ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ

ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ

УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ СВЯЗИ И ИНФОРМАТИКИ»

Кафедра «Общая теория связи»

В.Г. Санников, А.С. Осипов

Учебно-методическое пособие

по дисциплине

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

для студентов - заочников 3 курса

(направление 11.03.02)

Москва 2019

План УМД 2018/2019 уч. г.

Учебно-методическое пособие

по дисциплине

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

Составители: В.Г. Санников, к.т.н., профессор

А.С. Осипов, к.т.н., доцент

Работа содержит методические указания и контрольное задание по курсу «Цифровая обработка сигналов» из цикла дисциплин по выбору студентов. Контрольное задание составлено по одному из разделов курса и включает задачи анализа цифрового фильтра второго порядка. Даются методические рекомендации по выполнению контрольного задания. Предназначено для студентов заочной формы обучения по направлению 11.03.02.

Отв. редактор А.С. Осипов, к.т.н., доцент

Рассмотрено и одобрено на заседании кафедры ОТС 22.01.2019 г.,

протокол № 6

Заведующий кафедрой Аджемов А.С.

Рецензент: В.П. Волчков, д.т.н., профессор

В настоящее время методы цифровой обработки сигналов (ЦОС), применяемые в радиотехнике и технике связи приобрели большую важность и в значительной мере заменяют классические аналоговые методы. Поэтому в различных учебных заведениях, в том числе и в МТУСИ, введен курс: «Цифровая обработка сигналов».

Задача курса - выработать у студентов заочного факультета, обучающихся по направлению 11.03.02, основы знаний теории дискретно-аналоговых сигналов и линейных дискретных систем, являющихся базой ЦОС. При изучении курса студент должен освоить принципы работы, математическое описание и алгоритмы функционирования цифровых фильтров и устройств обработки сигналов, применяемых в системах связи; уметь рассчитывать различные характеристики и параметры последних.

Изучение курса состоит в проработке материала, перечисленного в программе, разработанной на кафедре Общей теории связи (ОТС) МТУСИ, а также прочитанного на лекциях, выполнения контрольного задания, решения задач в рамках семинарских занятий и сдачи зачета.

Контрольная работа содержит задание по одному из узловых вопросов курса ЦОС, а именно цифровая фильтрация сигналов. Методические указания для решения контрольной работы позволят студенту-заочнику самостоятельно разобраться в достаточно сложных вопросах временного и спектрального анализа цифровых фильтров. Методы курса ЦОС применяются в задачах курсового и дипломного проектирования.

Курс ЦОС базируется на таких дисциплинах, как высшая математика, вычислительная техника, теория электрических цепей, общая теория связи и др.

Основной литературой по курсу является учебное пособие для высших учебных заведений под названием «ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ», авторы Л.М. Гольденберг, Б.Д. Матюшкин, М.Н. Поляк. Существует множество других работ под этим названием, которые приведены в списке дополнительной литературы. В списке дополнительной литературы приведены так же пособия, которые студент может приобрести либо в библиотеке МТУСИ, либо на кафедре ОТС.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов: Учеб. пособие для вузов. - 2-изд., перераб. и доп. - М.: Радио и связь, 1990.

Дополнительная

2. Стеценко О.А. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник. - М.: Высш. шк., 2007.

3. Солонина А.И., Улахович Д.А., Арбузов С.М., Соловьева Е.Б. Основы цифровой обработки сигналов. - 2-изд. – Санкт-Петербург.: «БХВ- Петербург», 2005.

4. Гадзиковский В.И. Теоретические основы цифровой обработки сигналов. - М.: Радио и связь, 2004.

5. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – СПБ.: Питер, 2003.

6. Зюко А.Г., Кловский Д.Д., Коржик В.И., Назаров М.В. Теория электрической связи: Учебник для вузов. - М.: Радио и связь, 1998.

7. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов. - М.: Высш. шк., 1988.

8. Молчанов В.Н., Наумов Н.М., Санников В.Г. Цифровая обработка сигналов: Учеб. пособие. - М.: МТУСИ, 2000.

9. Карташкин А.С. Линейные цифровые фильтры. Вопросы и задачи: Учеб. пособие для вузов. - М.: Радио и связь, 1995.

10. Санников В.Г.. Сборник задач по курсу «Теория электрической связи»: Учеб. пособие. - М.: МТУСИ, 1992.

11. Молчанов В.Н., Санников В.Г. Лабораторная работа №26 WXP. Анализ и эмпирический синтез цифровых фильтров. - М.: каф. ОТС, 2007.

12. Аджемов А.С., Санников В.Г. Общая теория связи: Учебник для вузов. – М.: Горячая линия – Телеком, 2018.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Введение

[1] стр. 4-8; [3] стр.7-19; [4] стр.6-13; [5] стр. 17-30; [7] стр. 11-22, 374; [12] стр. 17-18

Постоянное развитие и усложнение всех отраслей народного хозяйства страны требует все большего увеличения потоков разнообразной информации, необходимой для оперативного управления отраслями в процессе их взаимодействия. Своевременная доставка этой информации потребителям осуществляется посредством *многоканальных систем передачи* (МСП).

В МСП осуществляется обмен информацией между *N* источниками и *N* получателями. Информация, поступающая от каждого из источников сначала обрабатывается в индивидуальных передающих трактах, включающих такие процедуры, как фильтрация, усиление, кодирование, модуляция. Затем выходные сигналы этих трактов объединяются и совместно обрабатываются в групповом тракте. Групповой тракт включает в себя аппаратуру уплотнения и групповой модулятор, с выхода которого групповой сигнал подается в линию связи. Принятый сигнал обрабатывается в групповом тракте приемника, содержащем групповой демодулятор и аппаратуру разделения каналов. Далее сигналы отдельных каналов обрабатываются в индивидуальных приемных трактах, включающих следующие процедуры: фильтрация, усиление, декодирование, демодуляция. В результате такой обработки извлекается полезная информация, поступающая к потребителям.

В теории электросвязи под *информацией* понимают любые сведения о состоянии или поведении некоторого объекта (системы) либо о каких-то событиях, явлениях, предметах, подлежащие передаче от отправителя к получателю. Иформация может представляться в различной форме. Конкретная форма представления информации, удобная для её передачи на расстояние, - есть *сообщение*. Сообщением может быть человеческая речь, звуковые сигналы, последовательности букв, показания какого либо измерительного прибора, видеоизображение и т.п. В МСП для передачи сообщений на расстояние применяют различного вида сигналы. *Сигнал* - это физический процесс, представляющий собой электрическое или электромагнитное колебание, однозначно связанное с передаваемым сообщением и способное распространяться по линии связи. В теории электросвязи сообщения и сигналы представляют в виде функций времени, например $x(t)$.

По виду представления аргумента и мгновенного значения $x(t)$ различают сигналы (сообщения): *аналоговые* (*непрерывные*), изменяющиеся непрерывно как по времени, так и по значениям, т.е. $t \in T_x$, где T_x - длитешльность сигнала, и $x \in D_x$, где D_x - диапазон изменения сигнала; *аналого-дискретные (непрерывно-дискретные)*, принимающие конечное или счетное число значений в любой момент времени $t \in T_x$, $x = x^l$, $l = \overline{0, L_x - 1}$, где L_x - число дискретных уровней сигнала в диапазоне D_x; *дискретно-аналоговые* (*дискретно-непрерывные*), принимающие континуум значений, но изменяющие эти значения через равные или не равные интервалы времени $\Delta t = t_i - t_{i-1}$, причем $x \to x(t = t_i) = x_i \in D_x$, $t_i \in T_x, i = \overline{0, N_x - 1}$, где N_x - число дискретных отсчетов сигнала на длительности T_x; *цифровые* (*дискретно-дискретные*), принимающие конечное или счетное число значений в дискретные моменты времени, т.е. $x(t) \to x^l(t_i), i = \overline{0, N_x - 1}, l = \overline{0, L_x - 1}$.

