Оглавление

1. Программа курса «Специальные разделы (главы) математики»

- Кратные и криволинейные интегралы
- Интеграл по плоскому замкнутому контуру. Формула Грина.
- Элементы теории поля. Производная функции многих переменных по направлению, градиент. Поток вектора через квадрируемую поверхность. Формула Остроградского – Гаусса. Циркуляция вектора по замкнутому контуру в трёхмерном пространстве. Формула Стокса.
- Ряды Фурье и гармонический анализ. Ортогональные системы функций. Разложение функции в тригонометрический ряд по формуле Эйлера - Фурье. Комплексная форма ряда Фурье. Преобразование Фурье.
- Элементы операционного исчисления. Преобразование Лапласа и его свойства. Решение линейных краевых задач операционным методом.

2. Краткие указания к выполнению контрольной работы №1 по дисциплине «Специальные разделы (главы) математики»

Контрольная работа №1 состоит из 7 заданий. В каждом задании введены два параметра m (номер предпоследней цифры студенческого билета) и p (номер последней цифры студенческого билета). ***Если указанная цифра «0», то соответствующий параметр следует положить «1».***

Целью контрольной работы №1 является проверка знаний, умений и навыков по следующим разделам дисциплины «Специальные разделы (главы) математики»:

- кратные интегралы;
- криволинейные интегралы, формула Грина;
- производная по направлению и градиент функции многих переменных;
- поток вектора через поверхность, формула Остроградского;
- циркуляция вектора в пространственном случае, формула Стокса;
- разложение функции в тригонометрический ряд Эйлера - Фурье;
- решение линейной краевой задачи через преобразование Лапласа.

2. Варианты заданий

Задание № 1

Вычислить $\iint\limits_D \left(1 + p \cdot x^2 + m \cdot y^2\right) dxdy$, где область D образована линиями:

$x = 0,\ y = 0,\ \dfrac{x}{m} + \dfrac{y}{p} = 1$

Задание № 2

Вычислить интеграл по замкнутому контуру $\oint\limits_L (xy - mx)dx + px^2dy$, где контур L образован линиями: 1) отрезок параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$, 2) отрезок прямой $y = 1,\ 0 \le x \le 1$, 3) отрезок оси ординат $0 \le y \le 1$. Направление обхода контура – против часовой стрелки; начальная точка – произвольна. *Интеграл вычислить непосредственно и с помощью формулы Грина.*

Задание № 3

Дано скалярное поле $\varphi(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ и 2 точки $A(m,0,1)$, $B(0,p,1)$.

Найти угол, образованный градиентом скалярного поля в точках А и В.

Задание № 4

Дано векторное поле $\vec{F}(x, y, z) = imx^2 + jpy^2 + kz^2$. Используя формулу Остроградского – Гаусса найти поток вектора через верхнюю полусферу S: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $z \ge 0$.

Задание № 5

Дано векторное поле $\vec{F}(x,y,z)=i(y-z)+j(z-x)+k(x-y)$. Используя формулу Стокса найти циркуляцию вектора по контуру

L: $x^2+y^2=m^2$, $x+z=p$.

Задание № 6

Разложить в тригонометрический ряд функцию

$$f(x)=\begin{cases} m,-\pi<x\le 0 \\ m-px, 0<x<\pi \end{cases}.$$

Задание № 7

Решить операционным методом краевую задачу:

$$\begin{cases} y''(x)-3y'(x)-4y(x)=px-m \\ y(0)=1,\ y'(0)=0 \end{cases}$$

4. Примеры решения

К заданию №1

Пусть номер студенческого билета оканчивается на 07. Тогда полагаем $m=1,\ p=7$.

Далее получаем $\iint\limits_D \left(1+7\cdot x^2+y^2\right)dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{7(1-x)}\left(1+7\cdot x^2+y^2\right)dy=$

$$=\int\limits_0^1 dx\left(y+7\cdot x^2 y+\frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_{y=0}^{y=7(1-x)}=\int\limits_0^1\left(7(1-x)+\frac{22}{3}7^3(1-x)^3\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left(7+\frac{22\cdot 7^3}{3}-\left(7+22\cdot 7^3\right)x+22\cdot 7^3x^2-\frac{22\cdot 7^3}{3}x^3\right)dx=632\frac{1}{3}$$

Отв.: $632\frac{1}{3}$.

