**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ**

**Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение высшего профессионального образования**

**МОСКОВСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ СВЯЗИ И ИНФОРМАТИКИ**

Кафедра общей теории связи

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 26 WXP

# АНАЛИЗ И ЭМПИРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

Москва 2007

План УМД на 2007/2008 уч. г.

Лабораторная работа № 26 WXP

**АНАЛИЗ И ЭМПИРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ**

Составители: В.Н. Молчанов, ст. преподаватель,
В.Г. Санников, к.т.н., профессор

Отв. редактор к.т.н., профессор В.Г. Санников

Рецензент: Н.М. Наумов, к.т.н., доцент

Рассмотрено и одобрено на заседании кафедры ТЭС 15.03.2007 г., протокол № 7

Зав. кафедрой А.С. Аджемов

Издание утверждено Советом ОТФ-2 11.04.2007 г., протокол № 8

Председатель Совета В.Н. Шакин

**СОДЕРЖАНИЕ**

## ВВЕДЕНИЕ. О работе с компьютерной программой Lr26WXP

Программа создана в среде объектно-ориентированного программирования Delphi 7 с использованием системных средств Windows XP, поэтому может работать только на современных ПК с операционной системой Windows XP.

Имя исполняемого файла - **Lr26WXP(_HTML).exe**.

Программа открывается заставкой с полем ввода сведений о пользователе (пользователях): количество пользователей, фамилии, номер группы. Далее Вы видите **главную форму** программы, которая заслонена окном с инструкцией по работе с программой. Изучив инструкцию, Вы можете закрыть это окно, и Вам будет доступна **главная форма**, изображенная на рис. 1.