В зависимости от того, к какому множеству (дискретному или непрерывному) принадлежат сигналы на входе и выходе устройства обработки, различают *цифровые* и *аналоговые устройства обработки сигналов* (УОС). УОС цифровые по входу, но непрерывные по выходу, называют *цифро-аналоговыми.* Аналогично, УОС непрерывные по входу, но цифровые по выходу называют *аналого-цифровыми.* УОС, на входе и выходе которых наблюдаются дискретно-аналоговые сигналы часто также называют *дискретно-аналоговыми.*

В настоящее время во всем мире существует большое число специализированных систем связи, предназначенных для передачи либо только непрерывных, либо только цифровых сообщений. Это системы телефонной связи, системы аналогового звукового и телевизионного вещания, системы телеграфной связи, передачи данных и др. Однако дальнейшее развитие техники связи по пути создания специализированных систем связи оказывается уже экономически и технически неоправданным. Системы связи недалекого будущего - это универсальные системы, одинаково пригодные для передачи любых сообщений, независимо от их природы и характеристик.

Очевидно, основу универсальных систем связи составят системы связи смешанного типа, которые позволят передавать как цифровые, так и непрерывные сообщения. К таким системам относятся: системы связи с импульсно-кодовой модуляцией (ИКМ), дифференциальной ИКМ (ДИКМ), дельта - модуляцией (ДМ) и др. В такого вида системах непрерывное сообщение путем временной дискретизации, квантования по уровню и кодирования преобразуется в цифровой сигнал, который с допустимой точностью отображает исходное непрерывное сообщение.

Цифровая форма представления передаваемых сообщений имеет целый ряд преимуществ перед аналоговой. Перечислим лишь наиболее существенные: возможность унификации на цифровой основе каналов передачи и приема; возможность гибкого управления (маневра) пропускной способностью унифицированных каналов; возможность объединения в единой (интегрированной) системе связи управляющих ЭВМ и современной коммутационной аппаратуры; возможность резкого повышения помехоустойчивости систем связи, в особенности в условиях многократного переприема (ретрансляции) на радиорелейных и спутниковых линиях связи; возможность полной унификации связной аппаратуры на элементной базе современной микроэлектроники и вычислительной техники, широкого использования в связной аппаратуре универсальных и специализированных ЭВМ, микропроцессоров (МП), цифровых сигнальных процессоров (ЦСП) и т.п.

Цифровая обработка сигналов (ЦОС) по сравнению с аналоговой приводит к значительному увеличению точности и помехоустойчивости представления сообщений и сигналов. Эти привлекательные стороны ЦОС с такими свойствами цифровых устройств, как стабильность, надежность, экономичность, легкость воспроизводства, простота реализации на сверхбольших интегральных схемах (СБИС) привели к быстрому развитию методов ЦОС и к созданию быстродействующего, миниатюрного оборудования.

Трудно коротко описать цели и виды ЦОС; они очень разнообразны. Укажем лишь, что к их числу относятся и цифровая фильтрация (ЦФ) и цифровой корреляционный и спектральный анализ, и те преобразования, которые осуществляет приемник над входным сигналом с целью обнаружения или различения передаваемых сигналов, наблюдаемых в смеси с шумом, и те, которые используются, например, в телевидении для создания спецэффектов (остановленный кадр, замедленный повтор и т.п.). Сюда же относятся и такие преобразования, цель которых - уменьшить объем, занимаемый сообщением в канале передачи (сжатие данных), эффективное и помехоустойчивое кодирование и многое другое.

Следует отметить, что большинство таких преобразований над непрерывными сообщениями либо вообще неосуществимы, либо достигаются ценой сложных и громоздких инженерных решений. В то же время над сообщениями и сигналами, представленными в цифровой форме, эти же преобразования могут быть легко и просто реализованы при помощи МП, ЦСП и микро ЭВМ. Применение ЭВМ и процессоров для ЦОС практически снимает так называемую проблему *физической реализуемости* преобразований, переводя её в плоскость чисто технических вопросов, касающихся вычислительной мощности применяемых МП и ЭВМ (в частности, быстродействия и объема памяти).

ЦОС включает как получение дискретно-аналогового и цифрового представления сигналов, так и теорию, расчет и применение цифровых алгоритмов для преобразования полученных цифровых данных. При этом специфической особенностью ЦОС является наличие ошибок квантования при преобразовании аналоговых сигналов в цифровые. Однако разработка 32-х и 64-х разрядных матричных МП для обработки цифровых сигналов позволила существенно уменьшить влияние ошибок квантования на результаты обработки. Поэтому в теории ЦОС появилась возможность вместо цифровых сигналов и устройств их обработки рассматривать дискретно-аналоговые сигналы и устройства их обработки без учета эффекта квантования.

Вопросы для самопроверки

1. Поясните структуру и назначение многоканальной системы передачи.

2. Дайте на физическом уровне определения информации, сообщения и сигнала.

3. Приведите разновидности сигналов и устройств их обработки.

4. Поясните особенности специализированных и универсальной систем связи.

5. Какими преимуществами обладает цифровая форма представления сигналов по сравнению с аналоговой формой?

6. В чем состоят особенности цифровой обработки сигналов по сравнению с аналоговой обработкой?

7. Поясните цели и виды цифровой обработки сигналов.

2. Дискретное представление непрерывных сигналов и Z-преобразование

[1] стр. 4-12, 20-25; [2] стр. 366-393; [3] стр.25-56; [4] стр.11-37;
[5] стр.127-148; [6] стр.388-391; [7] стр. 113-125; 388-391; [8] стр. 6-10; [12] стр. 61-67;

Фундаментальное значение для дискретного представления непрерывных сигналов и решения многих задач теории и техники связи имеет теорема В.А. Котельникова. Суть данной теоремы состоит в следующем: любая непрерывная функция $x(t)$, СПКА которой ограничена частотой F_m, может быть точно представлена последовательностью своих отсчетов $x_i = x(t_i = iT), i = 0,\pm1,\pm2,...$, взятых в моменты времени t_i, отстоящие друг от друга на интервал времени $\Delta t = T \leq 1/2F_m$, где T - интервал дискретизации, а величина обратная ей - частота дискретизации $f_d = 1/T$. Теорема Котельникова служит теоретической основой импульсных (дискретно-аналоговых) и цифровых методов передачи непрерывных сигналов, как в одноканальных, так и многоканальных системах связи с временным разделением каналов.

Строгое доказательство теоремы Котельникова можно найти в указанной литературе. Здесь лишь отметим, что согласно выводам теоремы, безошибочное восстановление сигнала $x(t)$ в любой момент времени по его отсчетам $\{x_i\}, i = 0,\pm1,\pm2,...$, в дискретные моменты возможно только при выполнении следующих ограничений: спектр сигнала строго ограничен верхней частотой F_m, в восстановлении сигнала участвует бесконечное (счетное) число отсчетов, в качестве восстанавливающего устройства используется идеальный фильтр нижних частот (ИФНЧ). В этом случае непрерывный сигнал представляется рядом Котельникова, представляющим собой свертку во временной области последовательности отсчетов $\{x_i\}, i = 0,\pm1,\pm2,...$, с функциями отсчетов, которые представляют собой импульсные реакции ИФНЧ.

Под *дискретизацией* понимают преобразование непрерывной функции $x(t)$ в дискретно-непрерывную $\{x_i\}, i = 0,\pm1,\pm2,...$. При заданном T на выходе *идеального дискретизатора* наблюдается периодическая (с периодом T) последовательность импульсов $x_i = x(t_i = iT), i = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Математической моделью дискретизации может служить преобразование в виде произведения двух функций: исходной непрерывной функции $x(t)$ и периодической импульсной последовательности $\delta_T(t) = \sum_i \delta(t - iT)$, где $\delta(t - t_0)$ - дельта-функция Дирака.