К заданию №2

Пусть $m=3,\ p=2$. *Рекомендуется сделать эскиз контура и ограниченной им области плоскости.*

Получаем $I=\oint\limits_L (xy-3x)dx+2x^2dy$. В нашем случае $P=xy-3x$, $Q=2x^2$.

Находим частные производные $P'_x=x$, $Q'_y=4x$. Сводя двойной интеграл к повторному, внешний возьмём по x, внутренний по y:

$$I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^1(4x-x)dy=3\int\limits_0^1 x\left(1-x^2\right)dx=\frac{3}{2}-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}.$$

При непосредственном вычислении по контуру за исходную точку примем начало координат; контур и, соответственно интеграл, разобьём на 3 части:

отрезок параболы, горизонтальный участок, вертикальный участок. Для первого участка полагая $y = x^2$, $dy = 2dx$, получаем

$I_1 = \int\limits_0^1 \left(x^3 - 3x + 4x^3\right)dx = \frac{5}{4} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{4}$. Для второго полагаем $y = 1$, $dy = 0$ с учётом направления движения по контуру получаем $I_2 = \int\limits_1^0 \left(x - 3x\right)dx = 2\int\limits_0^1 xdx = 1$.

На третьем вертикальном участке $x = 0$, $dx = 0$, следовательно и $I_3 = 0$.

Окончательно получаем $I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{3}{4}$.

Отв.: $I = \frac{3}{4}$.

К заданию №3

Пусть $m = 3$, $p = 2$. Записываем координаты точек A(3,0,1), B(0,2,1).

Найдём частные производные скаляра по каждой из координат:

$$\varphi'_x = -\frac{x}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}, \varphi'_y = -\frac{y}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}, \varphi'_z = -\frac{z}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}.$$

Далее находим градиент в точках A и B:

$\nabla\varphi(A) = \frac{(-3,0,-1)}{\left(3^2 + 1\right)^{3/2}} = -\frac{(3,0,1)}{10\sqrt{10}}, \nabla\varphi(B) = \frac{(0,-2,-1)}{\left(2^2 + 1\right)^{3/2}} = -\frac{(0,2,1)}{5\sqrt{5}}$. Косинус искомого угла найдём как отношение скалярного произведения двух полученных векторов к произведению длин векторов:

$$\cos(\alpha) = \frac{(\nabla\varphi(A), \nabla\varphi(B))}{|\nabla\varphi(A)||\nabla\varphi(B)|} = \frac{1}{50\sqrt{50}}\left(\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{5}\right)^{-1} = \frac{1}{5\sqrt{2}}.$$

Отв.: $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)$.

К заданию №4

Пусть $m=3,\ p=2$. Запишем поток в виде поверхностного интеграла II рода: $J=\iint\limits_S 3x^2dydz+2y^2dzdx+z^2dxdy$. В плоскости основания сферы (XOY) $z=0,\ dz=0$. Следовательно, поток через любую площадку в этой плоскости равен нулю. Добавив нулевое слагаемое, переформулируем поток в виде интеграла по замкнутой поверхности, образуемой верхней полу сферой её плоским основанием: $J=\oiint\limits_S 3x^2dydz+2y^2dzdx+z^2dxdy$. Согласно теореме Остроградского – Гаусса этот интеграл равен интегралу дивергенции вектора по объёму, ограниченному полученной замкнутой поверхностью, т.е. $J=\iiint\limits_{V_S}(6x+4y+2z)dV$. В сферических координатах

$0\le\xi\le r, 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}, 0\le\varphi<2\pi$ интеграл примет вид:

$J=2\int\limits_0^r\xi^3d\xi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\theta)d\theta\int\limits_0^{2\pi}(3\cos(\theta)\cos(\varphi)+2\cos(\theta)\sin(\varphi)+\sin(\theta))d\varphi$. Производя интегрирование и используя факт $\int\limits_0^{2\pi}\cos(x)dx=\int\limits_0^{2\pi}\sin(x)dx=0$,окончательно получаем $J=\dfrac{1}{2}\pi r^4$.

Отв.: $J=\dfrac{1}{2}\pi r^4$.

