



МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Егорьевский технологический институт (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Московский государственный технологический университет «СТАНКИН»
(ЕТИ ФГБОУ ВПО МГТУ «СТАНКИН»)

Факультет технологии и управления производствами
Кафедра естественнонаучных дисциплин

ИЗУЧЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА
Методические указания к выполнению лабораторной работы

ЕТИ. Ф.ЛР.04.

г. Егорьевск 2014

Составители: _____ В.Ю. Никифоров, ст. преподаватель ЕНД

В методических указаниях рассмотрены: динамика вращательного движения твердого тела; момент инерции твёрдых тел и закон сохранения момента импульса; элементы статики и условия равновесия тел, понятие центра тяжести; момент инерции твердого тела относительно произвольной оси и теорема Гюйгенса — Штейнера, понятие колебания тела и его характеристики, гармонические колебания и понятие гармонического осциллятора, виды маятников: математический маятник и физический маятник, изучение свободных колебаний физического маятника, определение ускорения свободного падения с помощью физического маятника.

Методические указания предназначены для студентов 1 курса, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров: 151900 Конструкторско-технологическое обеспечение автоматизированных машиностроительных производств, 220700 Автоматизация технологических процессов и производств, 280700 Техносферная безопасность для лабораторных работ по дисциплине «Физика».

Методические указания обсуждены и одобрены на заседании учебно-методической группы (УМГ) кафедры ЕНД

(протокол № _____ от _____ г.)

Председатель УМГ _____ Г.Г. Шабаева

Изучение колебаний физического маятника

- 1 Цель работы:** изучение свободных колебаний физического маятника.
- 2 Оборудование:** лабораторная установка, метровая линейка, электронный секундомер

3 Содержание работы

- 3.1 Изучить теоретический материал.
- 3.2 Проверить изохронность колебаний маятника. Определить период колебаний для 5—6 значений амплитуды в пределах от $2-3^\circ$ до $10-15^\circ$.
- 3.3 Оценить влияние затухания на амплитуду колебаний. С этой целью определить число колебаний N , за которое амплитуда колебаний уменьшается примерно в три раза.
- 3.4 Определить с помощью микрокалькулятора значения $y(x)$ по формуле (51) не менее чем при десяти различных значениях x в интервале $0 < x \leq 1/2$. Результаты вычислений занесите в **таблицу 2**.
- 3.5 Построить по точкам график теоретически ожидаемой зависимости периода колебаний стержня от параметра $\varepsilon = a/l$ в области значений $0 < \varepsilon \leq 1/2$. График строится в координатной плоскости $x = \varepsilon, y = T/T_0$.
- 3.6 Провести экспериментальную проверку теоретических соотношений (49) и (51). Провести измерение периода колебаний T для выбранных значений $\varepsilon = a/l$. Результаты измерений занести в **таблицу 3**.
- 3.7 Построить по точкам график полученной экспериментально зависимости в плоскости $x = \varepsilon, y = T/T_0$.
- 3.8 Сравнить полученные графики. Сделать вывод.
- 3.9 Оформить отчет.

4 Теоретические сведения к работе

4.1 Момент инерции твёрдых тел. Динамика вращательного движения твёрдого тела вокруг неподвижной оси: Закон Ньютона для вращательного движения

Второй закон Ньютона для частицы, движущейся под действием силы \vec{F} , может быть записан в виде:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (1)$$

где $\vec{p} = m\vec{v}$ — импульс частицы. Умножим это уравнение векторно на радиус-вектор частицы \vec{r} . Тогда

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \vec{F} \quad (2)$$

Введем теперь новые величины – момент импульса $\vec{L} = \vec{r} \cdot \vec{p}$ и момент силы $\vec{M} = \vec{r} \cdot \vec{F}$. Тогда полученное уравнение принимает вид:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad (3)$$

Для частицы, совершающей круговое движение в плоскости (x, y), вектор момента импульса направлен вдоль оси z (т.е. вдоль вектора угловой скорости $\vec{\omega}$) и равен по модулю

$$L = mvr = mr^2\omega, \quad (4)$$

поэтому

$$\vec{L} = mr^2\vec{\omega}. \quad (5)$$

Введем обозначение: $I = mr^2$. Величина I называется **моментом инерции материальной точки относительно оси, проходящей через начало координат**.