В цифровых системах передачи и обработки сигналов наряду с временной дискретизацией сигнал $x(t)$ подвергается квантованию по уровню и двоичному кодированию. В практических системах эти три операции осуществляются в блоке аналого-цифрового преобразования (АЦП). Откликом АЦП является сигнал импульсно-кодовой модуляции (ИКМ). После передачи или (и) обработки ИКМ сигнала для восстановления исходного сигнала $x(t)$ применяют обратное к АЦП преобразование, называемое цифро-аналоговым (ЦАП). В ЦАП двоичные (цифровые) кодовые комбинации сигнала ИКМ декодируются, в результате чего восстанавливается последовательность $\{x_i\}, i = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, которая затем интерполируется и фильтруется в фильтре нижних частот (ФНЧ) с граничной частотой F_m исходного сигнала. Следует иметь в виду, что восстановление исходного сигнала не является точным и связано с наличием погрешностей неидеальной дискретизации, нелинейного квантования, ошибок округления, ошибок передачи, обработки и др.

В курсе ЦОС вопросы передачи сигналов, как правило, не затрагиваются, а основное внимание уделяется методам цифровой фильтрации и цифрового спектрального анализа. Для решения такого круга задач разработаны компактные и быстродействующие 32-х и 64-х разрядные ЦСП, обладающие пренебрежимо малыми ошибками квантования. Поэтому, как указывалось во введении, в линейной теории ЦОС появилась возможность вместо цифровых сигналов и устройств их обработки рассматривать дискретные (точнее дискретно-аналоговые) сигналы и устройства. Заметим, что в теории ЦОС вместо термина *устройство* используют термин *система*, и говорят о дискретных сигналах и системах. Теория ЦОС или *линейная теория дискретно-аналоговых сигналов и систем* во многом схожа с теорией линейных аналоговых сигналов и систем. Это связано с тем, что дискретно-аналоговый сигнал (цифровой сигнал при малых ошибках квантования) при правильно выбранной частоте дискретизации несет в себе согласно теореме Котельникова всю или почти всю информацию об исходном непрерывном сигнале.

Практически каждому методу математического описания непрерывных сигналов соответствует свой аналог при математическом описании дискретных сигналов. Например, интегральному преобразованию Фурье для непрерывных сигналов соответствует дискретное преобразование Фурье (ДПФ) применительно к дискретным сигналам, а интегральному преобразованию Лапласа - Z-преобразование.

Z-преобразование является одним из математических методов, разработанных для анализа и проектирования дискретных сигналов и систем. Если преобразование Лапласа позволяет свести линейные дифференциальные уравнения, которыми описываются непрерывные системы - к алгебраическим, то Z-преобразование позволяет установить такое же соответствие между разностными и алгебраическими уравнениями для дискретных сигналов и систем. Это существенно упрощает анализ дискретных линейных систем с постоянными параметрами. Z-преобразование можно объяснить как эволюцию представления сигналов, заданных на бесконечном интервале наблюдения, от интеграла Фурье через преобразование Лапласа, что позволяет лучше понять различие между этими важнейшими направлениями теории сигналов.

Так же как преобразование Лапласа, Z-преобразование имеет прямое и обратное представления.

Прямое Z-преобразование, обозначаемое как $X(z)$, задается степенным рядом от комплексной переменной z^i, умноженной на дискретные отсчеты x_i $i = 0,\pm1,\pm2,\ldots$, исходного сигнала, где комплексная переменная z этого преобразования связана с комплексной переменной p преобразования Лапласа соотношениями вида: $z = \exp(pT)$, $p = \ln(z/T)$. Если прямое преобразование Лапласа $X(p)$ задается на комплексной p-плоскости ($p = c + j\omega$), то прямое Z-преобразование $X(z)$ задается на окружности в z-плоскости ($z = e^{cT}e^{j\omega T}$); эта окружность единичная при $c = 0$. Если соблюдаются условия теоремы Котельникова, то кольцеобразный спектр последовательности $\{x_i\}$ в z-плоскости представляет собой спектр $S_x(\omega) = X(\omega)$ исходного непрерывного сигнала $x(t)$, но уменьшенный в T раз и изогнутый по единичной окружности. Из-за этого

Z-преобразование особенно удобно применять в тех случаях, когда проектируются цифровые фильтры, моделирующие заданные аналоговые системы.

Почти для всех реальных дискретных последовательностей $x_i, i = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, встречающихся в теории ЦОС, функция $X(z)$ существует, т.е. определяющий её степенной ряд абсолютно сходится. Для различных типовых дискретных сигналов составлены обширные таблицы их Z-преобразований.

Обратное Z-преобразование позволяет по функции $X(z)$ найти дискретную последовательность $x_i, i = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, с помощью нахождения контурного интеграла от функции $X(z) \cdot z^{i-1}$. Для дробно-рациональных функций $X(z)$ контурные интегралы удобно вычислять с помощью теоремы Коши о вычетах. Вообще для усвоения аппарата Z-преобразования и правильного его применения при решении практических задач следует внимательно изучить различные свойства этого преобразования.

Вопросы для самопроверки

1. Укажите свойства сигнала с ограниченным спектром.

2. Сформулируйте теорему Котельникова и укажите, какое она имеет значение в теории связи.

3. Назовите ограничения применимости теоремы Котельникова.

4. Что понимается и как осуществляется дискретизация сигналов?

5. В чем суть аналого-цифрового и цифро-аналогового преобразований сигналов.

6. При каких условиях применима линейная теория дискретно-аналоговых сигналов и систем.

7. В чем суть и свойства прямого Z-преобразования.

8. В чем суть и свойства обратного Z-преобразования.

3. Дискретные линейные системы и цифровые фильтры

[1] стр.17-20, 49-73; [2] стр.398-421; [3] стр.57-157; [4] стр.49-108;
[5] стр.189-247, 313-367; [7] стр.392-405; [8] стр.11-16; [9] стр. 4-48;

Дискретная линейная система (ДЛС) предназначена для реализации алгоритма преобразования с оператором Φ входной последовательности $\{x_i\}$ в требуемую выходную последовательность $\{y_i\}$,т.е. $\{y_i\} = \Phi\{x_i\}$. *Цифровой фильтр* (ЦФ), реализованный на цифровом сигнальном процессоре с большой разрядной сеткой, не содержащем нелинейных преобразований, как указывалось выше, приближается по своим свойствам к ДЛС. Поэтому часто понятия ДЛС и ЦФ отождествляют. Цифровой фильтр - это цифровая (с пренебрежимо малой ошибкой квантования) или дискретная система, предназначенная для выделения из входной последовательности её составляющих в той или иной области частот.

Для дискретных линейных систем (или ЦФ) так же, как и для непрерывных линейных систем (НЛС), справедлив *принцип суперпозиции* - отклик системы на сумму воздействий равен сумме откликов на каждое из воздействий. Если НЛС полностью можно описать линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, то ДЛС или ЦФ полностью описывается разностным уравнением с постоянными коэффициентами.

Разностное уравнение ЦФ записывается в виде

$$y_i = \sum_{l=1}^{L} a_l y_{i-l} + \sum_{m=0}^{M} b_m x_{i-m}, \quad i = 0,1,2,...,$$

где $\{a_l\}$ и $\{b_m\}$ - совокупности коэффициентов ЦФ, $\{x_{i-m}\}$ и $\{y_{i-l}\}$ - задержанные на m и l периодов дискретизации копии входной и выходной последовательностей.

Решение разностного уравнения ищут, как правило, при нулевых начальных условиях: $y_{-l} = 0, l = \overline{1,L}$, $x_{-m} = 0, m = \overline{1,M}$.

