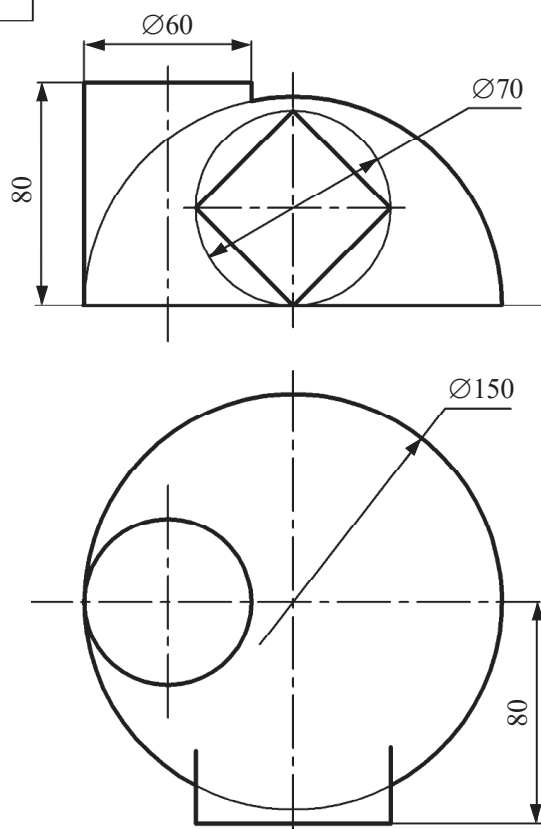
24



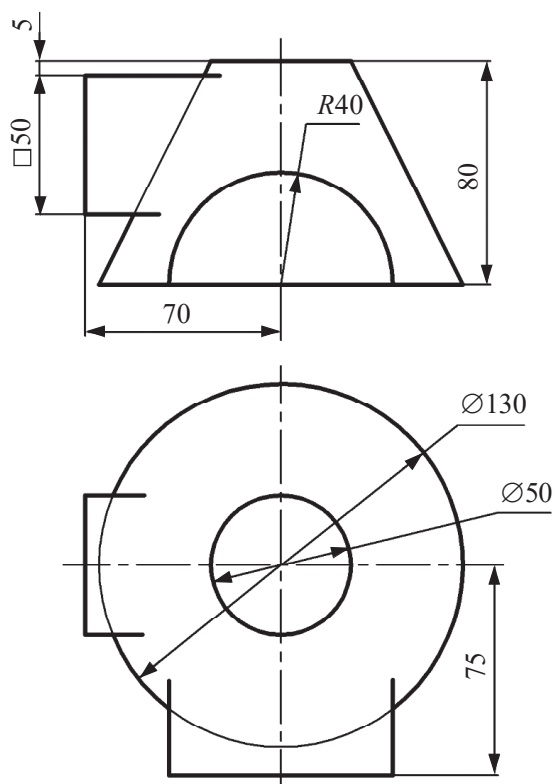
25



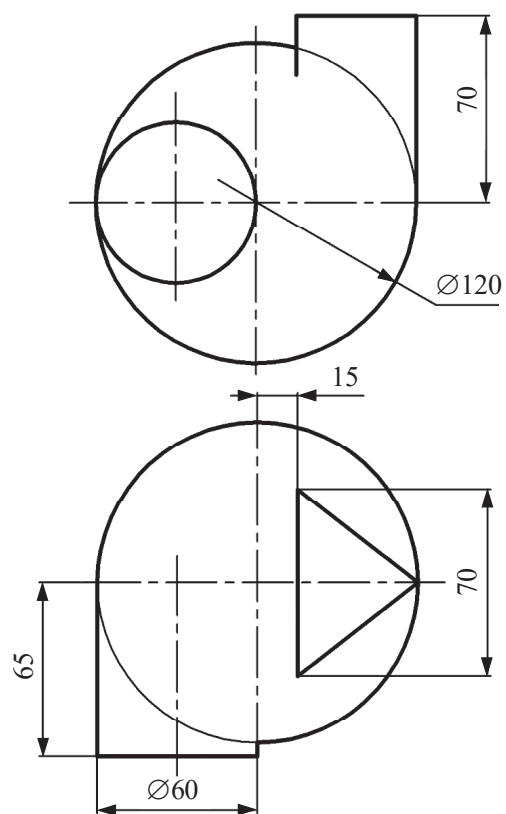
26



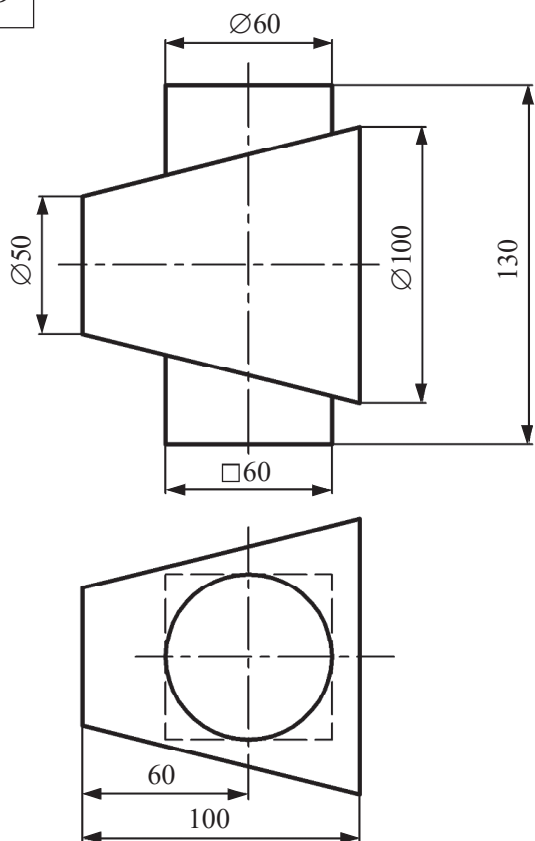
27



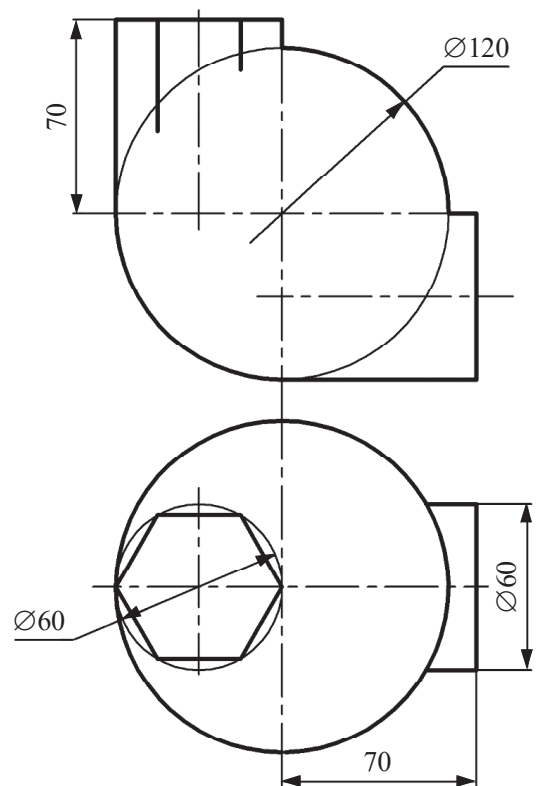
28



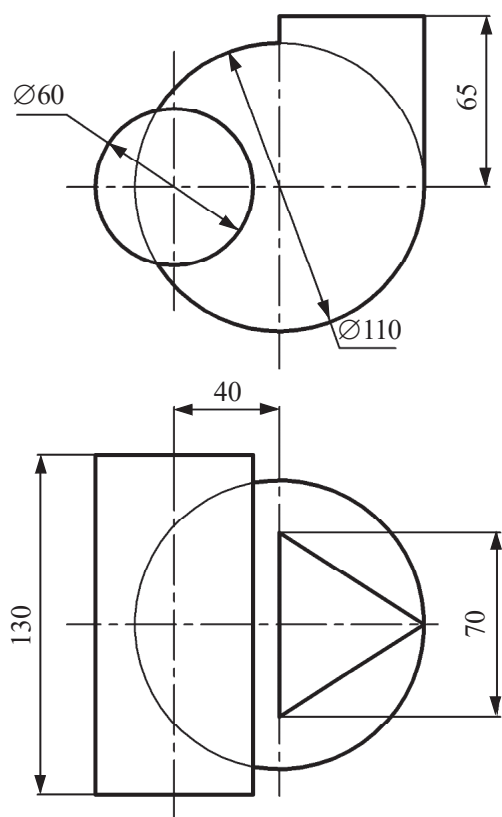
