

Индивидуальное домашнее задание (весенний семестр, группа НК Абд-02-24)

1. Задана двумерная дискретная случайная величина $(\xi; \eta)$ рядом распределения (**условие варианта**)
Найдите:
 - 1) Математическое ожидание и дисперсию случайных величин ξ и η .
 - 2) Ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин ξ и η
 - 3) Математическое ожидание, дисперсию и ковариацию случайных величин μ_1 и μ_2
 - 4) $Cov(\xi; \mu_1), Cov(\eta; \mu_1), Cov(\xi; \mu_2), Cov(\eta; \mu_2)$
2. Задана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (ξ, η) (**условие варианта**). Нарисуйте область и найдите:
 - 1) Постоянную C и одномерные плотности распределения случайных величин ξ и η
 - 2) Математическое ожидание и дисперсию случайных величин ξ и η .
 - 3) Ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин ξ и η .
 - 4) Математическое ожидание и дисперсию случайной величины μ
 - 5) Математическое ожидание случайной величины μ_1 (**нарисуйте область интегрирования, расставьте пределы интегрирования, интеграл не вычислять**)
3. В условиях задачи 1 ИДЗ найдите:
 - 1) условное математическое ожидание с.в. ξ при условии η ;
 - 2) условное математическое ожидание с.в. η при условии ξ ;
 - 3) для вариантов 1-15 ИДЗ условное математическое ожидание с.в. μ_1 при условии η и условное математическое ожидание с.в. μ_2 при условии ξ ; для вариантов 16-30 ИДЗ условное математическое ожидание с.в. μ_1 при условии ξ и условное математическое ожидание с.в. μ_2 при условии η .
4. В условиях задачи 2 ИДЗ найдите:
 - 1) условные плотности распределения случайной величины ξ при условии η и случайной величины η при условии ξ .
 - 2) условное математическое ожидание с.в. η при условии ξ ;
 - 3) условное математическое ожидание с.в. ξ при условии η .
5. Выполните следующие задания:
 - 1) По заданным плотностям $p_\xi(x)$ и $p_\eta(y)$ найдите характеристические функции $f_\xi(t)$ и $f_\eta(t)$ независимых случайных величин ξ и η ; характеристическую функцию $f_\mu(t)$ случайной величины μ
 - 2) По заданной характеристической функции $f_\xi(t)$ вычислите математическое ожидание случайной величины ξ и дисперсию случайной величины ξ .
6. Посетитель тира платит a рублей за выстрел. При попадании в девятку получает выигрыш b рублей, при попадании в десятку получает выигрыш c рублей. Если стрелок не попадает ни в девятку, ни в десятку, то деньги ему не выплачиваются. Вероятности попадания в девятку, десятку и промаха равны p_1, p_2 и p_3 соответственно. Число посетителей равно n .
С помощью **неравенства Чебышева**:
 - 1) найдите границы, в которых будет лежать суммарная прибыль владельца тира с вероятностью не менее α ;
 - 2) найдите число посетителей тира, чтобы вероятность отклонения суммарной прибыли от среднего размера суммарной прибыли на величину не меньше β % (от средней суммарной прибыли) равнялась pС помощью **центральной предельной теоремы** оцените вероятность того, что
 - 1) размер убытка у владельца тира будет лежать в пределах от m_1 до m_2 рублей;
 - 2) что суммарная прибыль окажется в пределах от n_1 до n_2 рублей.
7. Статистический анализ, проведенный по заказу авиакомпании, показал, что распределение веса (в кг) пассажира авиарейса с грузом хорошо описывается плотностью распределения
$$p(x) = Ax^3(150-x), \quad x \in (0; 150).$$
Масса пустого самолета равна 180 тонн. Максимальная взлетная масса равна 250 тонн.
 - 1) Какой коммерческий груз (в кг) можно дополнительно везти этим рейсом, чтобы вероятность перегрузки составила не более α %.
 - 2) Найдите вероятность перегрузки, если дополнительный коммерческий груз составил m тонн.
8. По заданным выборкам X_1, X_2, \dots, X_n и Y_1, Y_2, \dots, Y_n объема $n = 50$ найти и построить:
 - 1) минимальный и максимальный элементы выборки, разброс выборки, статистический ряд;
 - 2) гистограмму, полигон относительных частот – для обеих выборок, эмпирическую функцию распределения (только для выборки X_1, X_2, \dots, X_n);
 - 3) выборочные характеристики: среднее, дисперсию (смещенную и несмещенную) (по выборке и по статистическому ряду), медиану.
9. Известно, что выборка X_1, X_2, \dots, X_n подчиняется теоретическому распределению с заданную плотностью $p_\xi(x)$ с неизвестным параметром. Найдите оценку неизвестного параметра методом моментов.
10. Найдите оценку максимального правдоподобия неизвестных параметров, если известно, что:
 - 1) выборка X_1, X_2, \dots, X_n подчиняется теоретическому распределению с заданную плотностью

$$p(x) = \begin{cases} 2 \sqrt{\frac{b}{\pi}} e^{-\left(x\sqrt{b} - \frac{\sqrt{2a}}{x}\right)^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

с неизвестными параметрами (a, b) .