ЦФ называют *рекурсивным*, если хотя бы один из коэффициентов $\{a_l\}$ отличен от нуля. Отклик такого фильтра зависит не только от входного воздействия, но и от задержанных копий отклика, что при реализации ЦФ приводит к появлению цепей обратной связи, существенно влияющих на устойчивость ЦФ.

ЦФ называют *нерекурсивным*, если все коэффициенты $\{a_l\}$ равны нулю. Здесь отклик зависит только от значений входного воздействия.

По величине длительности временных характеристик ЦФ различают: *КИХ-фильтры* (фильтры с конечной импульсной характеристикой) и *БИХ-фильтры* (фильтры с бесконечной импульсной характеристикой). КИХ-фильтры могут быть только нерекурсивными, в то время как БИХ-фильтры - как рекурсивными, так и нерекурсивными.

По величине $\max\{L,M\}$ - максимума из двух чисел, различают ЦФ *первого, второго и т.д. порядков*.

По виду АЧХ в полосе частот от 0 до f_d различают ЦФ *нижних частот, верхних частот, режекторные и полосовые фильтры*.

К основным характеристикам ЦФ относятся: импульсная характеристика (реакция), переходная функция, системная функция и, связанные с ней амплитудно-частотная (АЧХ) и фазо-частотная (ФЧХ) характеристики.

Импульсной реакцией $q_i, i = 0,1,2,...$, называется отклик ЦФ на входной единичный импульс: $x_0 = 1, i = 0$ и $x_i = 0, i \neq 0$.

Переходной функцией $h_i, i = 0,1,2,...$, называется отклик ЦФ на входное воздействие в виде единичного скачка: $x_i = 1, i \geq 0$ и $x_i = 0, i < 0$. В силу принципа суперпозиции переходная функция определяется как сумма значений импульсной реакции до *i*-го момента включительно.

Системная функция $H(z)$ ЦФ определяется отношением Z-преобразования отклика $Y(z)$ и Z-преобразования входного воздействия $X(z)$. Как известно эти функции связаны прямым Z-преобразованием с последовательностями $\{y_i\}$ и $\{x_i\}$. Следует отметить, что системная функция и имульсная реакция ЦФ также связаны прямым и обратным Z-преобразованием.

Применяя к правой и левой частям разностного уравнения ЦФ прямое Z-преобразование можно получить следующий вид системной функции

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m} \Big/ \left(1 - \sum_{l=1}^{L} a_l z^{-l}\right) = \frac{H_1(z)}{H_2(z)}.$$

Из этого выражения следует, что передаточная функция ЦФ - есть *дробно-рациональная* функция, числитель и знаменатель которой степенные полиномы комплексной переменной z. Корни числителя, определяемые из равенства $H_1(z) = 0$, называют *нулями* передаточной функции (обозначим их $zo_m, m = \overline{1,M}$), а корни знаменателя, определяемые из $H_2(z) = 0$, называют *полюсами* передаточной функции (обозначим их $zp_l, l = \overline{1,L}$).

При определении АЧХ и ФЧХ ЦФ в соотношение для системной функции нужно подставить $z = e^{j\omega T} = \cos\omega T + j\sin\omega T$, т.е. выразить величину z через частоту $\omega = 2\pi f$ при заданном интервале дискретизации T.

Комплексная частотная характеристика ЦФ определяется так

$$k_T(j\omega) = H(z = e^{j\omega T}) = k_T(\omega)e^{j\varphi_T(\omega)}$$

где $k_T(\omega) = |k_T(j\omega)|$ - модуль функции $k_T(j\omega)$ или АЧХ, а $\varphi_T(\omega)$ - аргумент функции $k_T(j\omega)$ или ФЧХ ЦФ. В этих функциях нижний значок T показывает их зависимость от интервала дискретизации.

При решении задач цифровой фильтрации сигналов необходимо обеспечить устойчивый режим работы ЦФ. Если при ограниченном входном воздействии $|x_i| < K_x$, отклик ЦФ ограничен, т.е. $|y_i| < K_y$, $i = 0,1,2,...$, то ЦФ *устойчив*. Здесь K_x и K_y некоторые постоянные, ограничивающие диапазон изменения входной и выходной последовательностей ЦФ. ЦФ *неустойчив*, если при ограниченном воздействии его отклик неограниченно возрастает.

Условия устойчивости ЦФ определяются значениями полюсов передаточной функции. Если модули этих полюсов меньше единицы, то ЦФ устойчив. Если хотя бы один их модулей полюсов ЦФ больше единицы, то он неустойчив. Геометрически ЦФ устойчив, если его полюсы в z - плоскости охватываются единичной окружностью.

Важной задачей проектирования ЦФ является выбор метода его *программирования*. Под программированием ЦФ понимают способ его реализации в структурной схеме одного из четырех типов: прямой, канонической, параллельной и последовательной. *Прямым* программированием является реализация ЦФ непосредственно по виду его разностного уравнения. Однако, этот путь приводит к избыточному числу, равному $L + M$, линий задержек в схеме ЦФ. Минимальное число, равное $\max\{L, M\}$, линий задержек содержится в схеме ЦФ называемой *канонической*. Однако, следует отметить, что этот способ применяется только для построения ЦФ первого и второго порядка, так как чувствительность в этом случае ЦФ к отклонению коэффициентов оказывается выше, чем при параллельном или последовательном способах реализации. *Параллельное* программирование связано с разложением системной функции ЦФ на простые дроби и представления её в виде суммы системных функций фильтров первого и второго порядка. Таким образом, системную функцию ЦФ можно рассматривать как Z-преобразование суммы выходных сигналов $\{y_{n,i}\}$, образующихся на выходах ЦФ с системными функциями $H_n(z), n = \overline{0, L}$, при подаче на их входы сигнала $\{x_i\}$. *Последовательное* программирование связано с представлением системной функции ЦФ в виде произведения системных функций ЦФ первого и второго порядка. При этом отклик ЦФ формируется на выходе системы из каскадного соединения указанных фильтров при заданном входном воздействии на входе первого звена этой системы.

Следует отметить, что ЦФ произвольного порядка можно реализовать в виде последовательных и параллельных соединений резонаторов (систем второго порядка) и систем первого порядка. Поскольку цифровым схемам присуще свойство хорошей развязки, то в случае реализации ЦФ на элементах цифровой микросхемотехники специальных мер по согласованию резонаторов не требуется. Это обстоятельство отличает проектирование ЦФ от проектирования непрерывных фильтров (НФ). НФ невозможно реализовать без тщательной развязки друг от друга каждого резонатора, например, с помощью операционных усилителей.

Вопросы для самопроверки

1. Что понимается под дискретной линейной системой? Какая её связь с цифровым фильтром?
2. Каким уравнением полностью описывается ЦФ? Опишите его.
3. Приведите классификацию (разновидности) ЦФ.
4. Что относится к основным характеристикам ЦФ? Дайте их определения.
5. Сформулируйте условия устойчивости ЦФ.
6. Назовите методы программирования ЦФ.

4. Дискретное преобразование Фурье и быстрое преобразование Фурье

[1] стр.13-15,123-145; [3] стр. 181-268; [4] стр.110-146; [5] стр.249-274;
[5] стр.381-386; [8] стр.17-21; [12] стр. 64-74;

Многие задачи электросвязи, например, вычисление отклика сложной системы на известное входное воздействие, требуют специфической формы представления сигналов. Часто в качестве такого представления используют *разложение сложного сигнала в ряд по элементарным ортогональным сигналам*. Среди разнообразных систем ортогональных сигналов особое место занимают *гармонические (синусоидальные и косинусоидальные) сигналы*. Эти сигналы инвариантны относительно преобразований, осуществляемых стационарными линейными непрерывными и дискретными системами. Если такие системы возбудить источником гармонических колебаний, то сигналы на их выходах останутся гармоническими с той же частотой, отличаясь от входного сигнала лишь амплитудой и начальной фазой. Кроме того техника генерирования гармонических сигналов относительно проста.