29



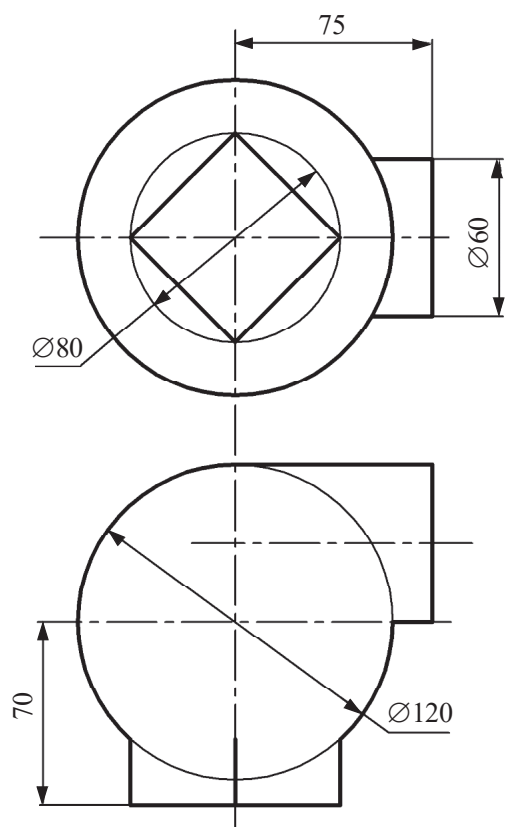
30



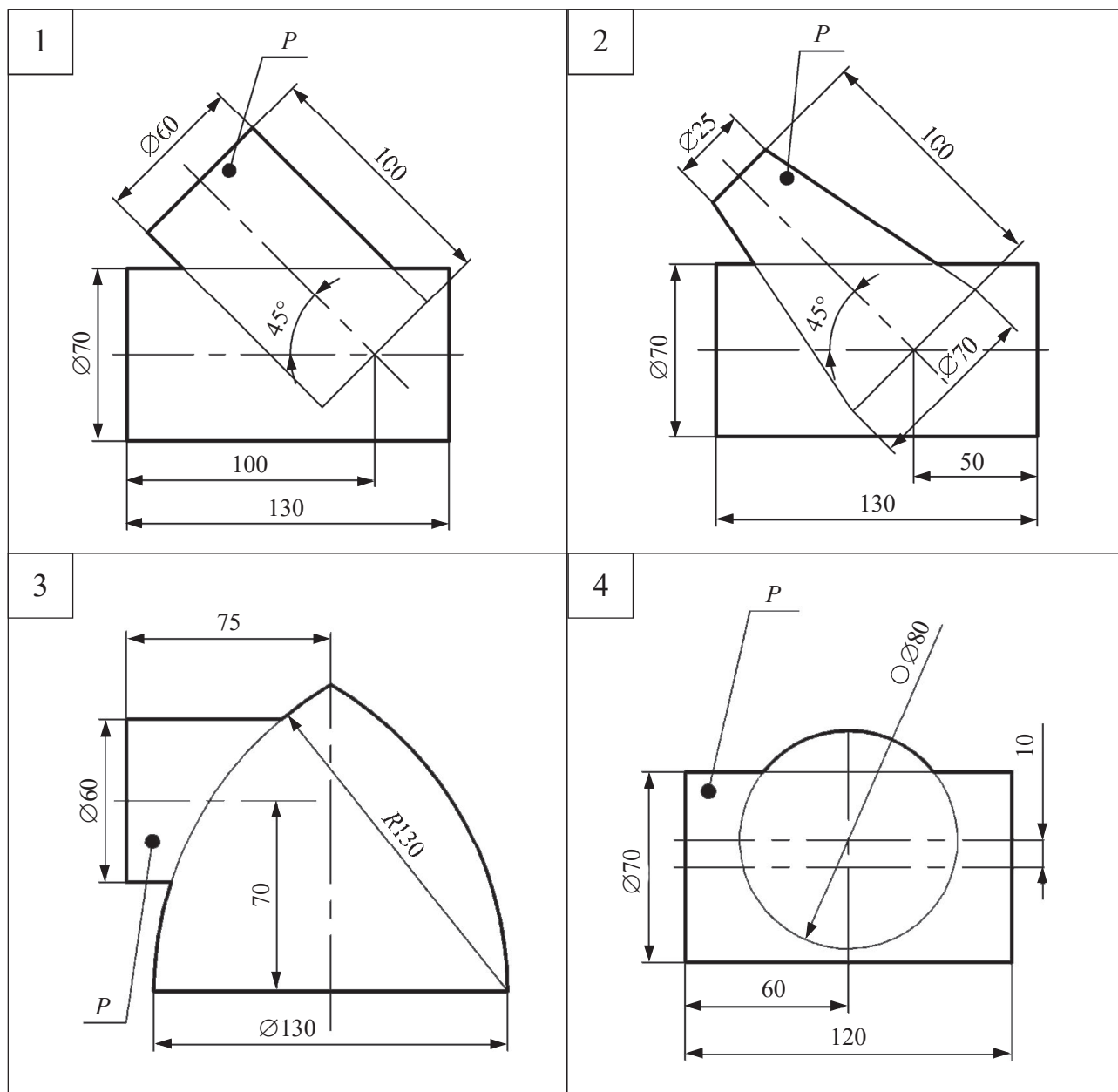
31



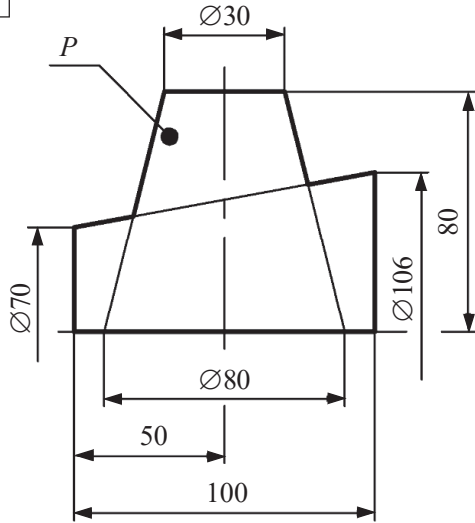
32



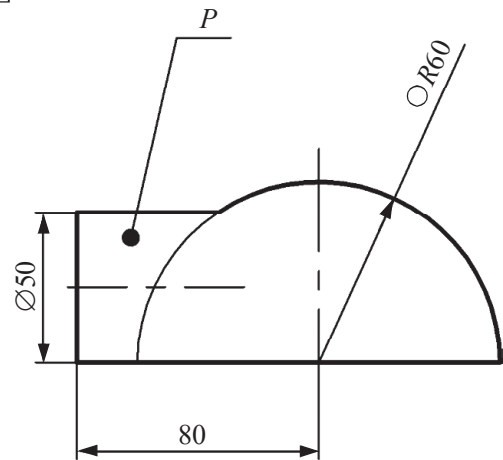
Варианты задач по теме
«Способ секущих сфер»



