Контрольная работа
по Теории вероятностей и математической статистике (ТВ и МС)
для студентов заочного отделения

Тема 1. Классическое определение вероятности и алгебра событий

Задача 1.

В партии из $(3n+11)$ изделий $(2n+5)$ бракованных. Найти вероятность того, что среди выбранных наугад $(3n+8)$ изделий окажется ровно $(2n+3)$ бракованных.

Ответ округлить до тысячных.

Задача 2.

В ящике $(n+4)$ белых и $(n+6)$ черных шаров. Из этого ящика наудачу извлекают один шар, а затем, ***не возвращая первый шар***, извлекают второй. Найти вероятность того, что первый взятый шар белый, а второй черный.

Ответ округлить до тысячных.

Задача 3.

Три баскетболиста производят по одному броску мяча. Вероятности попадания в корзину первым, вторым и третьим, соответственно равны $\dfrac{m+6}{m+7}$, $\dfrac{n+1}{n+3}$, $\dfrac{p+4}{p+8}$. Найти вероятность того, что бросок произведет удачно: ***1)*** только первый баскетболист; ***2)*** только один баскетболист; ***3)*** хотя бы один баскетболист.

Ответы округлить до тысячных.

Тема 2. Теорема о полной вероятности события и формула Байеса

Задача 4.

Четыре датчика посылают сигналы в общий канал связи в пропорциях $(n+1):(m+2):(p+4)$.

Вероятности получить искаженный сигнал от каждого датчика равны соответственно: $\frac{n+1}{n+20}$; $\frac{m+3}{m+30}$; $\frac{p+3}{p+20}$.

1) Какова вероятность того, что в общем канале связи получен искаженный сигнал?

2) В общем канале связи получен искаженный сигнал.
Какова вероятность, что этот сигнал от первого датчика?
Какова вероятность, что этот сигнал от второго датчика?
Какова вероятность, что этот сигнал от третьего датчика?
Ответы округлить до тысячных.

От какого датчика вероятнее всего был получен этот искаженный сигнал?

Тема 3. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли

Задача 5.

Проведено $(m+6)$ независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события равна $\frac{p+1}{p+5}$. Найти:

1) вероятность того, что в событие появится ровно (m+2) раза;
2) наивероятнейшее число появления события и его вероятность.

Ответы округлить до тысячных.

Тема 4. Случайные величины и их числовые характеристики

Задача 6.

Дискретная случайная величина X имеет закон распределения:

X	$(n+2)$	$(n+3)$	$(n+5)$
P	$\frac{p+1}{p+5}$	$\frac{p+1}{p+5}$	?

1) Найти неизвестную вероятность.

2) Найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ случайной величины X.

Задача 7.

Случайная величина X подчинена нормальному закону с плотностью распределения вероятностей:

$$f(x) = \frac{1}{(m+3)\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-p)^2}{2(m+3)^2}}$$

Найти:

1) математическое ожидание и дисперсию случайной величины X;

2) вероятность попадания величины X в интервал $\left((p-m);\ (p+m+7)\right)$;

3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = (m+2)\cdot X + 5(n+1)$.

Тема 5. Статистическая обработка вариационных рядов

Задача 8.

В результате эксперимента получены данные, записанные в виде вариационного ряда частот:

Варианта x_i	$-2(n+1)$	$-(n+1)$	0	$(n+1)$	$2(n+1)$
Частота n_i	$2(m+1)$	$3(m+2)$	$(m+8)$	$3(m+1)$	$(m+1)$

1) Определить объем выборки и размах варьирования.

2) Составить вариационный ряд относительных частот, построить полигон относительных частот, найти моду.

3) Составить кумулятивный ряд относительных частот и построить кумуляту относительных частот.

4) Вычислить выборочную среднюю, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение.

5) Найти несмещенные точечные оценки для математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения генеральной совокупности.

Пример решения варианта контрольной работы

Задача 1.