Если сигнал представлен в виде суммы гармонических сигналов с различными частотами, амплитудами и фазами, то говорят, что осуществлено спектральное разложение или спектральное представление этого сигнала. Зависимость амплитуд гармонических составляющих от их частот называют *амплитудным спектром*; зависимость фаз от частот - *фазовым спектром*. Задача определения амплитуд и фаз (или комплексных амплитуд) разложения сложного сигнала по гармоническим сигналам является задачей его *спектрального анализа*. Метод спектральных разложений чрезвычайно обогащает теорию сигналов и открывает прямой путь к анализу прохождения сигналов через широкий класс систем, как непрерывных, так и дискретных.

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) является математическим средством спектрального анализа периодических дискретных сигналов. Как и в непрерывном случае существует прямое и обратное ДПФ. В отличие от непрерывного спектрального представления ДПФ задает дискретное преобразование действительной конечной последовательности $x_i, i=\overline{0,N-1}$, в дискретную комплексную конечную последовательность $X_k, k=\overline{0,N-1}$. Физически $x_i, i=\overline{0,N-1}$- это последовательность отсчетов, следующих через интервал дискретизации T, исходного сигнала, а $X_k, k=\overline{0,N-1}$- это последовательность комплексных амплитуд в спектральном разложении сигнала. При этом между ними устанавливается прямое и обратное ДПФ следующего вида:

$$X_k=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}x_iW_N^{-ik}, k=\overline{0,N-1}, \qquad x_i=\sum_{k=0}^{N-1}X_kW_N^{ik}, i=\overline{0,N-1}.$$

Здесь W_N - обозначение для комплексной экспоненциальной функции следующего вида: $W_N = \exp\{j2\pi / N\} = \cos\{j2\pi / N\} + j\sin\{j2\pi / N\}$. Кроме того $\{W_N^{ik}\}, i,k = \overline{0, N-1}$, это периодические (с периодом N) ортогональные последовательности.

Свойство ортогональности дискретных экспоненциальных функций $\{W_N^{ik}\}$ позволяет рассмотреть вопрос о вычислении дискретной свертки двух периодических (с периодом N) последовательностей, например, сигнальной $x_i, i = \overline{0, N-1}$ и импульсной реакции q_j, $j = 0,1,2,...$, ЦФ в частотной области. В этом случае отклик ЦФ равен

$$y_i = \sum_{l=0}^{N-1} x_l q_{i-l}, \, i = 0,1,2,...$$

Применяя к правой и левой частям этого равенства прямое ДПФ, можно установить следующее соотношение между комплексными амплитудными последовательностями на выходе и входе ЦФ

$$Y_k = N X_k Q_k, \quad k = \overline{0, N-1}.$$

Здесь Y_k, X_k, Q_k - комплексные спектральные амплитуды, получаемые на основе прямого ДПФ от последовательностей $\{y_i\}, \{x_i\}, \{q_i\}$. Таким образом, свертке двух периодических последовательностей с периодом N во временной области соответствует умножение их спектров в частотной области с точностью до постоянной N. Этот вывод указывает на возможность выполнения цифровой фильтрации на основе вычисления спектра $\{Y_k\}$ выходного сигнала ЦФ с последующим применением к нему обратного ДПФ.

Вычисления ДПФ производятся достаточно просто, но требуют выполнения большого числа арифметических операций, таких как сложение и умножение. Действительно, для вычисления одного значения X_k по формуле прямого ДПФ необходимо выполнить N комплексных умножений, а для вычисления N значений спектра, очевидно, потребуется N^2 таких операций. Однако, большая часть этих умножений является лишней, так как последовательность $\{W_N^{ik}\}$ периодическая и для фиксированного k при изменении i от 0 до N-1 произведения будут периодически повторяться. Кроме того, в одном периоде произведения могут образовываться комплексно-сопряженные пары. Табулируя все эти значения периодической последовательности

$\{W_N^{ik}\}$ можно существенно уменьшить количество вычислений необходимое для расчетов прямого и обратного ДПФ. Алгоритм, реализующий эти возможности, называют *быстрым преобразованием Фурье* (БПФ). В 70-е годы предыдущего столетия алгоритм БПФ совершил своего рода революцию в решении задачи спектрального анализа сигналов.

В настоящее время БПФ получил большое распространение и как математический способ вычисления спектра дискретных сигналов и как техническое средство реализации ДПФ на цифровых сигнальных процессорах. Алгоритмов БПФ в настоящее время существует достаточно много, однако все их можно разделить на два класса: по способу прореживания последовательностей во временной и спектральной областях. В том и другом случаях, если N - простое число, то уменьшить число операций при реализации ДПФ не удается. Основная идея уменьшения числа вычислительных операций ДПФ базируется на использовании числа N, разлагающегося на множители вида: $N = \prod_{i=1}^{m} r_i$, где сомножители r_i могут быть равными или различными. В настоящее время широко применяется случай, когда N есть степень двойки $N = 2^m$ (здесь N состоит из максимального числа сомножителей). Для этого случая спектральный анализ методом БПФ требует $2N\log_2 N$ вычислительных операций по сравнению с N^2 операций при ДПФ. Следовательно, БПФ по сравнению с ДПФ требует в $2^{m-1}/m$ раза меньше вычислений при решении одной и той же задачи спектрального анализа.

Как отмечалось, существует два класса алгоритмов БПФ и каждый класс имеет множество модификаций. Идея метода БПФ с прореживанием по времени состоит в поэтапном (с числом этапов при $N = 2^m$ равном $m = \log_2 N$) разбиении исходной последовательности $\{x_i\}$ на подпоследовательности. На первом этапе одно N-точечное ДПФ заменяется двумя $N/2$ -точечными ДПФ от двух, укороченных вдвое последовательностей $\{x_{1,i}\}$ и $\{x_{2,i}\}$. Первая последовательность содержит нечетные выборки исходной последовательности $\{x_i\}$, а вторая - четные. Так как $\{x_{1,i}\}$, $\{x_{2,i}\}$ и их спектры $\{X_{1,k}\}$,$\{X_{2,k}\}$ - периодичны с периодом $N/2$, то на интервале N они повторяются дважды и для расчетов можно использовать не N, а $N/2$ значений. На втором этапе эта процедура повторяется для каждой из подпоследовательностей $\{x_{1,i}\}$ и $\{x_{2,i}\}$, т.е. переходят от двух последовательностей с периодом $N/2$ к четырем последовательностям каждая с периодом $N/4$ и вычисляют четыре $N/4$ - точечных ДПФ. На последнем m-ом этапе формируются спектральные компоненты $\{X_k\}$ исходной последовательности $\{x_i\}$ с помощью $N/(N-1)$ 2-х точечных ДПФ. Отметим, что алгоритмы БПФ удобно изображать графически с помощью направленных сигнальных графов. Их основу составляют узлы (точки) и стрелки (линии передачи с весовыми коэффициентами). Каждый узел представляет переменную, а стрелки, указывающие на этот узел, берут начало в узлах, чьи переменные участвуют в формировании переменной данного узла. Это участие аддитивное и вес каждого слагаемого, если он отличен от 1, обозначается постоянным коэффициентом, написанным рядом на линии передачи.

Следует заметить, что для получения правильного порядка следования выборок спектра их следует на последнем этапе переставить местами по определенному правилу (пересортировать). Можно также осуществить пересортировку исходных данных на первом этапе.

Алгоритм БПФ можно применять не только для реализации прямого БПФ, но и для реализации обратного ДПФ. Таким образом, для вычисления пары дискретных преобразований Фурье достаточно располагать одним цифровым устройством или программой.

Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит задача спектрального анализа сигналов?
2. Как записываются прямое и обратное ДПФ?
3. Записать условие ортогональности дискретных экспоненциальных функций.
4. Что понимается под дискретной сверткой сигналов и как она определяется в частотной области?
5. Что понимают под БПФ и какое его преимущество перед ДПФ?
6. Как реализуется БПФ?
7. Что такое и зачем нужен сигнальный граф?

5. Синтез цифровых фильтров

[1] стр.74-122; [2] стр.417-420; [3] стр.323-430; [5] стр.313-372;

[7] стр.406-415; [8] стр.22-25;

Под *синтезом* ЦФ понимают задачу определения алгоритма его работы, удовлетворяющего заданным условиям. Эти условия могут формулироваться как во временной области, так и в частотной. Обычно разделяют задачи синтеза рекурсивных и нерекурсивных ЦФ.

Рассмотрим вначале задачи синтеза рекурсивных ЦФ по заданным временным характеристикам. Синтез ЦФ, обладающих заданными характеристиками, может осуществляться двумя способами: 1) посредством построения ДЛС, эквивалентной в некотором смысле некоторой НЛС с заданными характеристиками; причем синтез НЛС осуществляется с помощью теории синтеза аналоговых фильтров; 2) путем построения цифровой системы, обладающей характеристиками, близкими в некотором смысле к заданным. Вся процедура синтеза в этом случае проводится в дискретном ряде точек временной оси и не требует знания непрерывного фильтра прототипа.

Часто синтез ЦФ осуществляют по методу замены НЛС её импульсным эквивалентом, в частности, по заданной импульсной реакции НЛС, по заданной переходной функции НЛС и др. Здесь входную последовательность $\{ x_i \}$, рассматриваемую как результат дискретизации некоторого аналогового сигнала, пропускают через фильтр-интерполятор, осуществляющий дискретно-аналоговое преобразование. Затем полученный аналоговый сигнал пропускают через заданную НЛС. Систему, состоящую из интерполирующего фильтра (ИФ) и НЛС, называют *приведенной непрерывной системой*. Её отклик в дискретные моменты времени определяется как дискретная свертка исходной последовательности $\{ x_i \}$ и импульсной реакции приведенной НЛС. Эта процедура, следовательно, позволяет получить ДЛС по исходной НЛС. При этом различному типу ИФ соответствует свой метод синтеза. Если в качестве ИФ использован безынерционный усилитель, то метод называется Z-преобразованием или *методом инвариантной импульсной реакции*. Здесь импульсную реакцию искомой ДЛС (ЦФ) определяют в результате дискретизации импульсной реакции НЛС. Вычисляя Z-преобразование от последней, находят передаточную функцию ЦФ в виде дробнорациональной функции, от которой переходят к разностному уравнению, задающему алгоритм работы ЦФ.

В случае, когда ИФ представляет собой ступенчатый интерполятор с импульсной реакцией, постоянной на интервале дискретизации T, приходят к синтезу ЦФ *методом инвариантной переходной характеристики* (*метод Цыпкина-Гольденберга*). Если же ИФ - линейный интерполятор, то метод синтеза ЦФ называют *методом Рагаззини-Бергена*.

Перейдем к вопросам синтеза рекурсивных ЦФ в частотной области. Синтез ЦФ с близкими к заданным АЧХ и ФЧХ аналогового прототипа затруднителен и может быть выполнен лишь с помощью специальных методов оптимизации, требующих сложных вычислений. Поэтому прибегают к более простым, но конструктивным методам синтеза, не требующим знания всех характеристик НЛС. В частности, для синтеза ЦФ по заданной АЧХ НЛС широко используют метод билинейного преобразования. Его суть состоит в переходе от переменной p в передаточной функции $k(p)$ НЛС к переменной z, определяющей системную функцию $H(z)$ синтезируемого ЦФ.

Для того, чтобы получить возможность непосредственного перехода от $k(p)$ к $H(z)$, необходимо аппроксимировать функцию $p = \ln(z/T)$ рациональной функцией. Это можно сделать, если воспользоваться разложением этой функции в ряд Тейлора. Ограничиваясь только первым членом этого разложения, получают зависимость вида

$$p = \frac{2}{T}\frac{(z-1)}{(z+1)}.$$

Данное преобразование называют билинейным и находит широкое применение при проектировании стандартных ФНЧ, ФВЧ и полосовых фильтров. Основные особенности этого метода состоят в не учете ФЧХ аналогового прототипа и в наблюдаемой деформации масштаба частот ЦФ по отношению НЛС. Поэтому данный метод в основном применяется тогда, когда ЦФ может иметь произвольную ФЧХ. Второй эффект влияет незначительно при уменьшении T.

Синтез нерекурсивных ЦФ также осуществляется как во временной, так и в частотной областях. Наиболее простым способом синтеза ЦФ является синтез по известной импульсной реакции НЛС. С этой целью последнюю дискретизируют и затем усекают до конечного числа отсчетов N так, что получается импульсная реакция ЦФ конечной длительности. Алгоритм работы такого ЦФ описывается дискретной сверткой исходной сигнальной последовательности с полученной импульсной реакцией. Заметим, что такой же результат получается при методе инвариантной импульсной реакции, применяемом для синтеза рекурсивных ЦФ.

При проектировании нерекурсивных ЦФ методом усечения дискретизированной импульсной реакции НЛС возникает вопрос о выборе весовой функции усечения (временного окна). Дело в том, что при простом прямоугольном окне в спектре отклика ЦФ наблюдаются значительные пульсации, искажающие спектр и сам отклик. В теории рядов Фурье это явление известно под названием эффекта Гиббса. Важно подчеркнуть, что уровень пульсаций практически не зависит от длительности N окна. Возникает вопрос о том, какими свойствами должно обладать временное окно, чтобы уровень пульсаций по возможности был минимальным. В настоящее время предложено много различных окон, решающих в той или иной мере эту задачу. Известны окна Бартлета, Тьюки, Хэмминга, Ханнинга и др.

Нерекурсивный ЦФ или КИХ-фильтр может обладать строго линейной ФЧХ. Для этого достаточно, чтобы его импульсная реакция была симметрична относительно точки (N-1)/2 при нечетном N. Этого нельзя достичь в БИХ-фильтре, так как из-за бесконечной импульсной реакции она не может быть строго симметричной.

Для синтеза нерекурсивного ЦФ в частотной области можно использовать метод частотной выборки. Для этого в $H(z)$ подставляют $z = e^{j\omega T}$, где частота ω принадлежит непрерывному множеству, ограниченному частотой дискретизации $\omega_d = 2\pi f_d$. Для перехода к дискретным значениям частоты в спектральной области осуществляется дискретизация с шагом по частоте $\Delta\omega = 2\pi / NT = \omega_d / N$. В результате находят комплексные амплитуды $Q_k = H(e^{j2\pi k/N}) = H(W_N^k)$ спектра импульсной реакции синтезируемого ЦФ. Взяв от последовательности $\{Q_k\}$ обратное ДПФ или применив алгоритм БПФ, находят значения импульсной реакции $\{q_i\}$. Синтез нерекурсивных ЦФ методом частотной выборки особенно эффективен в случае узкополосных частотно-избирательных систем. Выбирая N достаточно большим, можно получить ЦФ с любыми требуемыми характеристиками. Однако такой путь не всегда ведет к наиболее простым в реализации ЦФ. Поэтому на практике применяют более совершенные методы синтеза нерекурсивных ЦФ в частотной области.