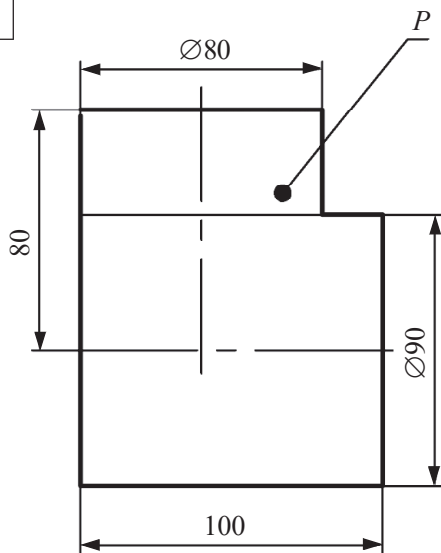
5



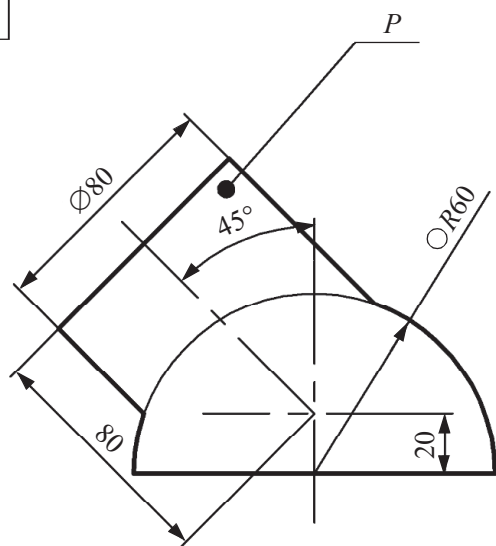
6



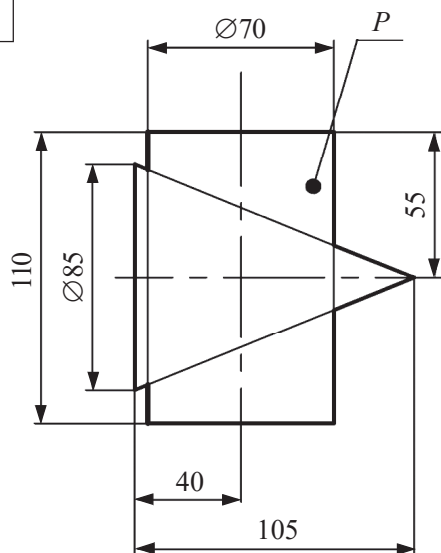
7



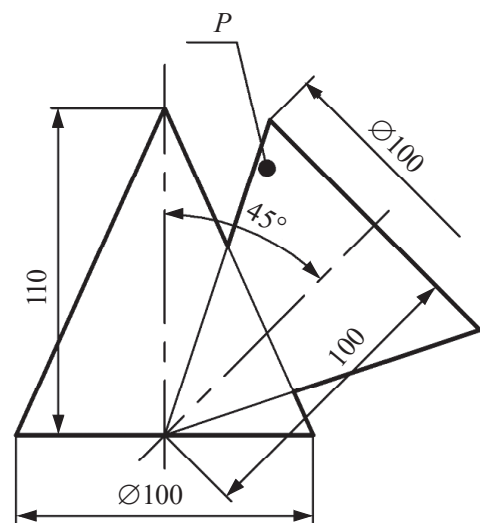
8

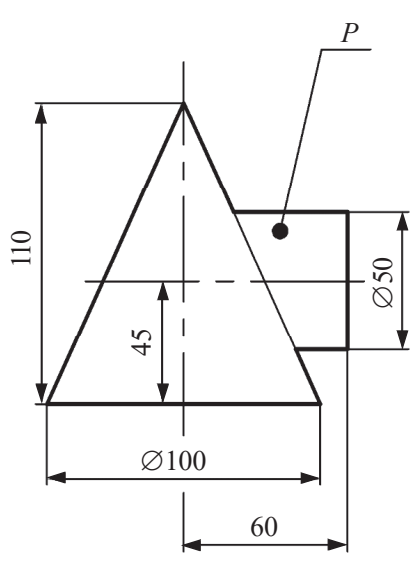
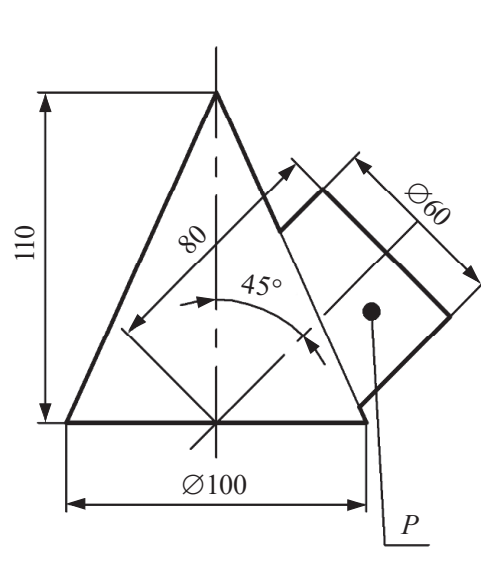
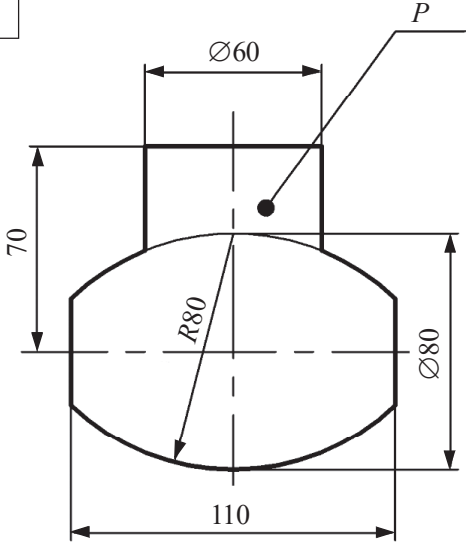
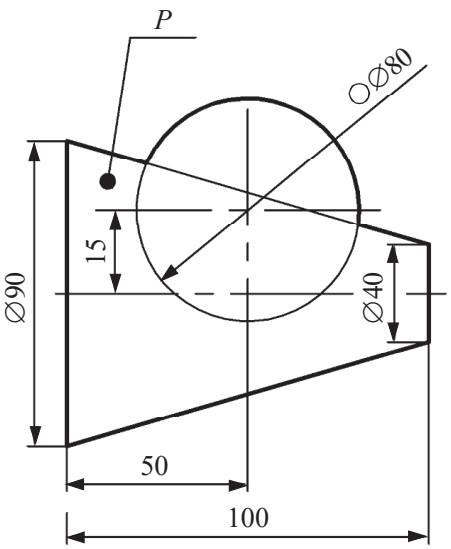
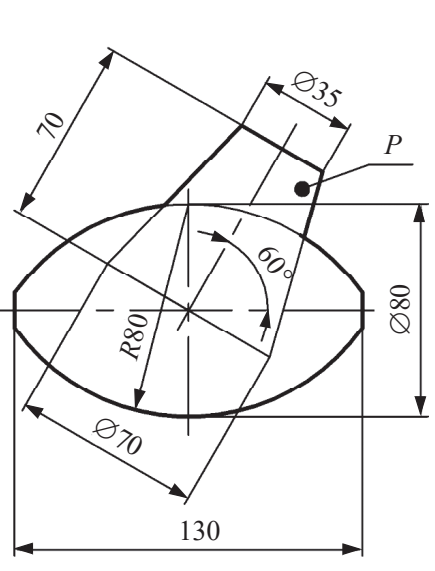