Твердое тело является системой материальных точек, расстояние между которыми при движении не изменяется. При движении вокруг неподвижной оси все материальные точки, образующие твердое тело, вращаются с одинаковой угловой скоростью ω . **Тело называется абсолютно твердым, если расстояние между любой парой его точек неизменно.**

Для системы точек, вращающихся вокруг оси z с одинаковой угловой скоростью, можно обобщить определение момента инерции, взяв сумму моментов инерции всех точек относительно общей оси вращения:

$$I = \sum m_i r_i^2. \quad (6)$$

С помощью понятия интеграла можно определить и момент инерции произвольного тела относительно оси вращения.

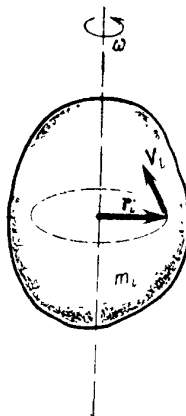


Рисунок 1 Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси

Пусть r_i – расстояние до i -ой точки тела от оси вращения, а m_i – масса i -ой точки тела. Тогда линейная скорость этой точки $v_i = \omega r_i$, а модуль момента

импульса относительно оси вращения $L_i = m_i v_i r_i = m_i r_i^2 \omega$. Модуль момента импульса L твердого тела складывается из моментов импульса всех образующих это тело материальных точек

$$L = \sum L_i = \left(\sum m_i r_i^2 \right) \omega \quad (7)$$

или

$$L = I \omega, \quad (8)$$

где

$$I = \sum m_i r_i^2 \quad (9)$$

Суммирование проводится по всем материальным точкам, образующим тело. Практически вычисление такой суммы сводится к вычислению соответствующего интеграла, что для однородных тел симметричной формы обычно является несложной задачей.

Под действием приложенных к телу внешних сил его момент импульса $\vec{L} = I \vec{\omega}$ изменяется со скоростью

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M}_{\text{внеш}}, \quad (10)$$

$\vec{M}_{\text{внеш}}$ - сумма моментов внешних сил, приложенных к телу:

$$\vec{M}_{\text{внеш}} = \sum \vec{M}_j = \sum [\vec{r}_j, \vec{F}_j] \quad (11)$$

Здесь $\vec{M}_j = [\vec{r}_j, \vec{F}_j]$ — момент относительно оси вращения j -й внешней силы, приложенной к телу; \vec{F}_j — проекция этой силы на плоскость, перпендикулярную оси вращения тела; r_j — плечо этой силы (**рисунки 2**)

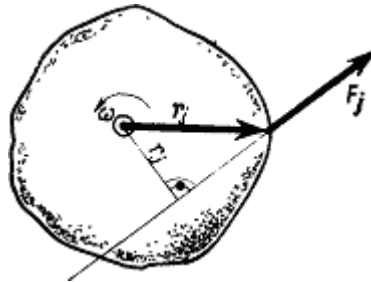


Рисунок 2 Момент силы относительно оси вращения твердого тела

В любом случае можно записать, что вектор момента импульса системы точек или тела, вращающихся с одинаковой угловой скоростью вокруг общей оси, равен

$$\vec{L} = I \vec{\omega}. \quad (12)$$

Тогда уравнение движения тела, вращающегося вокруг некоторой оси, принимает вид:

$$I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M} \quad (13)$$

Пусть вектор \vec{F} перпендикулярен оси вращения. Тогда момент силы \vec{M} – вектор, направленный вдоль оси вращения и по модулю равный произведению модуля силы на расстояние от прямой действия силы до оси вращения (плечо силы).

Следует обратить внимание на простую аналогию между уравнениями Ньютона для поступательного и вращательного движений.

Поступательное движение	Вращательное движение
масса m	момент инерции I
скорость \vec{v}	угловая скорость $\vec{\omega}$
сила \vec{F}	момент силы \vec{M}
уравнение движения $m d\vec{v}/dt = \vec{F}$	уравнение движения $I d\vec{\omega}/dt = \vec{M}$
кинетическая энергия поступательного движения $mv^2/2$	кинетическая энергия вращения $I\omega^2/2$

4.2 Закон сохранения момента импульса. Сохранение момента импульса в поле центральных сил

Если сила, действующая на тело со стороны другого тела (находящегося в начале координат инерциальной системы отсчёта), всегда направлена вдоль радиуса-вектора \vec{r} , соединяющего эти тела (такими силами являются сила тяготения, кулоновская сила, и др.), то она называется **центральной силой**. В этом случае векторное произведение $\vec{r} \times \vec{F}$ равно нулю (как векторное произведение коллинеарных векторов). Следовательно, равен нулю момент силы \vec{M} и уравнение вращательного движения принимает вид $d\vec{L}/dt = \vec{0}$. Отсюда вытекает, что вектор \vec{L} не зависит от времени. Иными словами, в поле центральных сил момент импульса сохраняется.