Часто нерекурсивная фильтрация в частотной области осуществляется на основе использования алгоритма БПФ. Здесь последовательность исходного сигнала $\{x_i\}$ регистрируется в блоке памяти ЦФ. Затем с помощью прямого БПФ определяется её дискретный спектр $\{X_k\}$. Умножением этого спектра на дискретную функцию $\{Q_k\}$ комплексного коэффициента передачи синтезируемого ЦФ находится дискретный спектр отклика $Y_k = NX_kQ_k, k = \overline{0, N-1}$. Применяя теперь обратное БПФ к $\{Y_k\}$, находится сам отклик как дискретная последовательность $\{y_i\}$. Для повышения эффективности этого метода синтеза ЦФ применяют процедуру перекрытия спектров с накоплением.

Вопросы для самопроверки

1. Что понимается под задачей синтеза цифрового фильтра?

2. Поясните задачи синтеза рекурсивного ЦФ по заданным временным характеристикам.

3. Как осуществляется синтез ЦФ по методу замены НЛС её импульсным эквивалентом?

4. Поясните задачу синтеза ЦФ методом билинейного преобразования.

5. Приведите особенности синтеза нерекурсивного ЦФ по заданной импульсной реакции НЛС.

6. В чем суть задачи синтеза ЦФ методом частотной выборки?

7. Как осуществляется синтез нерекурсивного ЦФ на основе БПФ?

6. Цифровая обработка сигналов в технике связи

[1] стр.146-239; [3] стр.589-620; [3] стр.589-620; [8] стр.26-30;

При обработке сигналов в технике связи возникает ряд задач, связанных с преобразованием спектров сигналов. Некоторые из них решаются с помощью цифровой фильтрации. В отдельную группу выделяют задачи, требующие *преобразования спектра* сигнала в частотной области. Такие преобразования являются типичными в технике многоканальной связи при формировании группового сигнала с частотным разделением каналов (ЧРК) из отдельных канальных сигналов или при выделении отдельных канальных сигналов из группового сигнала в МСП с ЧРК. Особенностью указанной обработки является то, что амплитудный спектр сигнала практически не изменяется. Меняется лишь положение спектра на оси частот.

Остановимся на цифровых методах переноса спектра сигнала, инверсии спектра и формирования дискретных сигналов с одной боковой полосой (сигналов с однополосной модуляцией (ОМ).

Как известно, спектр дискретного сигнала $\{x_i\}$ периодичен с периодом в частотной области, равным частоте дискретизации f_d. При высокой частоте дискретизации составляющие спектра сигнала $\{x_i\}$ сосредоточены около частот, кратных частотам дискретизации. Перенос спектра исходного сигнала на величину $\gamma < f_d/2$ осуществляется путем умножения последовательности $\{x_i\}$ на дискретную экспоненциальную функцию $\{e_i = e^{j2\pi iT\gamma}\}$.

Важное значение в ряде связных задач ЦОС играет процедура *инверсии спектра*. Суть инверсии спектра исходной действительной последовательности состоит в том, что в основной полосе частот от 0 до $f_d/2$ спектр как бы “переворачивается” относительно его центральной частоты. При этом инверсный спектр получается из исходного спектра путем сдвига последнего по оси частот на величину $\gamma = f_d/2$. Во временной области это осуществляется перемножением исходной последовательности $\{x_i\}$ на дискретную экспоненциальную последовательность вида $\{e_{1,i} = e^{j\pi i} = (-1)^i$. Таким образом, операция инверсии спектра действительного сигнала $\{x_i\}$ осуществляется путем простого изменения знака каждого второго отсчета.

Важную роль в технике связи играют ОМ-сигналы. Такие сигналы используются, например, при формировании многоканальных сигналов с ЧРК для получения максимального числа каналов в заданной полосе частот. Однополосный сигнал формируется из двухполосного путем подавления одной из боковых полос (верхней или нижней). Существует много методов цифрового формирования дискретных ОМ-сигналов. Один из простейших состоит в умножении исходной последовательности $\{x_i\}$ на экспоненциальную последовательность $\{e_i = e^{j2\pi iT}\}$ и затем низкочастотную цифровую фильтрацию последовательности $\{x_i \cdot e_i\}$ в полосе частот $(f_2 - f_1)/2$, где f_2, f_1 - соответственно, максимальная и минимальная частоты в спектре исходного сигнала в основной полосе частот. Окончательно дискретный ОМ-сигнал формируется на выходе умножителя, на один вход которого воздействует сигнал с выхода низкочастотного ЦФ, на второй дискретный экспоненциальный сигнал вида $e_i^{-1} = e^{-j2\pi iT}$.

До сих пор мы рассматривали алгоритмы ЦОС при фиксированной частоте дискретизации. Вместе с тем в современных системах связи часто используются устройства с различными частотами дискретизации. Для согласования работы этих устройств требуется решать задачи повышения и понижения частоты дискретизации. Так например, в технике многоканальной связи возникает задача преобразования стандартной частоты дискретизации 60-ти канальной группы с ЧРК, равной 576 кГц в частоту 512 кГц для передачи по каналу связи.

Процесс преобразования дискретного сигнала от более низкой частоты дискретизации к более высокой называют *интерполяцией* дискретного сигнала. Процесс преобразования дискретного сигнала от более высокой частоты дискретизации к более низкой называют *децимацией* дискретного сигнала. Коротко задача интерполяции состоит в добавлении дополнительных отсчетов между каждой парой отсчетов исходной последовательности так, что частота выходной последовательности увеличивается без нарушения структуры спектра сигнала в основной полосе частот. Децимация - процесс в некотором роде обратный интерполяции.

В цифровых многоканальных системах передачи используются такие устройства, как *трансмультиплексоры*. Трансмультиплексоры (ТМ) - это цифровые устройства обработки сигналов, предназначенные для сопряжения систем передачи и коммутации групповых сигналов с временным разделением каналов (ВРК) и систем передачи с ЧРК. Основными задачами ТМ являются: 1) выделение канальных сигналов из группового сигнала с ЧРК и перенос спектров выделенных канальных сигналов в область нижних частот путем децимации дискретных сигналов (прямое преобразование); 2) формирование группового сигнала с ЧРК из отдельных канальных сигналов с соответствующей интерполяцией дискретных сигналов (обратное преобразование).

Если МСП с ЧРК или ВРК является аналоговой, то входы (выходы) ТМ подключаются к соответствующей системе через АЦП и ЦАП.

Следует внимательно познакомиться с вопросами классификации ТМ. В частности различают ТМ по числу уровней обработки сигналов и наличию или отсутствию в них дополнительного преобразования и др.

Вопросы для самопроверки

1. Что понимается и как осуществляется преобразование частоты с ЦОС?

2. Как осуществляется дискретная инверсия спектра сигнала?

3. Как осуществляется формирование дискретных сигналов с одной боковой полосой частот?

4. В чем суть процедур интерполяции и децимации дискретных сигналов?

5. Что такое и для чего применяются трансмультиплексоры?

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ
И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ЕГО ВЫПОЛНЕНИЮ

Цифровой фильтр (ЦФ) второго порядка задан своими параметрами:

а) коэффициентами - $b_0, b_1, b_2,$ числителя системной функции;

в) коэффициентами - $a_1, a_2,$ знаменателя системной функции .

Эти параметры приведены в таблице1. Номер варианта определяется двумя последними цифрами номера студенческого билета.