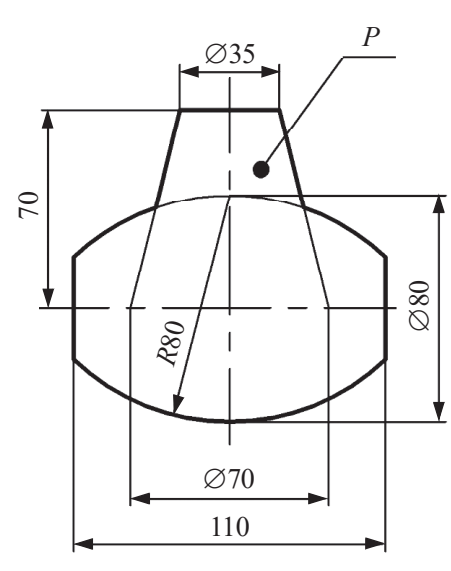


9

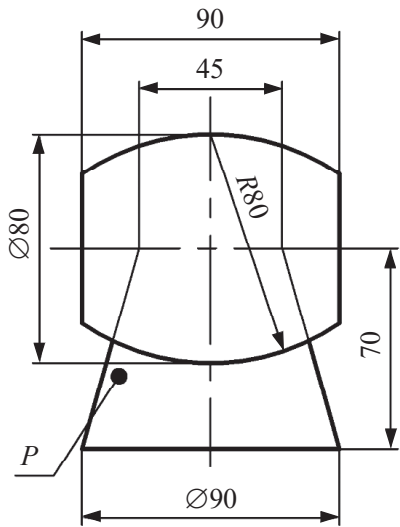


10

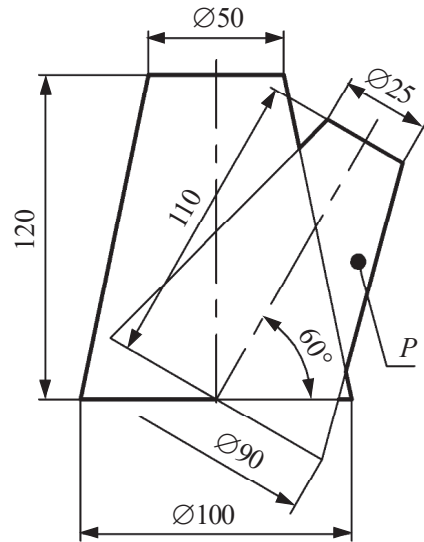


<div data-bbox="124 148 201 224">11</div> 	<div data-bbox="762 148 839 224">12</div> 
<div data-bbox="124 770 201 847">13</div> 	<div data-bbox="762 770 839 847">14</div> 
<div data-bbox="124 1393 201 1469">15</div> 	<div data-bbox="762 1393 839 1469">16</div> 