Утверждение, доказанное для одной частицы, можно распространить на замкнутую систему, содержащую произвольное число частиц. Таким образом, в замкнутой системе, где действуют центральные силы, сохраняется суммарный момент импульса всех частиц.

Итак, в произвольной замкнутой консервативной механической системе существуют в общем случае семь сохраняющихся величин – энергия, три компоненты импульса и три компоненты момента импульса, обладающих тем свойством, что для системы частиц значения этих величин представляют сумму значений, взятых для отдельных частиц. Иными словами, полная энергия системы равна сумме энергий отдельных частиц и т.д.

4.3 Статика. Условия равновесия тел. Центр тяжести

Раздел механики, изучающий условия равновесия протяженных, абсолютно твердых тел, называется **статикой**. По определению тело находится в состоянии статического равновесия, если все точки тела находятся в состоянии покоя в некоторой инерциальной системе отсчета.

Первое условие равновесия в ИСО: сумма всех внешних сил, приложенных к телу, равна нулю.

В этом случае равно нулю ускорение центра инерции (центра масс) тела. Всегда можно найти такую систему отсчета, в которой центр инерции покоится.

Однако это условие не означает, что все точки тела покоятся. Они могут принимать участие во вращательном движении вокруг некоторой оси (пример – пара сил). Поэтому возникает второе условие равновесия в ИСО:

сумма моментов всех внешних сил относительно любой оси равна нулю.

Указанные условия широко используются в рычажных устройствах.

Представим тело состоящим из большого числа точечных масс m_i . В состоянии статического равновесия в однородном поле тяжести (вектор \vec{g} одинаков во всех точках тела) полный вектор силы тяжести тела

$$\vec{F} = \sum (m_i \vec{g}) = \vec{g} \sum m_i = M_T \vec{g}, \quad (14)$$

где M_T – полная масса тела. Существует точка в пространстве, называемая **центром тяжести**, такая, что момент силы тяжести \vec{F}_T относительно неё равен нулю.

Можно считать, что в состоянии равновесия вектор силы тяжести всего тела приложен в центре тяжести. Геометрически центр тяжести совпадает с центром масс- точкой тела (если можно считать, что величина и направление ускорения силы тяжести \vec{g} не меняются в пределах тела).

4.4 Теорема Гюйгенса — Штейнера

Момент инерции тела зависит от выбора оси вращения. Однако это не значит, что для всякой новой оси момент инерции I следует вычислять заново, пользуясь формулой (2.2).

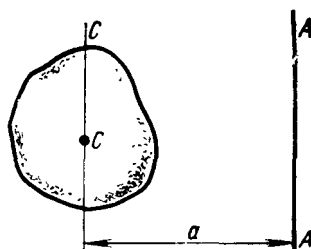


Рисунок 3 К теореме Гюйгенса-Штейнера

Пусть момент инерции твердого тела относительно оси C , проходящей через

его центр инерции, известен и равен I_c . Нетрудно показать, что относительно оси AA , параллельной оси CC (рис. 11), он равен

$$I_A = I_c + ma^2, \quad (15)$$

где m — масса твердого тела, a — расстояние между осями.

4.5 Момент инерции твердого тела относительно произвольной оси

Для применения теоремы Гюйгенса—Штейнера нужно знать момент инерции I_c тела относительно оси CC , проходящей через его центр тяжести (центр инерции). Этот момент зависит от направления оси CC . Однако нет необходимости вычислять I_c по формуле или измерять его для каждой оси вновь.

Оказывается, для любого твёрдого тела существуют три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через его центр инерции (главные оси тела), такие, что момент инерции относительно любой оси CC выражается через моменты инерции тела I_1 , I_2 и I_3 относительно этих главных осей. Таким образом, задача определения момента инерции тела относительно произвольной оси сводится к определению главных осей и соответствующих им моментов инерции I_1 , I_2 и I_3 .

Как же найти главные оси инерции данного твердого тела? Главные оси легко определить для однородных симметричных тел (шар, куб, цилиндр, прямоугольный параллелепипед и т.д.) Главные оси инерции таких тел всегда совпадают с осями симметрии тела. Например, главные оси однородного прямоугольного параллелепипеда проходят через его геометрический центр перпендикулярно граням (**рисунок 4**)

Для однородного шара главными являются любые три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через его центр. Можно доказать, что таким же свойством обладает и однородный куб. Для тел сложной формы главные оси и моменты инерции можно найти более сложными экспериментальными и теоретическими способами.