2) выборка Y_1, Y_2, \dots, Y_n подчиняется теоретическому распределению с заданной плотностью

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b\pi x^2}} e^{-\frac{(\ln x - 3a)^2}{2b}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

с неизвестными параметрами (a, b) .

11. Известно, что выборка X_1, X_2, \dots, X_n подчиняется теоретическому распределению с неизвестным параметром. При помощи метода максимального правдоподобия (ММП) найти оценку неизвестного параметра распределения, проверить полученную оценку на несмещённость и эффективность.
12. С помощью критерия отношения правдоподобия проверьте:
 - 1) гипотезы H_0 и H_1 о принадлежности выборки X_1, X_2, \dots, X_n дискретному распределению с заданными параметрами.
 - 2) гипотезы H_0 и H_1 о принадлежности выборки Y_1, Y_2, \dots, Y_n непрерывному распределению с заданными параметрами.
13. С помощью критерия χ^2 проверьте:
 - 1) гипотезу о принадлежности выборки X_1, X_2, \dots, X_n к заданному дискретному распределению (с помощью метода моментов найдите параметры распределения).
 - 2) гипотезу о принадлежности выборки Y_1, Y_2, \dots, Y_n заданному непрерывному распределению (с помощью метода моментов найдите параметры распределения).

Распределение баллов (20 баллов)

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Задача 7
1, 5 балла	1,5 балла	1 балл	1 балл	2 балла	1,5 балла	1,5 балла

Задача 8	Задача 9	Задача 10	Задача 11	Задача 12	Задача 13
1 балл	1 балл	2 балла	1 балл	2 балла	3 балла