В партии из 19 изделий 8 бракованных. Найти вероятность того, что среди выбранных наугад 12 изделий окажется ровно 5 бракованных. *Ответ округлить до тысячных*.

Решение.

Испытание – выбор любых 12 изделий из 19 имеющихся.

Событие A – выбраны 12 изделий, из которых ровно 5 бракованных и 7 стандартных.

$$\left.\begin{matrix} 8 \text{ } \textit{бракованных} \\ 11 \text{ } \textit{стандартных} \end{matrix}\right\} = 19 \text{ } \textit{изделий} \to 12 \text{ } \textit{изделий} = \left\{\begin{matrix} 5 \text{ } \textit{бракованных} \\ 7 \text{ } \textit{стандартных} \end{matrix}\right.$$

При таком выборе важен только состав выборки, порядок значения не имеет, повторений нет. Значит, число всевозможных исходов N такого испытания – это число сочетаний без повторений из 19 элементов по 12, то есть

$$N = C_{19}^{12} = \left\{\begin{matrix} \textit{Сочетания без повторений}: \quad C_n^k = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \\ k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{19!}{12!\cdot(19-12)!} = \frac{19!}{12!\cdot 7!} = \frac{19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} = 50388.$$

Благоприятным исходом для наступления события A будет выбор 5 бракованных изделий из 8 **и** 7 стандартных изделия соответственно из 11.

Число благоприятных исходов для события A:

$$M_A = C_8^5 \cdot C_{11}^7 = \frac{8!}{5!\cdot 3!}\cdot\frac{11!}{7!\cdot 4!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 18480.$$

По классическому определению, вероятность искомого события:

$$P(A) = \frac{M_A}{N} = \frac{18480}{50388} = 0,366753 \approx 0,367.$$

Ответ: $0,367$.

Задача 2.

В ящике 10 белых и 15 черных шаров. Из этого ящика наудачу извлекают один шар, а затем, ***не возвращая первый шар***, извлекают второй. Найти вероятность того, что первый взятый шар белый, а второй черный. *Ответ округлить до тысячных*.

Решение. Рассмотрим события:

A – первый взятый шар белый, а второй черный;

A_1 – первый взятый шар белый; A_2 – второй взятый шар черный.

Событие A состоит в одновременном наступлении событий A_1 и A_2, то есть является их произведением. Так как первый взятый шар не возвращен обратно, то события A_1 и A_2 зависимые.

По теореме умножения вероятностей для зависимых событий

$$P(A) = P\underbrace{(A_1 \cdot A_2)}_{\text{зависимые}} = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2).$$

Найдем вероятности $P(A_1)$ и $P_{A_1}(A_2)$ по классическому определению. Учитывая, что всего в ящике было 10+15=25 шаров, из которых 10 белых, получаем, что

$$P(A_1) = \frac{M_1}{N_1} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}.$$

После того, как наступило событие A_1 (извлекли белый шар), в ящике осталось 24 шара, из которых 15 черных, значит

$$P_{A_1}(A_2) = \frac{M_2}{N_2} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}.$$

Тогда искомая вероятность события A будет равна:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{8} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Ответ: $0{,}25$.

Задача 3.

Три баскетболиста производят по одному броску мяча. Вероятности попадания в корзину первым, вторым и третьим, соответственно, $0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}9$. Найти вероятность того, что бросок произведет удачно:

1) только первый баскетболист;

2) только один баскетболист;

3) хотя бы один баскетболист.

Решение. Обозначим события:

$A_1 -$ первый баскетболист попал в корзину; $P\left(A_1\right)=0,7$; тогда

$\overline{A_1} -$ первый баскетболист не попал в корзину $P\left(\overline{A_1}\right)=1-0,7=0,3$.

$A_2 -$ второй баскетболист попал в корзину; $P\left(A_2\right)=0,8$; $P\left(\overline{A_2}\right)=0,2$.

$A_3 -$ третий баскетболист попал в корзину; $P\left(A_3\right)=0,9$; $P\left(\overline{A_3}\right)=0,1$.