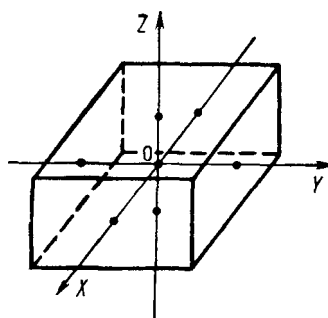


Рисунок 4 Главные оси инерции прямоугольного параллелепипеда

4.6 Кинетическая энергия вращающегося вокруг оси тела

Кинетическая энергия произвольной i -й материальной точки массой m_i ; равна

$$W = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2, \quad (16)$$

где $v_i = \omega r_i$ — скорость материальной точки, ω — угловая скорость, r_i — расстояние от точки до оси вращения. Суммируя кинетические энергии всех материальных точек, получим кинетическую энергию твердого тела:

$$W_{\kappa} = \sum W_{\kappa i} = \frac{1}{2} \omega^2 \left(\sum m_i r_i^2 \right) = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (17)$$

Формула (2 8) справедлива в том случае, когда тело вращается вокруг неподвижной оси. Если тело движется как целое и еще вращается, то его кинетическую энергию можно представить в виде суммы кинетических энергий поступательного и вращательного движений.

$$W_{\kappa} = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 \quad (18)$$

где V_C — скорость центра масс (центра инерции) твёрдого тела; I_C — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс параллельно вектору угловой скорости.

4.8 Колебания тела на пружине. Уравнение малых колебаний

Свободные колебания совершаются под действием внутренних сил системы после того, как система была выведена из состояния равновесия. Примером свободных колебаний могут служить колебания груза на пружине.

Для того, чтобы свободные колебания совершались по гармоническому закону, необходимо, чтобы сила, стремящаяся вернуть тело в положение равновесия, была пропорциональна смещению x тела из положения равновесия.

Этому условию удовлетворяет упругая сила пружины $F_x = -kx$. Коэффициент k называется жесткостью пружины. Все другие силы, удовлетворяющие этому условию, называются квазиупругими.

Если тело, прикрепленное к упругой пружине, вывести из состояния равновесия, то на тело начнет действовать упругая сила со стороны пружины, которая по закону Гука пропорциональна отклонению тела от положения равновесия. Следует помнить, что закон Гука справедлив только для малых отклонений от положения равновесия (количественно это выражается неравенством $x \ll l$, где l — длина нерастянутой пружины, x — удлинение пружины).

Уравнение движения под действием упругой силы имеет вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (19)$$

Его можно переписать в другой форме, введя обозначение $\omega^2 = k/m$. Тогда

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (20)$$

Система, совершающая колебания, описываемые этим уравнением, называется гармоническим осциллятором. Величина ω называется собственной круговой частотой колебаний. Для груза на пружине

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}; T = 2\pi\sqrt{m/k}; \quad (21)$$

Гармонические колебания происходят по закону

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (22)$$

где x_0 и φ_0 - амплитуда и начальная фаза колебаний. Эти величины зависят от начальных условий.

При гармонических колебаниях кинетическая и потенциальная энергия периодически изменяются, но полная механическая энергия E замкнутой системы, в которой отсутствуют силы сопротивления, остается неизменной.

Для груза на пружине

$$E = E_K + E_{II} = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}; (E_{II})_{\max} = \frac{kx_0^2}{2}; \quad (23)$$

$$(E_K)_{\max} = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 x_0^2}{2} = (E_{II})_{\max} = E \quad (24)$$

При гармонических колебаниях происходит периодическое превращение кинетической энергии в потенциальную и наоборот.

При наличии сил трения (сопротивления) полная энергия системы уменьшается со временем, и колебания становятся затухающими.

Если сила сопротивления пропорциональна скорости (вязкое трение) $F_{\text{тр}} = -bv$, амплитуда колебаний A уменьшается по закону

$$A = x_0 e^{-\delta t}, \text{ где } \delta = b/2m \quad (25)$$

Постоянная δ называется коэффициентом затухания. Интервал времени $\tau = 1/\delta$, в течение которого амплитуда уменьшается в $e \approx 2,7$ раза, называется временем затухания.

4.9 Гармонические колебания

Уравнение Ньютона, приведенное выше, имеет решение в виде гармонического колебания.

Простое одномерное гармоническое колебание – такое движение, при котором координата тела зависит от времени по закону

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (26)$$

Величина A называется амплитудой колебаний (максимальное отклонение от положения равновесия), ω – циклическая, или круговая, частота колебаний ($[\omega] = \text{Гц} = \text{с}^{-1}$), φ_0 – начальная фаза колебаний.