8	1.	<table border="1"> <tr> <td colspan="2" rowspan="2"></td> <td colspan="4">η</td> </tr> <tr> <td>-2</td> <td>-1</td> <td>0</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td rowspan="3">ξ</td> <td>-4</td> <td>0,05</td> <td>0,1</td> <td>0,05</td> <td>0,1</td> </tr> <tr> <td>-1</td> <td>0,1</td> <td>0,1</td> <td>0,1</td> <td>0,1</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>0,05</td> <td>0,1</td> <td>0,05</td> <td>0,1</td> </tr> </table> $\mu_1 = 3\xi - \frac{1 - 4(2\eta - \xi + 2)}{3}$ $\mu_2 = \frac{3(1 - 2\xi - \eta)}{5} + \frac{3 - 2\xi + \eta}{2}$			η				-2	-1	0	3	ξ	-4	0,05	0,1	0,05	0,1	-1	0,1	0,1	0,1	0,1	2	0,05	0,1	0,05	0,1																																																																																			
					η																																																																																																										
			-2	-1	0	3																																																																																																									
	ξ	-4	0,05	0,1	0,05	0,1																																																																																																									
		-1	0,1	0,1	0,1	0,1																																																																																																									
		2	0,05	0,1	0,05	0,1																																																																																																									
	2.	$p_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{в остальных случаях} \\ C(3x + 2y), & 1 \leq x \leq y, \quad 1 \leq y \leq 4 \\ \frac{2(\xi - 2 \eta - \xi + 1)}{3} + \frac{3(\eta - 2 \xi + \eta - 2)}{5}, & \end{cases}$ $\mu = \frac{2(\xi - 2 \eta - \xi + 1)}{3} + \frac{3(\eta - 2 \xi + \eta - 2)}{5}$ $\mu_1 = \max(4 - (\xi - 2)^2; \eta)$																																																																																																													
	5.	$p_{\xi}(x) = \begin{cases} 4xe^{-2x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ и $p_{\eta}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}y, & 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & y < 0, \quad y > 2 \end{cases}$ $\mu = 1 - \frac{2 - \xi + \eta}{3} - 4\xi + \frac{4}{3}\eta$																																																																																																													
		$f_{\xi}(t) = \frac{0,2 \cos^2 t + 0,5 \cos t + 0,3}{e^{t^2+3it}}$																																																																																																													
	6.	$a = 250, b = 500, c = 850, \quad p_1 = 0,3, p_2 = 0,1, p_3 = 0,6, \quad n = 600,$ $\alpha = 0,9, \quad \beta = 15,$ $m_1 = 100, \quad m_2 = 700, \quad n_1 = 4000, \quad n_2 = 11000$																																																																																																													
	7.	$n = 200, \quad \alpha = 0,25, \quad m = 60$																																																																																																													
8.	<p>Выборка X_1, \dots, X_n</p> <table border="1"> <tr><td>[1.]</td><td>5</td><td>7</td><td>4</td><td>8</td><td>5</td><td>6</td><td>9</td><td>12</td><td>11</td><td>9</td></tr> <tr><td>[2.]</td><td>5</td><td>6</td><td>8</td><td>8</td><td>9</td><td>8</td><td>6</td><td>9</td><td>8</td><td>11</td></tr> <tr><td>[3.]</td><td>10</td><td>8</td><td>10</td><td>12</td><td>8</td><td>14</td><td>6</td><td>10</td><td>2</td><td>6</td></tr> <tr><td>[4.]</td><td>7</td><td>6</td><td>9</td><td>6</td><td>10</td><td>5</td><td>7</td><td>5</td><td>10</td><td>13</td></tr> <tr><td>[5.]</td><td>12</td><td>6</td><td>10</td><td>9</td><td>4</td><td>4</td><td>7</td><td>11</td><td>8</td><td>8</td></tr> </table> <p>Выборка Y_1, \dots, Y_n</p> <table border="1"> <tr><td>[1.]</td><td>8.95</td><td>9.45</td><td>2.13</td><td>0.36</td><td>5.94</td><td>9.15</td><td>29.92</td><td>0.74</td><td>0.33</td><td>1.61</td></tr> <tr><td>[2.]</td><td>9.12</td><td>28.84</td><td>11.18</td><td>0.60</td><td>1.38</td><td>12.24</td><td>3.79</td><td>1.31</td><td>33.90</td><td>4.52</td></tr> <tr><td>[3.]</td><td>0.77</td><td>6.57</td><td>1.26</td><td>22.88</td><td>6.54</td><td>0.55</td><td>12.87</td><td>9.89</td><td>11.27</td><td>2.04</td></tr> <tr><td>[4.]</td><td>6.76</td><td>2.01</td><td>8.01</td><td>22.74</td><td>17.60</td><td>19.02</td><td>7.94</td><td>2.16</td><td>22.30</td><td>3.51</td></tr> <tr><td>[5.]</td><td>0.29</td><td>12.36</td><td>24.30</td><td>13.71</td><td>12.50</td><td>7.48</td><td>1.24</td><td>6.32</td><td>13.24</td><td>19.46</td></tr> </table>	[1.]	5	7	4	8	5	6	9	12	11	9	[2.]	5	6	8	8	9	8	6	9	8	11	[3.]	10	8	10	12	8	14	6	10	2	6	[4.]	7	6	9	6	10	5	7	5	10	13	[5.]	12	6	10	9	4	4	7	11	8	8	[1.]	8.95	9.45	2.13	0.36	5.94	9.15	29.92	0.74	0.33	1.61	[2.]	9.12	28.84	11.18	0.60	1.38	12.24	3.79	1.31	33.90	4.52	[3.]	0.77	6.57	1.26	22.88	6.54	0.55	12.87	9.89	11.27	2.04	[4.]	6.76	2.01	8.01	22.74	17.60	19.02	7.94	2.16	22.30	3.51	[5.]	0.29	12.36	24.30	13.71	12.50	7.48	1.24	6.32	13.24	19.46
[1.]	5	7	4	8	5	6	9	12	11	9																																																																																																					
[2.]	5	6	8	8	9	8	6	9	8	11																																																																																																					
[3.]	10	8	10	12	8	14	6	10	2	6																																																																																																					
[4.]	7	6	9	6	10	5	7	5	10	13																																																																																																					
[5.]	12	6	10	9	4	4	7	11	8	8																																																																																																					
[1.]	8.95	9.45	2.13	0.36	5.94	9.15	29.92	0.74	0.33	1.61																																																																																																					