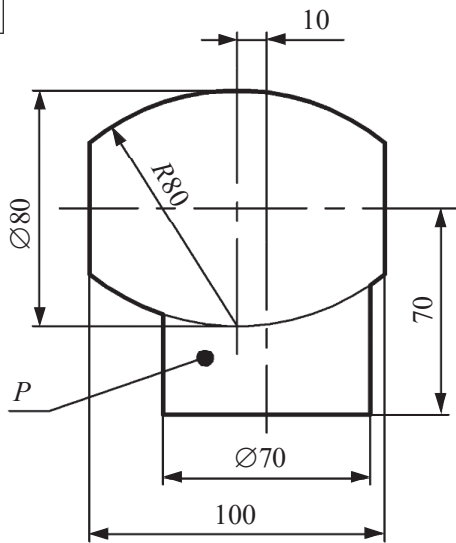
17



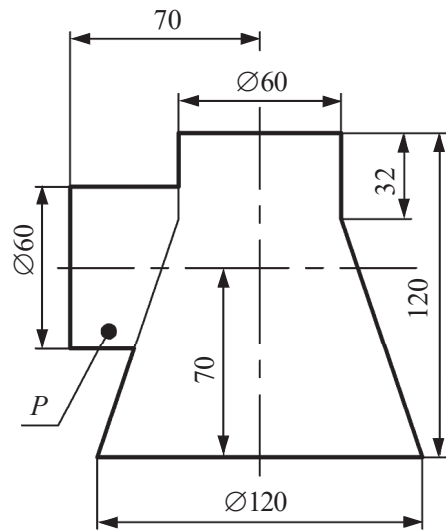
18



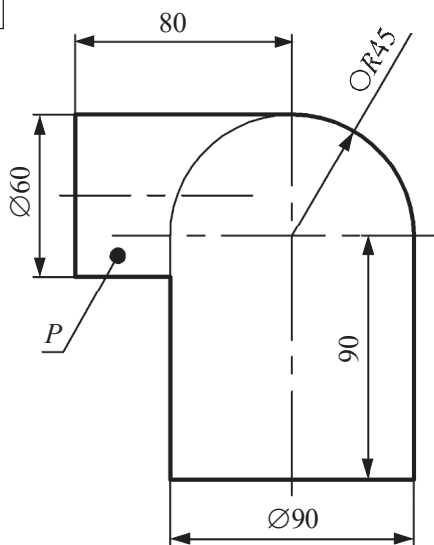
19



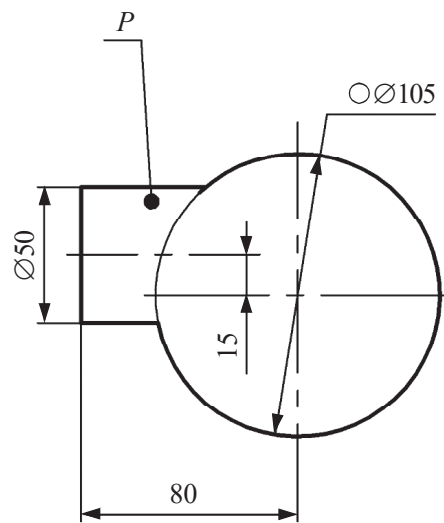
20



21

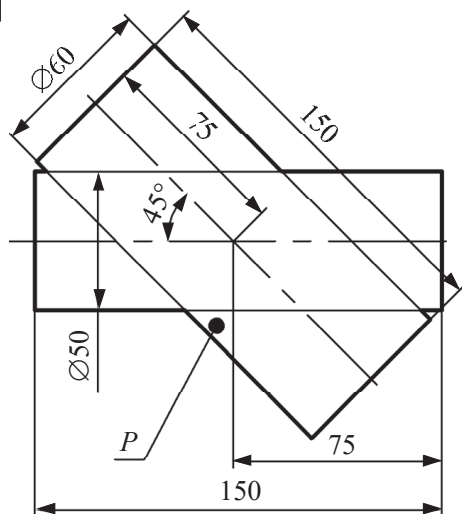


22

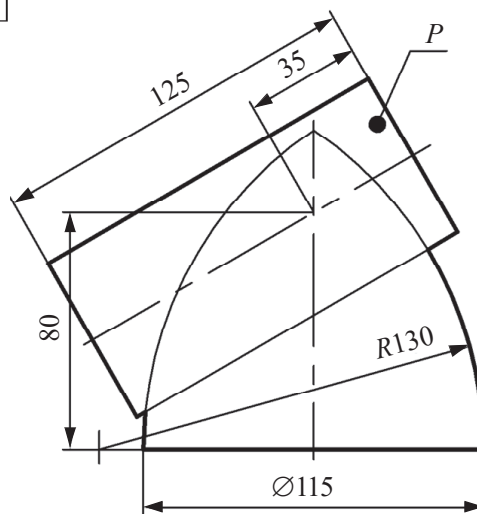


<p>23</p>	<p>24</p>
<p>25</p>	<p>26</p>
<p>27</p>	<p>28</p>

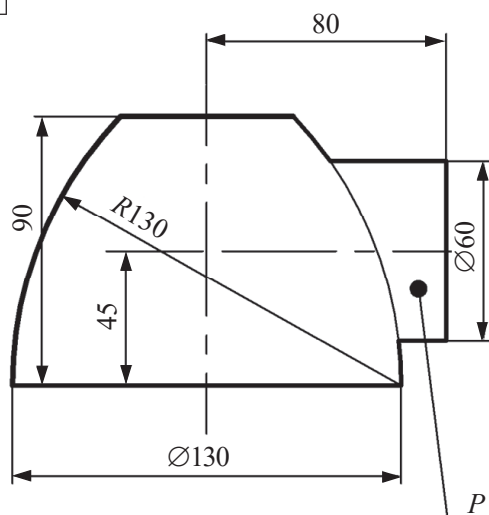
29



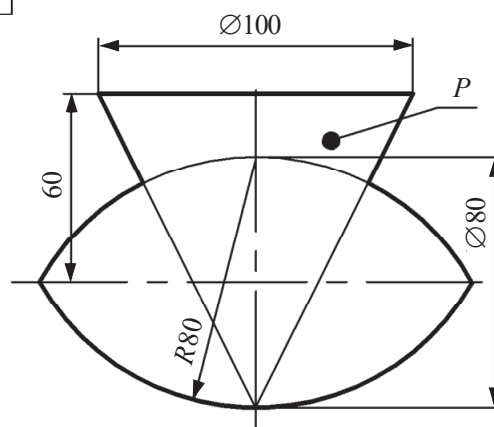
30



31



32



Пример выполнения расчетно-графической работы «Взаимное пересечение поверхностей»

Расчетно-графическая работа (РГР) состоит из трех задач.

Задача 1. Построить три проекции заданных поверхностей и проекции линий их взаимного пересечения, используя в качестве посредников вспомогательные секущие плоскости. Варианты заданий приведены в прил. 3.

Задача 2. Построить одну (фронтальную) проекцию заданных пересекающихся поверхностей и линию их взаимного пересечения, используя в качестве посредников вспомогательные сферические поверхности. Варианты заданий содержатся в прил. 4.

Задача 3. Построить приближенную развертку поверхности, обозначенной в задании к задаче 2 буквой Р.

РГР оформляется на двух листах чертежной бумаги формата А3:

- на листе 1 – задача 1;
- на листе 2 – задачи 2 и 3.

Оформление эшюр выполняется в соответствии со стандартами ЕСКД:

- по ГОСТ 2.301-68 – форматы листов;
- по ГОСТ 2.303-68 – типы линий;
- по ГОСТ 2.304-81 – чертежный шрифт;
- по ГОСТ 2.307-68 – простановка размеров;
- по ГОСТ 2.104-68 – основная надпись, форма 1.

Обозначение документов в основной надписи выполняется по типу

XXXX. 000 000. XXX



Например, обозначение эшюр для 24-го варианта:

1401. 000 001. 024 – эшюр 1;

1401. 000 002. 024 – эшюр 2.

В прил. 6, 7 приведены примеры выполнения эшюр.

Алгоритм решения задачи 1 «Построение линии пересечения поверхностей способом вспомогательных секущих плоскостей»

1. Предварительно выполнить компоновку изображений заданных поверхностей на листе формата А3 в масштабе 1 : 1.