Главной особенностью выписанного решения является то, что каждое значение x в силу периодичности косинуса повторяется через один и тот же промежуток времени, называемый периодом T ($[T] = \text{с}$). Действительно, если аргумент косинуса изменится на угол 2π радиан, то значение косинуса не изменится. Назовем периодом тот интервал времени, за который аргумент косинуса меняется на 2π .

$$\text{Тогда } \omega(t + T) + \varphi_0 = \omega t + \varphi_0 + 2\pi, \quad (27)$$

откуда

$$T = 2\pi/\omega. \quad (28)$$

По определению частота

$$\nu = 1/T, \\ ([\nu] = \Gamma_{\text{ц}} = \text{с}^{-1}). \quad (29)$$

Подставляя выражение для T через круговую частоту ω , находим соотношение:

$$\omega = 2\pi\nu. \quad (30)$$

Альтернативные формы записи гармонического колебания:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_0\right) = A \cos(2\pi\nu t + \varphi_0) \quad (31)$$

Следует отметить, что можно с тем же результатом описывать гармоническое колебание функцией $\sin(\omega t + \varphi_0)$, что эквивалентно иному выбору начальной фазы.

Последовательно дифференцируя выписанное решение по времени, можно получить выражения для проекций скорости и ускорения колеблющегося тела в любой момент времени.

Скорость:

$$v_x = dx/dt = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (32)$$

Ускорение:

$$a_x = dv_x/dt = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (33)$$

Подставляя выражение для ускорения в уравнение движения, можно убедиться в том, что это уравнение удовлетворяется.

4.10 Энергия гармонического осциллятора

Полная энергия гармонического осциллятора:

$$E = mv^2/2 + kx^2/2 = K + U. \quad (34)$$

Если подставить приведенные выше выражения для x и v в формулу для полной энергии, получим

$$E = m\omega^2 A^2/2 = kA^2/2. \quad (35)$$

Полная энергия гармонического осциллятора пропорциональна квадрату амплитуды колебаний и не зависит от времени.

4.11 Математический маятник

На невесомой нити длиной l подвешен груз массой m , совершающий колебания относительно положения равновесия. Нулевое значение потенциальной энергии выбрано в точке равновесия, тогда в произвольном положении

$$U = mgh = mgl(1 - \cos \theta), \quad (36)$$

где угол отклонения маятника от положения равновесия θ однозначно определяет положение груза в любой момент времени. Как было показано, уравнение второго закона Ньютона в случае движения по окружности принимает вид: $I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}$.

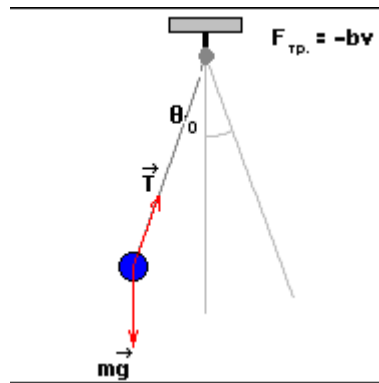


Рисунок 5 Математический маятник

Вектор $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси z (если принять плоскость качаний маятника за плоскость (x,y)). Момент инерции точки на окружности равен $I = ml^2$. Соответствующая проекция момента силы тяжести относительно оси, проходящей через точку подвеса, равна $M = -mgl \sin \theta$. Поэтому уравнение колебаний маятника принимает вид:

$$ml^2 \frac{d\omega}{dt} = -mgl \sin \theta \quad (37)$$

Так как угловая скорость $\omega = d\theta/dt$, то окончательно

$$ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgl \sin \theta \quad (38)$$

Это уравнение точное, однако его решение сложно. Представим теперь, что маятник совершает малые колебания. В этом случае $\theta \ll 1$ и можно сделать замену: $\sin \theta \approx \theta$. Уравнение малых колебаний математического маятника приобретает вид уравнения для гармонического осциллятора:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{g}{l}\right)\theta = 0 \rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \quad (39)$$

где введено обозначение $\omega = (g/l)^{1/2}$. Этой формулой определяется частота колебаний математического маятника. Период колебаний математического маятника равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (40)$$

4.12 Физический маятник

Физический маятник (рисунок 8) представляет собой твердое тело, которое может совершать колебания относительно горизонтальной неподвижной оси O .