[2.]	9.12	28.84	11.18	0.60	1.38	12.24	3.79	1.31	33.90	4.52																																																																																																					
[3.]	0.77	6.57	1.26	22.88	6.54	0.55	12.87	9.89	11.27	2.04																																																																																																					
[4.]	6.76	2.01	8.01	22.74	17.60	19.02	7.94	2.16	22.30	3.51																																																																																																					
[5.]	0.29	12.36	24.30	13.71	12.50	7.48	1.24	6.32	13.24	19.46																																																																																																					
9.	<p>Выборка X_1, \dots, X_n – имеет плотность распределения</p> $f(x) = \begin{cases} p\lambda e^{-\lambda x} + \frac{1-p}{a}, & x \in (0; a) \\ p\lambda e^{-\lambda x}, & x \in (a; +\infty) \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ <p>При заданных значениях параметров $\lambda = 0.7$ и $a = 3$ найти оценку параметра p. Таблица частот</p> <table border="1"> <tr> <td>интервалы</td> <td>0-0.8</td> <td>0.8-1.6</td> <td>1.6-2.4</td> <td>2.4-3.2</td> <td>3.2-4</td> <td>4-4.8</td> <td>4.8-5.6</td> <td>5.6-6.4</td> <td>6.4-7.2</td> <td>7.2-8</td> </tr> <tr> <td>частоты</td> <td>175</td> <td>148</td> <td>118</td> <td>88</td> <td>26</td> <td>17</td> <td>11</td> <td>10</td> <td>7</td> <td>5</td> </tr> </table>	интервалы	0-0.8	0.8-1.6	1.6-2.4	2.4-3.2	3.2-4	4-4.8	4.8-5.6	5.6-6.4	6.4-7.2	7.2-8	частоты	175	148	118	88	26	17	11	10	7	5																																																																																								
интервалы	0-0.8	0.8-1.6	1.6-2.4	2.4-3.2	3.2-4	4-4.8	4.8-5.6	5.6-6.4	6.4-7.2	7.2-8																																																																																																					
частоты	175	148	118	88	26	17	11	10	7	5																																																																																																					
10.	<p>По заданной таблице частот найти оценку ММП параметров a и b</p> <table border="1"> <tr> <td>интервалы</td> <td>1.1-1.7</td> <td>1.7-2.3</td> <td>2.3-2.9</td> <td>2.9-3.5</td> <td>3.5-4.1</td> <td>4.1-4.7</td> <td>4.7-5.3</td> </tr> <tr> <td>частоты</td> <td>36</td> <td>197</td> <td>182</td> <td>117</td> <td>39</td> <td>23</td> <td>6</td> </tr> </table> <p>По заданной таблице частот найти оценку ММП параметров a и b</p> <table border="1"> <tr> <td>интервалы</td> <td>10-12.5</td> <td>12.5-15.0</td> <td>15.0-17.5</td> <td>17.5-20.0</td> <td>20.0-22.5</td> <td>22.5-25.0</td> <td>25.0-27.5</td> <td>27.5-30.0</td> <td>30.0-32.5</td> <td>32.5-35.0</td> </tr> <tr> <td>частоты</td> <td>3</td> <td>30</td> <td>88</td> <td>136</td> <td>99</td> <td>71</td> <td>43</td> <td>18</td> <td>8</td> <td>4</td> </tr> </table>	интервалы	1.1-1.7	1.7-2.3	2.3-2.9	2.9-3.5	3.5-4.1	4.1-4.7	4.7-5.3	частоты	36	197	182	117	39	23	6	интервалы	10-12.5	12.5-15.0	15.0-17.5	17.5-20.0	20.0-22.5	22.5-25.0	25.0-27.5	27.5-30.0	30.0-32.5	32.5-35.0	частоты	3	30	88	136	99	71	43	18	8	4																																																																								
интервалы	1.1-1.7	1.7-2.3	2.3-2.9	2.9-3.5	3.5-4.1	4.1-4.7	4.7-5.3																																																																																																								
частоты	36	197	182	117	39	23	6																																																																																																								
интервалы	10-12.5	12.5-15.0	15.0-17.5	17.5-20.0	20.0-22.5	22.5-25.0	25.0-27.5	27.5-30.0	30.0-32.5	32.5-35.0																																																																																																					
частоты	3	30	88	136	99	71	43	18	8	4																																																																																																					
11.	<p>Экспоненциальное распределение</p> <table border="1"> <tr><td>[1.]</td><td>11.38</td><td>1.30</td><td>5.33</td><td>0.55</td><td>1.06</td><td>1.67</td><td>18.43</td><td>0.55</td><td>4.74</td><td>2.77</td></tr> <tr><td>[2.]</td><td>3.41</td><td>1.95</td><td>6.99</td><td>1.46</td><td>3.96</td><td>8.04</td><td>3.50</td><td>0.09</td><td>0.48</td><td>8.01</td></tr> <tr><td>[3.]</td><td>5.49</td><td>4.58</td><td>2.89</td><td>4.65</td><td>2.39</td><td>7.87</td><td>4.00</td><td>2.21</td><td>0.37</td><td>2.01</td></tr> <tr><td>[4.]</td><td>3.55</td><td>1.27</td><td>2.33</td><td>0.76</td><td>3.10</td><td>4.00</td><td>4.61</td><td>1.60</td><td>4.88</td><td>0.49</td></tr> <tr><td>[5.]</td><td>4.24</td><td>0.56</td><td>0.54</td><td>1.32</td><td>2.23</td><td>2.01</td><td>1.84</td><td>0.28</td><td>11.56</td><td>6.11</td></tr> </table>	[1.]	11.38	1.30	5.33	0.55	1.06	1.67	18.43	0.55	4.74	2.77	[2.]	3.41	1.95	6.99	1.46	3.96	8.04	3.50	0.09	0.48	8.01	[3.]	5.49	4.58	2.89	4.65	2.39	7.87	4.00	2.21	0.37	2.01	[4.]	3.55	1.27	2.33	0.76	3.10	4.00	4.61	1.60	4.88	0.49	[5.]	4.24	0.56	0.54	1.32	2.23	2.01	1.84	0.28	11.56	6.11																																																							
[1.]	11.38	1.30	5.33	0.55	1.06	1.67	18.43	0.55	4.74	2.77																																																																																																					
[2.]	3.41	1.95	6.99	1.46	3.96	8.04	3.50	0.09	0.48	8.01																																																																																																					
[3.]	5.49	4.58	2.89	4.65	2.39	7.87	4.00	2.21	0.37	2.01																																																																																																					
[4.]	3.55	1.27	2.33	0.76	3.10	4.00	4.61	1.60	4.88	0.49																																																																																																					
[5.]	4.24	0.56	0.54	1.32	2.23	2.01	1.84	0.28	11.56	6.11																																																																																																					