2. Проанализировать задание. Определить, какие поверхности заданы на чертеже. В первой задаче заданы две проецирующие поверхности (призма и цилиндр) и одна центральная непроекцирующая поверхность (сфера, полусфера, конус, тор).

3. По двум проекциям требуется построить третью, соблюдая проекционную связь. Затем определить, где и какие линии пересечения должны быть построены. При пересечении двух поверхностей вращения линией пересечения будет пространственная кривая. При пересечении призмы с поверх-

ностью вращения линия пересечения представляет собой сочетание плоских кривых, причем количество этих кривых будет равно количеству граней призмы.

4. Сначала требуется построить проекции линии пересечения центральной поверхности с цилиндром, а затем с призмой.

5. Поскольку и цилиндр, и призма поверхности проецирующие, решение с каждой из двух поверхностей начинаем с той плоскости проекций, где будет расположена вырожденная проекция (окружность или многоугольник). На этой плоскости проекций проекция линии пересечения – это множество общих точек для заданной пары поверхностей. Если рассмотреть образец выполненного задания в прил. 6, то для пары цилиндр и сфера решение следует начинать с профильной проекции. Для пары поверхностей призма и сфера решение надо начать с горизонтальной плоскости проекций.

При построении линии пересечения с призмой необходимо предварительно познакомиться с темой пересечения поверхностей вращения с плоскостью, поскольку каждую грань призмы можно рассматривать как часть плоскости, ограниченной ребрами призмы. Это требуется для того, чтобы определить, что за линия получается при пересечении с той или иной гранью призмы. Так, при пересечении конуса с плоскостью, в зависимости от положения плоскости, линия пересечения может быть окружностью, эллипсом, параболой или гиперболой. При пересечении плоскости со сферой линия пересечения всегда окружность, но, в зависимости от положения секущей плоскости по отношению к плоскости проекций, проекция линии пересечения может быть окружностью, эллипсом или прямой линией.

После выбора начала решения на готовой проекции линии пересечения назначают характерные и промежуточные точки для построения по ним недостающих проекций линии пересечения.

6. К характерным (обязательным для построения) точкам у цилиндра относим точки, расположенные на пересечении центровых линий с окружностью (вырожденной поверхностью цилиндра). Эти точки в зависимости от положения цилиндра по отношению к плоскостям проекций могут быть названы: точки ближайшие и наиболее удаленные, самые высокие и самые низкие, точки на границе видимости. У призмы характерными являются точки, расположенные на ребрах, точки, обязательные при построении плоских кривых, такие как определяющие большую и малую ось эллипса. Точки, расположенные на границе видимости, у любой поверхности всегда относятся к характерным точкам.

Промежуточные точки назначают для уточнения характера линии на больших участках. Их положение и количество выбирается произвольно.

Недостающие проекции некоторых выбранных и обозначенных точек могут быть построены сразу по линиям связи. Для других требуется использование плоскостей-посредников. Этот метод позволяет установить принадлежность искомой точки двум заданным поверхностям. Следы используемых плоскостей-посредников необходимо обозначить как в прил. 6.

7. После определения положения обозначенных точек их соединяют с учетом характера линии и видимости. Затем выполняют обводку контуров заданных поверхностей.

Алгоритм решения задачи 2

«Построение линии пересечения поверхностей способом вспомогательных концентрических сфер»

1. На листе формата А3 должны быть расположены две задачи, поэтому в левой части листа выполняем фронтальную проекцию заданных поверхностей вращения.

2. Решение задачи выполняем в следующем порядке. Поскольку линия пересечения поверхностей – это множество общих точек, принадлежащих заданным поверхностям, то сначала определяем границы общей части. Находим точки пересечения образующих. Это точки 1_2 и 2_2 на образце прил. 7.

3. Остальные проекции точек линии пересечения строим, используя метод концентрических сфер-посредников. Для этого определяем точку пересечения осей заданных поверхностей O_2 на образце в прил. 6. Определяем радиус минимальной сферы-посредника R_{\min} , это будет радиус сферы, вписанной в наибольшую из поверхностей R_{\max} . Определяем расстояние от центра сфер до наиболее удаленной точки пересечения очертаний заданных поверхностей. Если минимальная сфера-посредник не дает решения (одну поверхность она должна пересекать, а второй касаться), то сразу используют сферы с радиусом R , где R_{\min} определяется расстоянием от центра сфер до ближайшей точки пересечения очертаний образующих:

$$R_{\min} < R < R_{\max}.$$

4. Количество сфер-посредников зависит от крупности чертежа и расположения пересекающихся поверхностей. В общем случае каждая сфера-посредник пересекает (касается) заданные поверхности по окружности, которая проецируется в линию, перпендикулярную оси соответствующей поверхности и проходит через точки пересечения очерков сферы-посредника и этой поверхности. От каждой сферы-посредника получаем линии пересечения с каждой из поверхностей, которые, пересекаясь, дают общие точки, принадлежащие линии пересечения поверхностей. Построенные точки соединяем плавной кривой линией.

5. На последнем этапе выполняем обводку проекции поверхностей с учетом видимости.

6. В задании могут быть задачи, где минимальная сфера вписана в обе заданные поверхности. Это частный случай, и решение выполняем в соответствии с теоремой Монжа. Проекция линии пересечения распадается на две плоские кривые, которые проходят через точки пересечения очерков.

Алгоритм решения задачи 3 «Построение развертки поверхности»

1. Для построения развертки поверхности, обозначенной буквой P и ограниченной линией пересечения, необходимо вычертить поверхность в двух проекциях, отдельно, на свободном месте поля чертежа по размерам. Линию пересечения следует скопировать по точкам с фронтальной проекции координатным способом, измеряя координаты точек по осям координат. Следует заметить, что для построения развертки эти точки не используются.

2. Развертка цилиндрической и конической поверхностей является приближенной, потому что мы заменяем эти поверхности более простыми гранными поверхностями, имеющими точные развертки. Этот способ называется аппроксимацией. Например, в цилиндр вписываем призму, а в конус – пирамиду. Для учебных чертежей достаточно построить вписанный в основание правильный 12-угольник, чтобы погрешность была одинаковой.