Пусть центр масс маятника находится в точке C на расстоянии a от оси вращения O . Так как ось O неподвижна, то движение маятника определяется уравнением моментов (9) относительно этой оси:

$$\dot{L}_0 = M_{\text{овнеш}} \quad (41)$$

Пусть I_0 — момент инерции маятника относительно оси вращения O , $\omega = \dot{\theta}$ — угловая скорость, тогда $L_0 = I_0 \omega = I_0 \dot{\theta}$. Момент внешних сил $M_{\text{овнеш}}$ складывается из момента силы тяжести

$$M_{\text{тяж}} = -mg a \sin \theta \quad (42)$$

и момента сил трения, модуль и направление которого зависят от угловой скорости маятника:

$$M_{\text{тр}} = M_{\text{тр}}(\dot{\theta}) \quad (43)$$

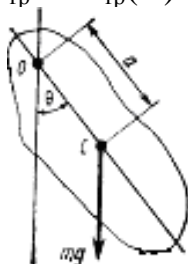


Рисунок 6 Физический маятник

Таким образом, уравнение движения маятника (уравнение моментов) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}(I_0 \dot{\theta}) = M_{\text{тяж}} + M_{\text{тр}}, \quad (44)$$

или, считая, что момент инерции $I_0 = \text{const}$,

$$I_0 \ddot{\theta} = -mg a \sin \theta + M_{\text{тр}}(\dot{\theta}) \quad (45)$$

В это уравнение входят неизвестная функция - угол отклонения маятника $\theta(t)$ — и ее производные по времени: угловая скорость $\dot{\theta}(t)$ и угловое ускорение $\ddot{\theta}(t)$. Наша задача — найти эту неизвестную функцию. Зная $\theta(t)$, мы полностью определим движение маятника в любой момент времени. Для вычисления $\theta(t)$ из уравнения (45) необходимо знать зависимость момента сил трения от угловой скорости, т. е. функцию $M_{\text{тр}}(\dot{\theta})$. Эта зависимость может быть сложной. Поэтому при учете трения применяются различные идеализирован-

ные, т. е. приближенные виды такой зависимости. В данной работе трение достаточно мало, так что им будем пренебрегать. В этом приближении период малых колебаний физического маятника равен

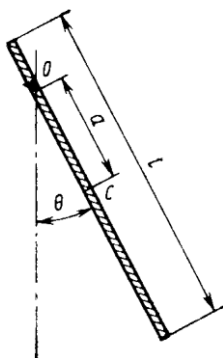
$$T = 2\pi\sqrt{I_0/(mga)} \quad (46)$$

где I_0 — момент инерции маятника относительно оси качаний O , m — масса маятника, a — расстояние от оси O до центра масс маятника, g — ускорение свободного падения.

В данной работе проводится экспериментальная проверка соотношения (46) для физического маятника, имеющего форму стержня. По стержню может перемещаться легкая опорная призма. Стержень колеблется относительно горизонтальной оси, опираясь нижним ребром призмы на закрепленную на штативе опорную площадку. Фиксируя призму в различных точках стержня, можно менять расстояние от оси качаний маятника до его центра масс.

Момент инерции I_0 стержня длиной l и массой m относительно оси O (рисунок 9) может быть найден с помощью теоремы Гюйгенса — Штейнера:

$$I_0 = I_c + ma^2 = \frac{1}{12}ml^2 + ma^2 \quad (47)$$



C — центр масс, O — оси качаний, θ — угол отклонения маятника, l — длина стержня, a — расстояние от оси O до центра масс маятника

Рисунок 7 Принципиальная схема физического маятника

Здесь $I_c = \frac{1}{12}ml^2$ — момент инерции однородного тонкого стержня относительно оси, проходящей через его центр масс C . Поэтому период колебаний стержня

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{12}ml^2 + ma^2}{mga}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\left(\frac{l}{12a} + \frac{a}{l}\right)} \quad (48)$$

или

$$T = T_0\sqrt{\varepsilon + 1/(12\varepsilon)} \quad (49)$$

Мы ввели обозначения

$$T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}, \quad \varepsilon = a/l. \quad (50)$$

Величина T_0 имеет размерность времени. Она совпадает с периодом колебаний математического маятника длиной l . Безразмерная величина $\varepsilon = a/l$ ха-

рактизует положение оси подвеса стержня относительно его центра масс. В этой работе необходимо изучить зависимость периода колебаний T тонкого однородного стержня от расстояния a от оси подвеса до центра масс.