Баскетболисты попадают в корзину или промахиваются независимо друг от друга.

1) Событие $B -$ в корзину попал ***только первый*** баскетболист.

$B = A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$;

$P\left(B\right) = P(\underbrace{A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}}_{\textit{независимые}}) = P\left(A_1\right)\cdot P\left(\overline{A_2}\right)\cdot P\left(\overline{A_3}\right) = 0,7\cdot 0,2\cdot 0,1 = 0,014$.

2) Событие $C -$ в корзину попал ***только один*** баскетболист (**или** только первый, **или** только второй **или** только третий).

$$C = A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3;$$

тогда по теоремам о сложении вероятностей несовместных событий и об умножении вероятностей независимых событий, получим:

$$P\left(C\right) = P(\underbrace{A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3}_{\textit{несовместные}}) =$$

$$P\left(C\right) = P(\underbrace{A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}}_{\textit{независимые}}) + P(\underbrace{\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}}_{\textit{независимые}}) + P(\underbrace{\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3}_{\textit{независимые}}) =$$

$$= P\left(A_1\right)\cdot P\left(\overline{A_2}\right)\cdot P\left(\overline{A_3}\right) + P\left(\overline{A_1}\right)\cdot P\left(A_2\right)\cdot P\left(\overline{A_3}\right) + P\left(\overline{A_1}\right)\cdot P\left(\overline{A_2}\right)\cdot P\left(A_3\right) =$$

$$= 0,7\cdot 0,2\cdot 0,1 + 0,3\cdot 0,8\cdot 0,1 + 0,3\cdot 0,2\cdot 0,9 = 0,092.$$

3) Событие $D-$ в корзину попал ***хотя бы один*** баскетболист (или один, или двое или все трое попали).

Рассмотрим событие $\overline{D}-$ ни один баскетболист не попал в корзину. Это событие является противоположным событию D.

$\overline{D} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$.

$$P(\overline{D}) = P(\underbrace{\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}}_{\text{независимые}}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,1 = 0,006;$$

Тогда вероятность события D:

$$P\left(D\right) = 1 - P\left(\overline{D}\right) = 0,994.$$

Ответ: ***1)*** $0,014$; ***2)*** $0,092$; ***3)*** $0,994$.

Задача 4.

Три датчика посылают сигналы в общий канал связи в пропорциях $6:4:5$. Вероятности получить искаженный сигнал от каждого датчика равны соответственно: $0,6$; $0,5$; $0,7$.

1) Какова вероятность того, что в общем канале связи получен искаженный сигнал?

2) В общем канале связи получен искаженный сигнал.

Какова вероятность, что этот сигнал от первого датчика?

Какова вероятность, что этот сигнал от второго датчика?

Какова вероятность, что этот сигнал от третьего датчика?

Ответы округлить до тысячных.

От какого датчика вероятнее всего был получен этот искаженный сигнал?

Решение.

1) Событие A – в общем канале связи получен искаженный сигнал.

Рассмотрим гипотезы:

H_1 – сигнал послан первым датчиком;

H_2 – сигнал послан вторым датчиком;

H_3 – сигнал послан третьим датчиком.

Найдем вероятности гипотез по классическому определению вероятности: $P(H_1)=\dfrac{6}{6+4+5}=\dfrac{6}{15}$; $P(H_2)=\dfrac{4}{15}$; $P(H_3)=\dfrac{5}{15}$.
Сумма вероятностей всех гипотез должна равняться единице:

(!) $P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)=\dfrac{6}{15}+\dfrac{4}{15}+\dfrac{5}{15}=1.$

Событие A может наступить только вместе с одной из гипотез H_i. Условные вероятности события A для каждой из гипотез даны в условии задачи: $P_{H_1}(A)=0,6$; $P_{H_2}(A)=0,5$; $P_{H_3}(A)=0,7$.