Таблица 1

Две последние цифры номера студенческого билета	Коэффициенты числителя передаточной функции ЦФ			Коэффициенты знаменателя передаточной функции ЦФ	
	b_0	b_1	b_2	a_1	a_2
00;30;60;90	0,4	0,5	0,1	0,2	0,7
01;31;61;91	0,5	3,0	0,1	-0,8	-0,9
02;32;62;92	0,6	1,7	0,1	-0,2	0,7
03;33;63;93	0,7	1,5	0,1	0,8	-0,9
04;34;64;94	0,8	2,9	0,1	0,3	0,5
05;35;65;95	0,9	2,8	0,1	-1,1	-0,8
06;36;66;96	1,0	2,7	0,1	-0,3	0,5
07;37;67;97	1,1	2,6	0,1	1,1	-0,8
08;38;68;98	1,2	2,5	0,1	0,4	0,4
09;39;69;99	1,3	2,4	0,1	-0,7	-0,7
10;40;70	1,4	2,3	0,12	-0,4	0,4
11;41;71	1,5	2,2	0,12	0,7	-0,7
12;42;72	1,6	2,1	0,12	0,5	0,3
13;43;73	1,7	2,0	0,12	-1,0	-0,6
14;44;74	1,8	1,9	0,12	-0,5	0,3
15;45;75	1,9	1,3	0,12	1,0	-0,6
16;46;76	2,0	1,8	0,12	0,1	0,6
17;47;77	2,1	1,7	0,12	-0,5	-0,5
18;48;78	2,2	1,6	0,12	-0,1	0,6
19;49;79	2,3	1,5	0,12	0,5	-0,5
20;50;80	2,4	1,4	0,12	0,7	0,2
21;51;81	2,5	1,3	0,14	-0,6	-0,4
22;52;82	2,4	1,2	0,14	-0,7	0,2
23;53;83	2,7	1,0	0,14	0,6	-0,4
24;54;84	2,8	0,9	0,14	0,6	0,1
25;55;85	2,9	0,8	0,14	-0,5	-0,3
26;56;86	3,0	0,7	0,14	-0,6	0,1
27;57;87	0,8	0,6	0,14	0,5	-0,3
28;58;88	1,2	0,5	0,14	0,4	-0,2
29;59;89	1,4	0,4	0,14	-0,4	-0,2

Требуется:

1. Записать разностное уравнение ЦФ.

2. Изобразить структурную каноническую схему ЦФ.

3. Рассчитать 20 значений импульсной реакции ЦФ и построить в масштабе её временную диаграмму.

4. Рассчитать 20 значений переходной функции ЦФ и построить в масштабе её временную диаграмму.

5. Записать выражение для системной функции ЦФ и получить выражения для амплитудно-частотной (АЧХ) и фазо-частотной (ФЧХ) характеристик ЦФ.

6. Рассчитать по 20 значений АЧХ и ФЧХ ЦФ для дискретных значений частот, равных: $f_i = i/19T,\, i = 0,1,2,...,19$, T = 125 (мкс) - интервал дискретизации. Построить в масштабе графики АЧХ и ФЧХ ЦФ.

7. Рассчитать нули и полюса передаточной функции ЦФ. Определить, является ли ЦФ устойчивым.

ПРИМЕЧАНИЕ. Расчеты импульсной реакции, переходной функции, амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристик ЦФ целесообразно проводить с использованием ЭВМ или другой вычислительной техники.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Цифровой фильтр (без учета эффектов квантования) второго порядка описывается разностным уравнением следующего вида:

$$y_i = a_1 y_{i-1} + a_2 y_{i-2} + b_0 x_i + b_1 x_{i-1} + b_2 x_{i-2}, \quad i = 0,1,2,...$$

при нулевых начальных условиях: $y_{-1} = y_{-2} = x_{-1} = x_{-2} = 0$.

2. Структурная каноническая схема ЦФ содержит две линии задержки, отводы которых через усилительные элементы подаются на входной и выходной сумматоры. На входной сумматор подается исходная последовательность $\{ x_i \}$ и сигналы с выходов линий задержки, усиленные в a_1 и a_2 раза. Сигнал с выхода первого сумматора одновременно подается на первую линию задержки и, усиленный в b_0 раз, на вход выход-

ного сумматора, куда, усиленные в b_1 и b_2 раза, подаются сигналы с выходов линий задержки. Откликом выходного сумматора является последовательность $\{y_i\}$.

3. В соответствии с разностным уравнением (см. пункт 1) импульсная реакция ЦФ ищется как $q_i = y_i$ при входном сигнале вида: $x_0 = 1$, $x_i = 0, i = \pm 1, \pm 2, \ldots$,

$$\begin{aligned}
&q_0 = b_0, && i = 0\\
&q_1 = a_1 q_0 + b_1, && i = 1\\
&q_2 = a_1 q_1 + a_2 q_0 + b_2, && i = 2\\
&q_3 = a_1 q_2 + a_2 q_1,. && i = 3.\\
&q_i = a_1 q_{i-1} + a_2 q_{i-2}, && i \geq 4
\end{aligned}$$

4. Переходная функция связана с импульсной реакцией ЦФ соотношением:

$$h_k = \sum_{i=0}^{k} q_i, \quad k = \overline{0{,}19}.$$

Следует отметить, что при построении временных диаграмм импульсной реакции и переходной функции их значения q_i и h_k - это напряжения или токи, заданные в дискретные моменты времени $t_i = iT$. Например, q_i, i = 0,1,2,... - это значения импульсной реакции ЦФ в моменты времени *0,T,2T* и т.д.

5. Системная функция исследуемого ЦФ задается соотношением:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 - a_1 z - a_2}$$

Для определения АЧХ и ФЧХ ЦФ в системной функции вначале следует сделать подстановку $z = e^{j\omega T} = \cos\omega T + j\sin\omega T$, а затем найти действительные и мнимые части числителя и знаменателя функции $H(z)$. В результате имеем

$$k_T(j\omega) = H(e^{j\omega T}) = \frac{k_{T,1}(j\omega)}{k_{T,2}(j\omega)} = \frac{\mathrm{Re}\,k_{T,1}(j\omega) + j\,\mathrm{Im}\,k_{T,1}(j\omega)}{\mathrm{Re}\,k_{T,2}(j\omega) + j\,\mathrm{Im}\,k_{T,2}(j\omega)}$$

Здесь искомые функции соответственно равны:

- действительная часть числителя

$$\mathrm{Re}\,k_{T,1}(j\omega) = R_1(\omega) = b_0 + b_1\cos\omega T + b_2\cos 2\omega T;$$

- мнимая часть числителя

$$\mathrm{Im}\,k_{T,1}(j\omega) = I_1(\omega) = -b_1\sin\omega T - b_2\sin 2\omega T;$$

- действительная часть знаменателя

$$\mathrm{Re}\,k_{T,2}(j\omega) = R_2(\omega) = 1 - a_1\cos\omega T - a_2\cos 2\omega T;$$

- мнимая часть знаменателя

$$\operatorname{Im} k_{T,2}(j\omega) = I_2(\omega) = a_1 \sin\omega T + a_2 \sin 2\omega T .$$

6. С учетом полученных выражений и, введенных обозначений, находятся:

- амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) ЦФ

$$k_T(\omega) = \sqrt{[R_1^2(\omega) + I_1^2(\omega)]/[R_2^2(\omega) + I_2^2(\omega)]} ;$$

- фазо-частотная характеристика (ФЧХ) ЦФ

$$\varphi_T(\omega) = arctg[I_1(\omega)/R_1(\omega)] - arctg[I_2(\omega)/R_2(\omega)].$$

Для построения графиков АЧХ и ФЧХ ЦФ их дискретные значения $k_n = k_T(\omega_n)$ и $\varphi_n = \varphi_T(\omega_n)$ рассчитываются на дискретных частотах $f_n = \omega_n / 2\pi = nf_d /19, n = \overline{0,19}$, где $f_d = 1/T$ - частота дискретизации.

7. Нули zo_1, zo_2 функции $H(z)$ находятся как корни уравнения: $b_0 z^2 + b_1 z + b_2 = 0$. Полюса zp_1, zp_2 функции $H(z)$ находятся как корни уравнения: $z^2 - a_1 z - a_2 = 0$. ЦФ устойчив, если выполняются условия: модули $|zp_1|$ и $|zp_2|$ меньше единицы.

СОДЕРЖАНИЕ

стр.