Результаты измерений удобно изобразить на координатной плоскости ($x = \varepsilon = a/l$; $y = T/T_0$) и сравнить их с зависимостью $T(\varepsilon)$, предсказываемой формулой (49). Для тонкого стержня любой длины записанная в безразмерных переменных (x, y) зависимость периода малых колебаний стержня от положения точки подвеса имеет вид

$$y = \sqrt{x + 1/(12x)} \quad (51)$$

График этой функции нужно построить по точкам, рассчитав на микрокалькуляторе $y(x)$ для 10—15 значений x , и сравнить его с экспериментально полученной зависимостью $T(\varepsilon)$.

4.13 Методика измерений

Формулы (46) и (49) справедливы для идеализированной модели физического маятника. В частности, при выводе формулы (46) были приняты следующие предположения: 1) маятник совершает колебания малой амплитуды, и поэтому их период от амплитуды не зависит (изохронность колебаний); 2) затуханием можно пренебречь.

Необходимо выяснить, обеспечивается ли выполнение этих предположений в условиях эксперимента. Легко убедиться, что периоды колебаний стержня при малых ($\leq 5^\circ$) и больших ($\geq 30^\circ$) амплитудах отличаются друг от друга. Так как соотношение (1) справедливо только для малых амплитуд, то необходимо выяснить, в пределах каких значений амплитуды период колебаний остается постоянным с заданной степенью точности (например, с точностью до 0,5%). Это легко сделать, измеряя период колебаний маятника для различных амплитуд, постепенно увеличивая их от $2\text{—}3^\circ$ до $10\text{—}15^\circ$.

Выясним теперь, как оценить влияние затухания на период колебаний маятника. Наблюдая колебания маятника, легко убедиться, что их амплитуда постепенно уменьшается. Значит, модель незатухающих колебаний, принятая при выводе формул (46) и (49), строго говоря, неверна. Нетрудно понять качественно, как влияет затухание колебаний на их период: под действием трения движение маятника замедляется, и период его колебаний увеличивается. Вопрос заключается в том, является ли это увеличение периода существенным или им можно пренебречь.

Чтобы получить количественно изменение периода колебаний ΔT в результате трения, необходимо выяснить, какие силы трения действуют в данной лабораторной установке. Трение может быть сухим, вязким или более сложным. Выяснение характера трения требует специальной постановки эксперимента и является сложной задачей.

Можно, однако, показать, что при любом типе сил трения (вязком и сухом) их влияние на период колебаний является малым, если только мало само

затухание. Например, связанная с вязким трением поправка $\Delta T/T$ к периоду T незатухающих колебаний маятника равна

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{8\pi^2 N^2} \sim \frac{1}{100N^2} \quad (52)$$

где N -- число колебаний, за которое их амплитуда уменьшается в $e=2,718$ раза (т. е. примерно в три раза). Практически при $N \sim 10$ как в случае вязкого, так и в случае сухого трения влиянием затухания на период колебаний заведомо можно пренебречь.

5 Порядок выполнения работы

1. Проверьте изохронность колебаний маятника. Для этого измерьте период колебаний для 5—6 значений амплитуды в пределах от $2-3^\circ$ до $10-15^\circ$. Результаты занесите в **таблицу 1**. Так как трудно «поймать» возвращение маятника в одно и то же положение, то период колебаний определяется следующим образом: определяется время десяти колебаний не менее 3 раз, среднее значение получившейся величины, разделённое на десять (количество колебаний), и будет искомым значением периода колебания маятника.

Таблица 1 Проверка изохронности физического маятника

θ°						
$t_1(10), \text{с}$						
$t_2(10), \text{с}$						
$t_3(10), \text{с}$						
$T(\theta), \text{с}$						

Выясните, в каком диапазоне амплитуд колебания являются изохронными с точностью до $0,5^\circ$; до 1%.

2. Оцените влияние затухания на период колебаний. С этой целью определите число колебаний N , за которое амплитуда колебаний уменьшается примерно в три раза. Измерения проведите при трех различных положениях опорной призмы от $a \approx l/10$ до $a \approx l/2$.

Если найденные значения $N \geq 10$, то влиянием затухания на период колебаний можно пренебречь.

3. Постройте по точкам график теоретически ожидаемой зависимости периода колебаний стержня от параметра $\varepsilon = a/l$ в области значений $0 < \varepsilon \leq 1/2$. График стройте в координатной плоскости $x = \varepsilon, y = T/T_0$.

Для построения графика найдите с помощью микрокалькулятора значения $y(x)$ по формуле (51) не менее чем при десяти различных значениях x в интервале $0 < x \leq 1/2$. Результаты вычислений занесите в **таблицу 2**.