Найдем вероятность события A – в общем канале связи получен искаженный сигнал – ***по формуле полной вероятности***:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+P(H_3)\cdot P_{H_3}(A)=$$

$$=\frac{6}{15}\cdot 0,6+\frac{4}{15}\cdot 0,5+\frac{5}{15}\cdot 0,7\approx 0,607.$$

2) Событие A ***наступило***, в общем канале связи получен искаженный сигнал. Нужно выяснить теперь условные вероятности гипотез, то есть, вероятность того, что сигнал послан одним из трех датчиков, при условии, что уже получен искаженный сигнал.

Применяем ***формулу Байеса*** $P_A(H_k)=\dfrac{P(H_k)\cdot P_{H_k}(A)}{P(A)}$:

$P_A(H_1)=\dfrac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(A)}=\dfrac{\frac{6}{15}\cdot 0,6}{0,607}\approx 0,395$ – вероятность того, что искаженный сигнал послан первым датчиком.

$P_A(H_2)=\dfrac{P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)}{P(A)}=\dfrac{\frac{4}{15}\cdot 0,5}{0,607}\approx 0,22$ – вероятность того, что искаженный сигнал послан вторым датчиком.

$$P_A(H_3)=\frac{P(H_3)\cdot P_{H_3}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{15}\cdot 0,7}{0,607}\approx 0,384$$ – вероятность того, что искаженный сигнал послан третьим датчиком.

Таким образом, вероятнее всего искаженный сигнал послан первым датчиком.

Ответ: ***1)*** $0,607$; ***2)*** $0,395$; $0,22$; $0,384$.

Задача 5.

Проведено 4 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события равна $\frac{1}{2}$.

Найти:

1) вероятность того, что в событие появится ровно три раза;

2) наивероятнейшее число появления события и его вероятность.

Ответы округлить до тысячных.

Решение. Всего проведено $n=4$ испытания. Вероятность появления события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний и равна $p=\frac{1}{2}$. Вероятность не наступления события A равна $q=1-p=\frac{1}{2}$.

1) $k=3$. Вероятность того, что из четырех независимых испытаний событие A появится ровно три раза, найдем по формуле Бернулли:

$$P_{k,\,n}(A)=C_n^{\,k}\cdot p^{\,k}\cdot q^{\,n-k},\quad \text{где } C_n^k=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}.$$

$$P_{3,4}(A)=C_4^3\cdot p^3\cdot q^1=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}=0,25.$$

2) Наивероятнейшим числом появления (или наивероятнейшей частотой) события A при n независимых испытаниях называется число появлений события A, имеющее наибольшую вероятность.

Обозначается символом k_0 и удовлетворяет двойному неравенству:

$$np - q \le k_0 \le np + p.$$

$$4 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \le k_0 \le 4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \qquad 1{,}5 \le k_0 \le 2{,}5,$$

следовательно, наивероятнейшее число наступления события A: $k_0 = 2$.

Найдем его вероятность по формуле Бернулли:

$$P_{2,4}(A) = C_4^2 \cdot p^3 \cdot q^1 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = 6 \cdot \frac{1}{16} = 0{,}375.$$

Ответ: **1)** $0{,}25$; **2)** 2, $0{,}375$.

Задача 6.

Дискретная случайная величина X имеет закон распределения:

X	1	2	4
P	0,1	0,7	?

1) Найти неизвестную вероятность.

2) Найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ случайной величины X.

Решение.

1) По условию нормировки сумма всех вероятностей в законе распределения равна единице: $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, следовательно,

$$0{,}1 + 0{,}7 + p_3 = 1, \quad \Rightarrow \quad p_3 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$$

Тогда закон распределения примет вид:

X	1	2	4
P	0,1	0,7	0,2

2) Найдем числовые характеристики.

Математическое ожидание: $M\left(X\right)=\sum\limits_{i=1}^{k}x_i\cdot p_i$

$M\left(X\right)=x_1\cdot p_1+x_2\cdot p_2+x_3\cdot p_3=1\cdot 0{,}1+2\cdot 0{,}7+4\cdot 0{,}2=$
$=0{,}1+1{,}4+0{,}8=2{,}3.$

Дисперсия:

$D\left(X\right)=M\left(X^2\right)-\left[M\left(X\right)\right]^2$, где $M\left(X^2\right)=\sum\limits_{i=1}^{k}\left(x_i\right)^2\cdot p_i$.