	При помощи ММП найти оценку квадратного корня из дисперсии и проверить эту оценку на несмещённость и эффективность
12.	Гипотеза H_0 --- биномиальное распределение $Binom(k = 20, p = 0.4)$ Гипотеза H_1 --- биномиальное распределение $Binom(k = 20, p = 0.5), \alpha = 0.105$ [1.] 12 8 9 9 7 12 7 12 8 11 [2.] 11 10 13 10 12 11 6 12 10 10 [3.] 14 13 12 11 6 13 11 6 12 10 [4.] 10 12 8 11 10 6 7 13 10 8 [5.] 12 11 11 9 9 7 9 6 12 8
	Гипотеза H_0 --- нормальное распределение $Norm(m = 10, \sigma = 4)$ Гипотеза H_1 --- нормальное распределение $Norm(m = 8, \sigma = 4), \alpha = 0.111$ [1.] 4.64 5.59 12.91 7.44 11.60 6.83 9.26 11.81 14.20 10.25 [2.] 13.54 6.11 4.79 5.61 11.77 13.67 12.44 3.96 4.79 4.45 [3.] 2.98 5.46 3.68 -0.74 13.87 14.00 16.86 0.00 7.70 6.16 [4.] 8.28 6.86 7.37 8.96 10.83 5.37 12.87 0.95 15.58 5.10 [5.] 14.85 8.55 3.71 6.96 11.28 4.59 13.92 7.43 6.17 7.72
13.	Распределение Пуассона с неизвестным параметром $\lambda, \alpha = 0.1$ [1.] 5 7 4 8 5 6 9 12 11 9 [2.] 5 6 8 8 9 8 6 9 8 11 [3.] 10 8 10 12 8 14 6 10 2 6 [4.] 7 6 9 6 10 5 7 5 10 13 [5.] 12 6 10 9 4 4 7 11 8 8
	Гамма распределение с неизвестным параметром $\lambda, \gamma = 1, \alpha = 0.05$ [1.] 8.95 9.45 2.13 0.36 5.94 9.15 29.92 0.74 0.33 1.61 [2.] 9.12 28.84 11.18 0.60 1.38 12.24 3.79 1.31 33.90 4.52 [3.] 0.77 6.57 1.26 22.88 6.54 0.55 12.87 9.89 11.27 2.04 [4.] 6.76 2.01 8.01 22.74 17.60 19.02 7.94 2.16 22.30 3.51 [5.] 0.29 12.36 24.30 13.71 12.50 7.48 1.24 6.32 13.24 19.46