Таблица 2 Теоретические данные

x										
y(x)										

4. Проведите экспериментальную проверку соотношений (49) и (51). Для этого, исходя из вида построенного графика, выберите 10 значений параметра $\varepsilon=a/l$, для которых целесообразно провести измерение соответствующего им периода колебаний $T(\varepsilon)$.

Проведите измерение периода колебаний T для выбранных значений $\varepsilon=a/l$. При измерениях периода колебаний особенно в области малых $\varepsilon=a/l$ ($\varepsilon \leq 0,1$) следует внимательно следить за тем, чтобы амплитуда колебаний не выходила из найденного в п. 1 диапазона изохронности. Результаты измерений занесите в таблицу 3.

Таблица 3 Экспериментальные данные

$a, \text{ м}$	$x=a/l$	$T, \text{ с}$	$y=T/T_0$

Нанесите в плоскости $x=\varepsilon$, $y=T/T_0$ полученные экспериментальные точки с учетом погрешности, с которой они определены.

Сравните полученные графики. Сделайте вывод.

6 Содержание отчета

- 6.1 Название лабораторной работы.
- 6.2 Цель лабораторной работы.
- 6.3 Краткое описание оборудования.
- 6.4 **Рисунок 7.** Принципиальная схема установки.
- 6.5 Используемые в работе формулы: (46) - (51)
- 6.6 Краткое описание хода работы.
- 6.7 Проверка изохронности колебаний маятника. Определение периода колебаний для 5—6 значений амплитуды в пределах от $2-3^\circ$ до $10-15^\circ$.
- 6.8 **Таблица 1.**

- 6.9 Оценка влияния затухания на период колебаний.
- 6.10 Расчёт с помощью микрокалькулятора значения $y(x)$ по формуле (51) не менее чем при десяти различных значениях x в интервале $0 < x \leq 1/2$.
- 6.11 **Таблица 2.**
- 6.12 График полученной по результатам расчётов функции $y(x)$ в координатной плоскости $x = \varepsilon, y = T/T_0$.
- 6.13 **Таблица 3.**
- 6.14 График полученной по результатам измерений в координатной плоскости $x = \varepsilon, y = T/T_0$.
- 6.15 Сделайте вывод.

7 Контрольные вопросы и задания

1. Что называется абсолютно твёрдым телом? Какое уравнение описывает вращение твёрдого тела относительно неподвижной оси?
2. Дайте определения момента сил, момента инерции, момента импульса твёрдого тела относительно некоторой неподвижной оси.
3. Дайте определение угла поворота, угловой скорости и углового ускорения.
4. Сформулируйте закон сохранения момента импульса.
5. Сформулируйте и докажите теорему Гюйгенса – Штейнера.
6. Какая физическая величина служит основной динамической характеристикой вращающегося тела?
7. Что называется моментом инерции твёрдого тела относительно некоторой оси? От чего зависит момент инерции тела? Какую роль он играет во вращательном движении?
8. Условия возникновения колебаний. Что называется колебаниями? Какие колебания называют гармоническими?
9. Виды маятников. Дайте определение физического маятника?
10. Дайте определение приведенной длины физического маятника?
11. Чему равен период колебаний физического маятника (формула).
12. Что такое изохронность маятника?
13. Уравнение движения физического маятника?
14. Что такое добротность маятника и время релаксации маятника?
15. Чему равны периоды вращения стрелок часов секундной? минутной? часовой?
16. На основании измеренных в работе данных оцените добротность и логарифмический декремент затухания маятника.
17. Стержень отводят на угол $\theta_0 = 45^\circ$ из положения равновесия и без толчка отпускают. Оцените силу давления маятника на опорную площадку в тот момент, когда он проходит положение равновесия. Длина стержня $l = 60$ см, его масса 355 г.

8 Литература

1. Гладун А.Д., Александров Д.А., Игошин Ф.Ф. и др. «Лабораторный практикум по общей физике: В 3 тт: Т. 1: Термодинамика и молекулярная физика (2 семестр): Учебное пособие для студентов 1 курса вузов (под ред. Гладуна А.Д.)» - М.: Издательство МФТИ, 2003 – 316 с. ил
2. Трофимова Т. И. Курс физики: Учеб. пособие для вузов. – 13-е изд., стереотип. - М.: Издательский центр «Академия», 2007. – 560 с.: ил.
3. Изучение колебаний физического маятника. Метод. указания к лаб. работам/ Сост. В.Ю. Никифоров – Егорьевск: ЕТИ МГТУ "Станкин", 2004 - 18 с.