К заданию №5

Пусть $m=3,\ p=2$. Имеем контур $x^2+y^2=9,\ x+z=2$.Найдём ротор векторного поля

$$rot\left(\vec{F}\right)=\left[\nabla,\vec{F}\right]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial x} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix}=\left(-2,-2,-2\right)$$. Согласно теореме Стокса циркуляция по замкнутому контуру равна потоку ротора вектора через поверхность, натянутую на контур. Поверхностью является плоское сечение кругового цилиндра. Запишем соответствующий интеграл через определитель:

$$J=\iint\limits_{x^2+y^2\le 9,\, z=2-x}\begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial z}{\partial x} \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix}dxdy$$. Подставляя $\dfrac{\partial z}{x}=-1$, $\dfrac{\partial z}{y}=0$ и переходя к полярным координатам, получаем $J=-4\int\limits_0^m \rho d\rho\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=-4\pi m^2$.

Отв.: $J=-4\pi m^2$.

К заданию №6

Пусть $m=3$, $p=2$. Имеем функцию $f\left(x\right)=\begin{cases}3, -\pi<x\le 0\\ 3-2x, 0<x<\pi\end{cases}$. По формулам Эйлера – Фурье вычислим коэффициенты тригонометрического ряда

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}3dx-2\int\limits_0^{\pi}xdx\right)=6-\pi,$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos\left(kx\right)f\left(x\right)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}3\cos\left(kx\right)dx-2\int\limits_0^{\pi}\cos\left(kx\right)xdx\right)$$. Первый интеграл равен нулю. Второй, беря по частям, находим

$$\int\limits_0^{\pi}\cos\left(kx\right)xdx=\frac{1}{k}\left(\sin\left(kx\right)x\Big|_0^{\pi}-\int\limits_0^{\pi}\sin\left(kx\right)dx\right)=\frac{1}{k^2}\cos\left(kx\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{\left(-1\right)^k-1}{k^2}, k>0.$$

В полученной последовательности отличны от нуля только нечётные члены. Таким образом, формула общего члена для косинусов примет вид:

$$a_k = \frac{4}{\pi(2k-1)^2}, k > 0.$$

Для второй последовательности коэффициентов, заменяя косинус на синус, получим:

$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}3\sin(kx)dx - 2\int_{0}^{\pi}\sin(kx)xdx\right)$. Первый интеграл по прежнему равен нулю. Второй, беря по частям, находим

$$\int_0^{\pi}\sin(kx)xdx = \frac{-1}{k}\left(\cos(kx)x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos(kx)dx\right) = \frac{-\pi}{k}\cos(k\pi) + \frac{\sin(kx)}{k^2}\Bigg|_0^{\pi}.$$

Второе слагаемое в последнем выражении равно нулю, первое составляет $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{k}$. Формула общего члена примет вид $b_k = (-1)^k\frac{2}{k}$. Таким образом, тригонометрический ряд составит:

$$f(x) \sim 3 - \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2} + 2\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{k}.$$

Отв.: $f(x) \sim 3 - \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2} + 2\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{k}$.

К заданию №7

Пусть $m = 3,\ p = 2$.

Получаем $\begin{cases} y''(x) - 3y'(x) - 4y(x) = 2x - 3 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \end{cases}$.

Находим преобразование Лапласа обеих частей дифференциального уравнения с учётом начальных условий :

$$p^2Y(p)-py(0)-y'(0)-3(pY(p)-y(0))-4Y(p)=\frac{2}{p^2}-\frac{3}{p}$$ или

$Y(p)(p^2-3p-4)=\frac{2}{p^2}-\frac{3}{p}+p-3$. Откуда находим $Y(p)=\frac{Q(p)}{p^2-3p-4}$,

где $Q(p)$ - правая часть последнего уравнения. Далее, разлагая знаменатель на простые дроби, получаем $\frac{1}{p^2-3p-4}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{p-4}-\frac{1}{p+1}\right)$. Полагая

$u(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{1}{p-4}-\frac{1}{p+1}\right)\right]=\frac{1}{5}\left(e^{4t}-e^{-t}\right)$, получаем

$y(t)=-3u(t)+u'(t)+u(0)-3\int_0^t u(\tau)d\tau+2\int_0^t d\tau\int_0^\tau u(\xi)d\xi$. Подставляя $u(0)=0$ и произведя все указанные вычисления, находим $y(t)=\frac{3}{40}e^{4t}-\frac{1}{5}e^{-t}-\frac{1}{2}t+\frac{45}{8}$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что полученное решение обращает дифференциальное уравнение в тождество и удовлетворяет начальным условиям.

Отв.: $y(t)=\frac{3}{40}e^{4t}-\frac{1}{5}e^{-t}-\frac{1}{2}t+\frac{45}{8}$.