Найдем сначала
$M\left(X^2\right)=x_1^2\cdot p_1+x_2^2\cdot p_2+x_3^2\cdot p_3=1\cdot 0{,}1+4\cdot 0{,}7+16\cdot 0{,}2=$

$=0{,}1+2{,}8+3{,}2=6{,}1.$
Тогда
$D\left(X\right)=M\left(X^2\right)-\left[M\left(X\right)\right]^2=6{,}1-2{,}3^2=6{,}1-5{,}29=0{,}81.$

Среднее квадратическое отклонение:
$\sigma\left(X\right)=\sqrt{D\left(x\right)}=\sqrt{0{,}81}=0{,}9.$

Ответ: ***1)*** $0{,}2$; ***2)*** $M\left(X\right)=2{,}3$; $D\left(X\right)=0{,}81$; $\sigma\left(X\right)=0{,}9$.

Задача 7.

Случайная величина X подчинена нормальному закону с плотностью распределения вероятностей:

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{\left(x-10\right)^2}{8}}.$$

Найти:

1) математическое ожидание и дисперсию случайной величины X;

2) вероятность попадания величины X в интервал $\left(12;\ 14\right)$;

3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y=3\cdot X+15$.

Решение.

1) Плотность распределения нормального закона в общем виде определяется формулой: $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}}$, где $a=M(X)$, $\sigma^2=D(X)$.

Для заданной случайной величины X:

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-10)^2}{8}}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}a=10\\ \sigma=2\end{cases}.$$

Следовательно, $M(X)=a=10$, $D(X)=\sigma^2=4$.

2) По формуле $P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\dfrac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{\alpha-a}{\sigma}\right)$ получим:

$$P(12<X<14)=\Phi\left(\frac{14-10}{2}\right)-\Phi\left(\frac{12-10}{2}\right)=\Phi(2)-\Phi(1)$$

Значения функции Лапласа $\Phi(2)$ и $\Phi(1)$ находим по таблице (см. Приложение):

Таблица значений функции $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$

x	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2516	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965

$$P(12<X<14)=\Phi(2)-\Phi(1)=0{,}4772-0{,}3413=0{,}1359.$$

3) Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = 3 \cdot X + 15$, если $M(X) = 10$, $D(X) = 4$ (получено в п.1).

$$M(Y) = M(3 \cdot X + 15) = M(3 \cdot X) + M(15) =$$

$$= \left. \begin{cases} M(C \cdot X) = C \cdot M(X) \\ M(C) = C \end{cases} \right\} = 3 \cdot M(X) + 15 = 3 \cdot 10 + 15 = 45.$$

$$D(Y) = D(3 \cdot X + 15) = D(3 \cdot X) + D(15) =$$

$$= \left. \begin{cases} D(C \cdot X) = C^2 \cdot D(X) \\ D(C) = 0 \end{cases} \right\} = 3^2 \cdot D(X) + 0 = 9 \cdot 4 = 36.$$

Ответ: ***1)*** $M(X) = 10$; $D(X) = 4$; ***2)*** $0{,}1359$; ***3)*** $M(Y) = 45$; $D(Y) = 36$.

Задача 8.

В результате эксперимента получены данные, записанные в виде вариационного ряда частот:

Варианта x_i	4	7	8	12	17
Частота n_i	2	4	5	6	3

1) Определить объем выборки и размах варьирования.

2) Составить вариационный ряд относительных частот, построить полигон относительных частот, найти моду.

3) Составить кумулятивный ряд относительных частот и построить кумуляту относительных частот.

4) Вычислить выборочную среднюю, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение.

5) Найти несмещенные точечные оценки для математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения генеральной совокупности.