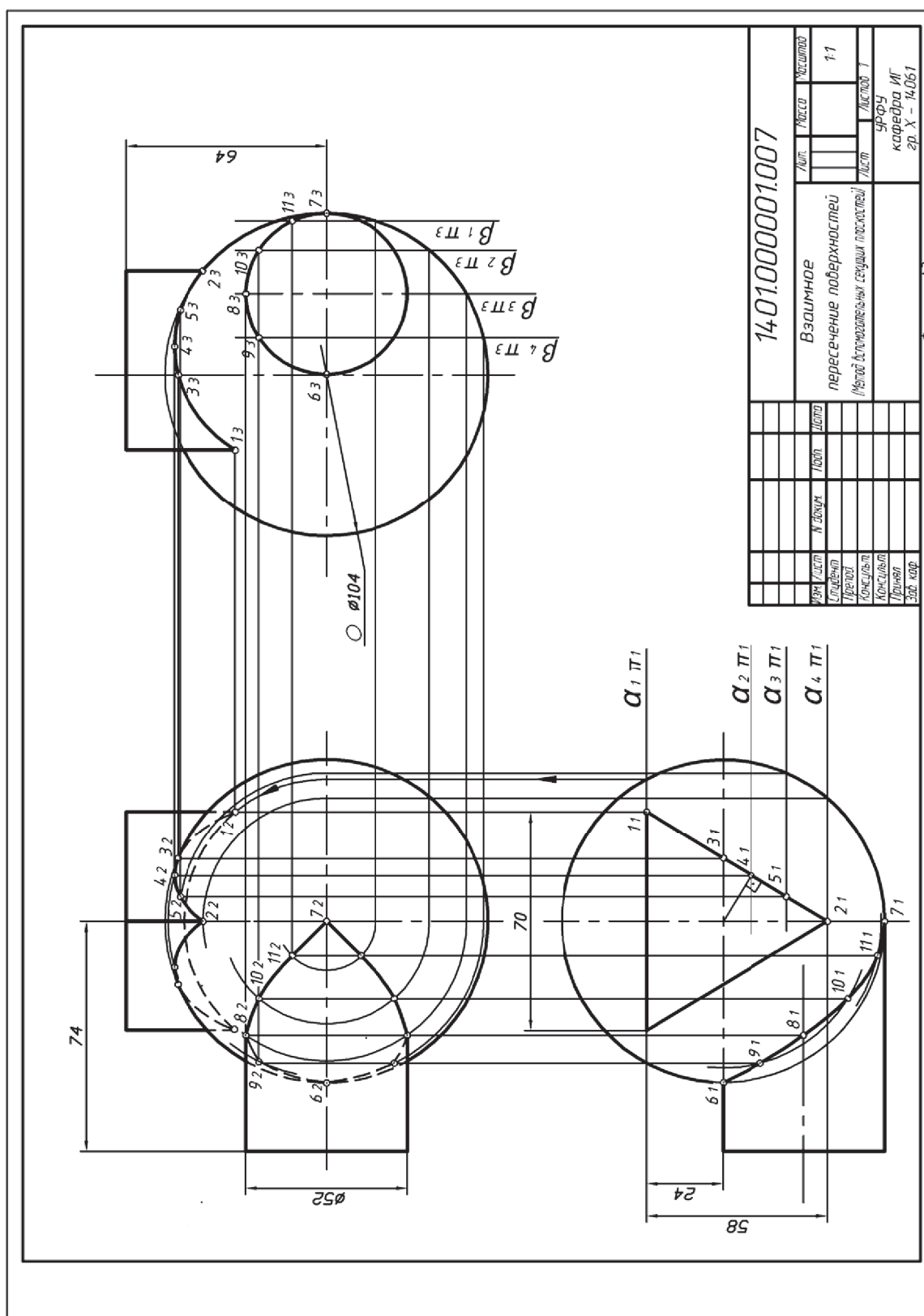
3. Провести боковые ребра вписанной призмы или пирамиды, обозначить точки линии пересечения на ребрах. Ребра призмы (образующие цилиндра) являются прямыми частного положения и проецируются без искажения на фронтальной плоскости проекций. Ребра пирамиды (образующие конуса), за исключением очерковых образующих, не параллельны фронтальной плоскости проекций, следовательно, проецируются не в натуральную величину. Для определения натуральной величины образующих конуса применяют способ вращения прямой вокруг проецирующей прямой, в качестве которой служит ось конуса.

4. В прил. 7 выполнен образец решения задачи способом вспомогательных сфер и построена развертка конической поверхности. Если в условии задан усеченный конус, для построения развертки следует достроить вершину конуса. Вписанный в основание 12-угольник строится с помощью циркуля. Как известно из школьной программы, сторона правильного шестиугольника равна радиусу описанной окружности. Вершины многоугольника обозначены цифрами, точки на линии пересечения – латинскими буквами. Достаточно построить половину основания и половину развертки, поскольку они представляют симметричные фигуры.

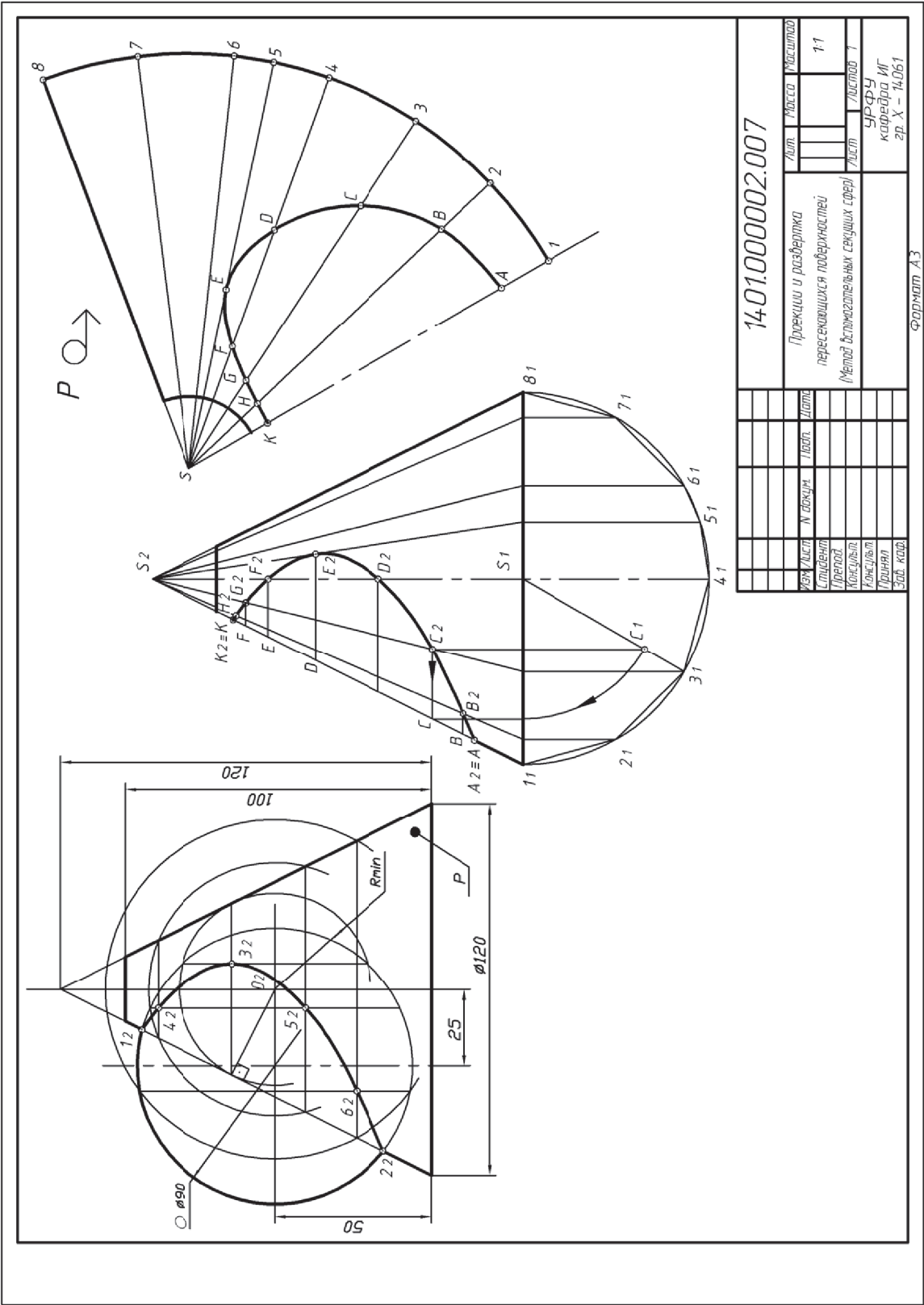
5. Разверткой конуса является сектор круга, радиус которого равен натуральной величине очерковой образующей конуса. Проводим ось симметрии развертки, затем последовательно откладываем на дуге сектора стороны вписанного многоугольника и соединяем эти точки с вершиной. Для нахождения экстремальной точки E проводим дополнительную образующую $S5$. Для определения натуральной величины образующих выполняем вращение образующих вокруг оси конуса до преобразования в положение, параллельное фронтальной плоскости проекций. В результате на горизонтальной проекции точки образующих описывают окружность, а на фронтальной проекции перемещаются по траектории, перпендикулярной оси конуса. Провести линии вспомогательного построения для определения натуральной величины образующих.