Решение.

1) Определим объем выборки и размах варьирования:

объем выборки (сумма всех частот): $N = \sum n_i = 20$;

наименьшее значение варианты: $x_{\min} = 4$;

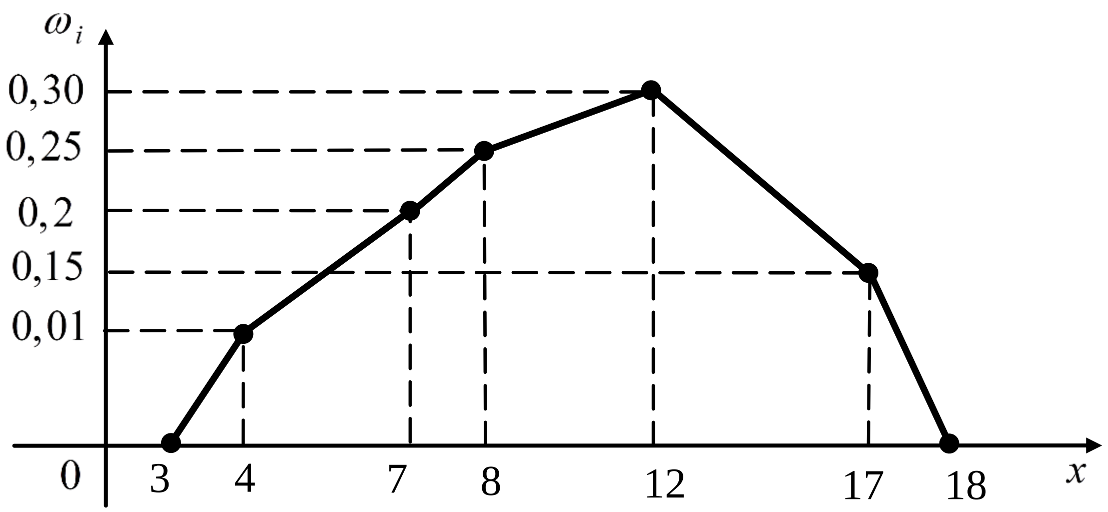
наибольшее значение варианты: $x_{\max} = 17$;

размах варьирования: $R = x_{\max} - x_{\min} = 17 - 4 = 13$.

2) Составим вариационный ряд относительных частот:

Варианта x_i	**4**	**7**	**8**	**12**	**17**	Σ (контроль)
Частота n_i	2	4	5	6	3	$N = 20$
Относительная частота $\omega_i = \frac{n_i}{N}$	0,1	0,2	0,25	0,3	0,15	**1**

Построим полигон относительных частот – ломаную, проходящую через точки $(3;\ 0), (4;\ 0{,}1)$, $(7;\ 0{,}2)$, $(8;\ 0{,}25)$, $(12;\ 0{,}3)$, $(17;\ 0{,}15)$, $(18;\ 0)$:

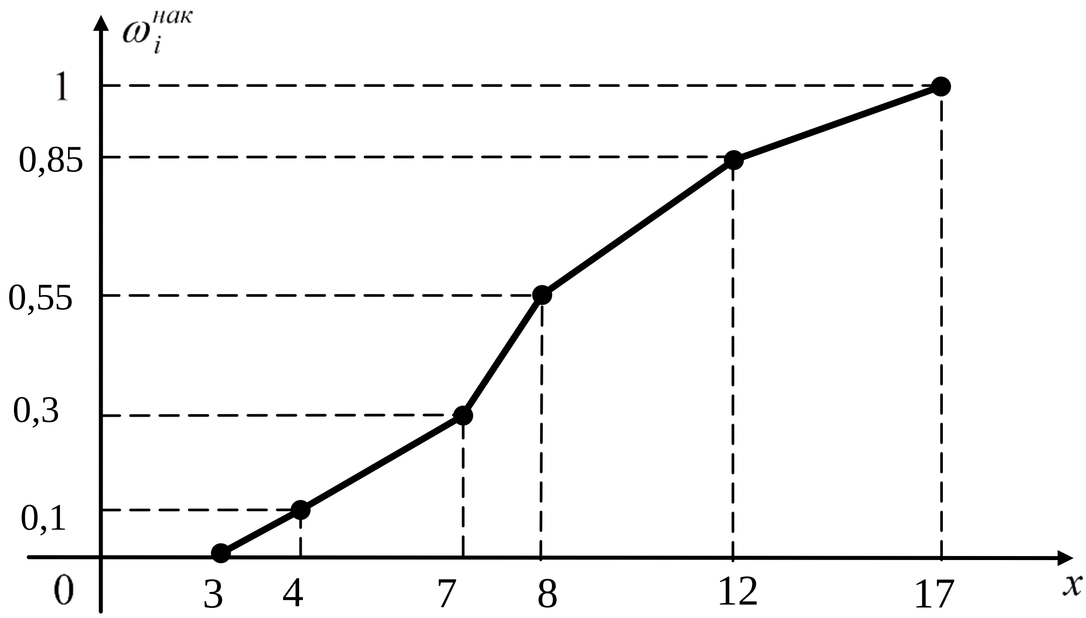


Определим моду – значение варианты с наибольшей относительной частотой: $\max\limits_{1 \le i \le 5} \{\omega_i\} = 0,3 \quad \Rightarrow \quad M_0 = 12.$

3) Составим кумулятивный ряд относительных частот:

Варианта x_i	**4**	**7**	**8**	**12**	**17**	Σ (контроль)
Относительная частота $\omega_i = \frac{n_i}{N}$	0,1	0,2	0,25	0,3	0,15	**1**
Накопленная относительная частота $\omega_i^{нак} = \omega_1 + \omega_2 + ... + \omega_i$	0,1	0,3	0,55	0,85	1	

Построим кумуляту относительных частот – ломаную, соединяющая точки $(3;\ 0), (4;\ 0,1), (7;\ 0,3), (8;\ 0,55), (12;\ 0,85), (17;\ 1)$:



4) Найдем выборочную среднюю, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение.

Составим расчетную таблицу:

Варианта x_i	Относительная частота $\omega_i = \frac{n_i}{N}$	$x_i \cdot \omega_i$	$(x_i)^2 \cdot \omega_i$
4	0,1	0,4	1,6
7	0,2	1,4	9,8
8	0,25	2	16
12	0,3	3,6	43,2
17	0,15	2,55	43,35
Σ	1	$\bar{x}_{\text{в}} = 9{,}95$ Выборочная средняя	$\overline{x^2} = 113{,}95$ Средний квадрат

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \bar{x}_{\text{в}} = 9{,}95 \\ D_{\text{в}} = \overline{x^2} - \left(\bar{x}_{\text{в}}\right)^2 = 113{,}95 - (9{,}95)^2 \approx 14{,}948 \\ \sigma_{\text{в}} = \sqrt{D_{\text{в}}} = \sqrt{14{,}948} \approx 3{,}87 \end{cases}$$

5) Найдем несмещенные точечные оценки параметров генеральной совокупности.

Сначала вычислим исправленную дисперсию и исправленное среднее квадратическое отклонение:

$S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_{\text{в}} = \frac{20}{19} \cdot 14{,}948 \approx 15{,}73$ – исправленная дисперсия;

$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{15{,}73} \approx 3{,}97$ – исправленное среднее квадратическое отклонение.

Точечные оценки:

$M(X) \approx \bar{x}_{\text{в}} = 9{,}95;$

$D(X) \approx S^2 = 15{,}73;$

$\sigma(X) \approx S = 3{,}97.$

Приложение

Таблица значений функции Лапласа

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2516	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3228	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264	1,26	0,3962
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289	1,27	0,3980

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997
1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938		
1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941		

для $x > 5 \Rightarrow \Phi(x) \approx 0,5$

для $x < 0 \Rightarrow \Phi(x) = -\Phi(-x)$