6. На развертке откладываем образующие SA , SB , SC и т. д. Соединяем полученные точки плавной кривой, обводим развертку и линию пересечения основной сплошной, ось симметрии – тонкой штрихпунктирной линией. Обозначим развертку знаком в соответствии с ГОСТ 2.109-68.

**Пример решения задачи по теме
«Взаимное пересечение поверхностей. Способ секущих плоскостей»**



Пример решения задачи по теме
«Взаимное пересечение поверхностей. Способ секущих сфер»



ИНФОРМАЦИОННЫЕ РЕСУРСЫ, РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

- Баранова Л. В.* Взаимное пересечение поверхностей : метод. указания и контрольные работы / Л. В. Баранова, Е. Я. Жигалова, С. В. Лукинских. – Екатеринбург : ГОУ ВПО УГТУ – УПИ, 2006. – 45 с.
- Бубенников А. В.* Начертательная геометрия / А. В. Бубенников. – М. : Высш. шк., 1985. – 288 с.
- Гордон В. О.* Курс начертательной геометрии : учеб. пособие для втузов / В. О. Гордон, М. А. Семенов-Огиевский ; под ред. В. О. Гордона и Ю. Б. Иванова. – 28-е изд., стереотип. – М. : Высш. шк., 2008. – 272 с. – ISBN 978-5-06-006153-6.
- Фролов С. А.* Начертательная геометрия : учеб. для вузов / С. А. Фролов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Инфра-М, 2011. – 285 с. – ISBN 978-5-16-001849-2.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	4
1. ПОСТРОЕНИЕ ПРОЕКЦИЙ ТОЧКИ, ПРЯМОЙ ЛИНИИ	5
1.1. Метод проекций	5
1.2. Ортогональные проекции точки	5
1.3. Ортогональные проекции прямой линии	7
1.4. Относительное положение прямых линий	9
<i>Вопросы для самопроверки</i>	16
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	16
2. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ ПОВЕРХНОСТИ	17
2.1. Ортогональные проекции плоскости	17
2.1.1. Способы задания плоскости на ортогональном чертеже	17
2.1.2. Следы плоскости	18
2.1.3. Плоскости общего и частного положений	19
2.1.4. Принадлежность прямой и точки плоскости	20
2.1.5. Особые линии плоскости	21
2.2. Многогранники	22
2.2.1. Призмы	22
2.2.2. Пирамиды	22
2.3. Поверхности вращения	23
<i>Вопросы для самопроверки</i>	24
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	25
3. ПОСТРОЕНИЕ ПРОЕКЦИЙ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ	26
3.1. Построение линии пересечения поверхности плоскостью	26
3.1.1. Пересечение поверхности цилиндра плоскостями	26
3.1.2. Пересечение поверхности сферы плоскостями	26
3.1.3. Пересечение поверхности прямого кругового конуса плоскостями	27
3.1.4. Построение линии пересечения многогранника с плоскостью	27
3.2. Построение сечения геометрических тел плоскостью	28
3.3. Построение выреза геометрического тела плоскостями, другими телами	28
3.4. Пересечение поверхности и прямой линии	32
<i>Вопросы для самопроверки</i>	32
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	33
4. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ	35
4.1. Общий прием построения линий взаимного пересечения поверхностей	35
4.1.1. Использование плоскостей частного положения в качестве посредников	35
4.1.2. Использование способа концентрических секущих сфер-посредников	39
4.2. Построение разверток поверхностей	42
4.2.1. Построение развертки цилиндрической поверхности	42
4.2.2. Построение развертки конической поверхности	42
<i>Вопросы для самопроверки</i>	44
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	45

<i>Приложение 1</i>	48
<i>Приложение 2</i>	53
<i>Приложение 3</i>	59
<i>Приложение 4</i>	68
<i>Приложение 5</i>	74
<i>Приложение 6</i>	77
<i>Приложение 7</i>	78
Информационные ресурсы, рекомендуемые для изучения дисциплины	79

Учебное издание

Лукинских Светлана Владимировна
Баранова Любовь Вениаминовна
Сидякина Татьяна Ивановна

**ЭЛЕМЕНТЫ
НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ
В ИНЖЕНЕРНОЙ ГРАФИКЕ**

Учебное пособие

2-е издание, переработанное и дополненное

Зав. редакцией *М. А. Овечкина*
Редактор *Т. А. Федорова*
Корректор *Т. А. Федорова*
Компьютерная верстка *Г. Б. Головина*

Подписано в печать 13.09.2023. Формат 60 × 84/8.
Бумага офсетная. Цифровая печать.
Уч.-изд. л. 7,3. Усл. печ. л. 9,77. Тираж 30 экз. Заказ 108.

Издательство Уральского университета.
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: +7 (343) 389-94-79, 350-43-28
E-mail: rio.marina.ovechkina@mail.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: +7 (343) 358-93-06, 350-58-20, 350-90-13
Факс: +7 (343) 358-93-06
<http://press-urfu.ru>

ДЛЯ ЗАМЕТОК