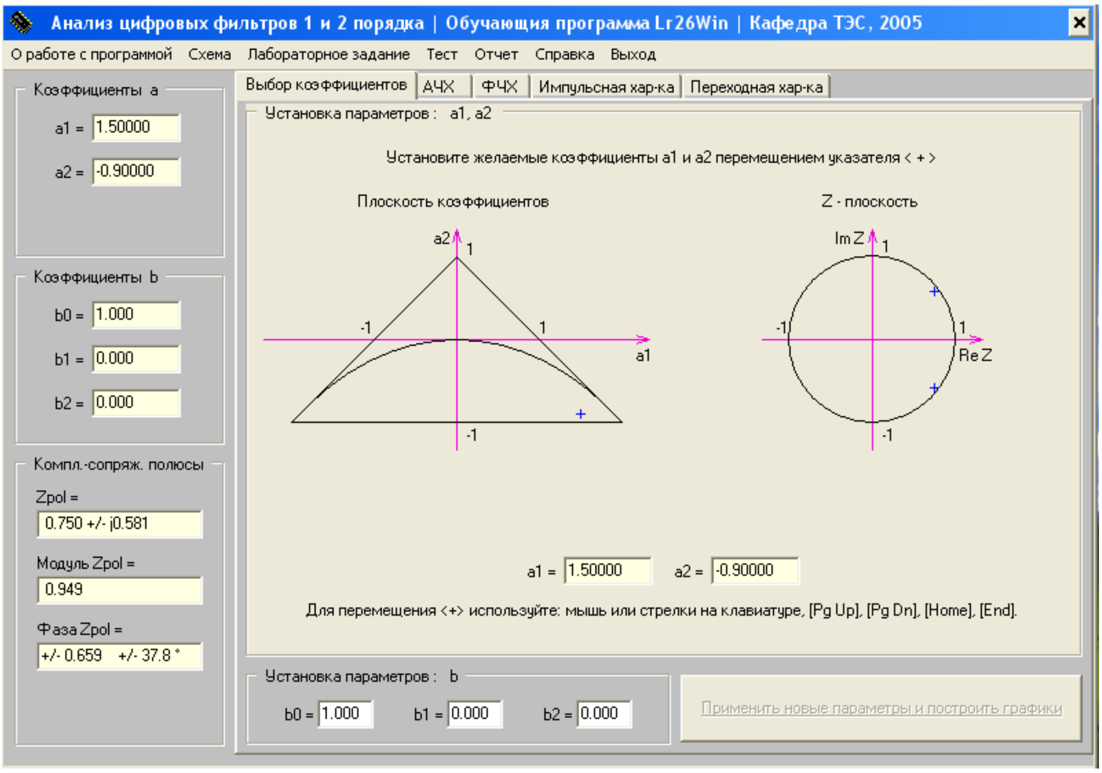


**Рис. 1**. Главная форма программы

**Главная форма** включает в себя:

Доступные опции (*в верхней строке основного меню*):

- О работе с программой;
- Схема (каноническая структурная схема исследуемого ЦФ);
- Лабораторное задание;
- Тест;
- Отчет (формируется – при введении преподавателем пароля – отчет о текущем объеме выполнения работы);
- Справка – содержит подробную справку в формате HTML о выполняемой работе, включающую краткие теоретические сведения и ряд важных примеров с решениями, и раздел «О программе…» {*содержит сведения о разработчиках программы*};
- Выход.

Исходные данные и сведения о полюсах системной функции ЦФ **H(z)** (*в левых полях главной формы с бледно-желтым фоном – эти данные обновляются при применении новых параметров*):

- Коэффициенты рекурсивной части ЦФ **a1** и **a2**;
- Коэффициенты нерекурсивной части ЦФ **b0, b1** и **b2**;
- Наличие, вид и значения полюсов H(z); при наличии комплексно-сопряженных полюсов их значения представлены как в алгебраической, так и в показательной форме.

Пять графических страниц, отображающих все этапы выполнения задания, причем четыре следующие страницы становятся доступными после нажатия клавиши «Применить новые параметры и построить графики». Первая страница служит для **графической установки** коэффициентов рекурсивной части ЦФ **a1** и **a2** и прямой численной установки коэффициентов **b0**, **b1** и **b2**. **Установка коэффициентов a1 и a2** производится путем перемещения указателя + на плоскости (см. рис. 2) коэффициентов (a1, a2) . Нажатие левой кнопки мыши (при положении указателя мыши внутри треугольной области устойчивости рекурсивного ЦФ) переводит указатель + в местоположение указателя мыши; для установки более точного значения коэффициентов следует пользоваться стрелками клавиатуры. Справа от плоскости коэффициентов (a1, a2) на странице 1 расположена **Z-плоскость** (плоскость комплексного аргумента *z*). Полюсы передаточной функции H(z) автоматически рассчитываются и перемещаются на *Z*-плоскости в соответствии с изменениями коэффициентов (a1, a2). Численные текущие значения коэффициентов a1 и a2 высвечиваются в бледно-желтых полях ниже графиков вышеуказанных плоскостей.

**ВНИМАНИЕ!** НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ РЕДАКТИРОВАНИЕ ДАННЫХ В ПОЛЯХ С БЛЕДНО-ЖЕЛТЫМ ФОНОМ НЕВОЗМОЖНО (такие поля являются информационными).

**Установка коэффициентов b0**, **b1** и **b2** производится вводом желаемых численных значений в соответствующих полях (с белым фоном) с клавиатуры.

Клавиши «BkSp» (←) и «Delete» в этих полях не функционируют! (т.к. ввод осуществляется по специальной маске). Для редактирования значения в некоторой позиции достаточно в этой позиции ввести новое значение (пример: убрать знак «–» в значении коэффициента можно, введя в этой позиции знак «+»).

**После нажатия клавиши** «Применить новые параметры и построить графики» в левых информационных полях фиксируются установленные параметры ЦФ и становятся доступными 4 страницы с графиками амплитудно-частотной характеристики (АЧХ), фазо-частотной характеристики (ФЧХ), импульсной характеристики (ИХ) и переходной характеристики (ПХ) ЦФ при выбранных значениях его коэффициентов.

Строку статуса (*в нижней строке главной формы*), поясняющую назначение «горячих» клавиш, служащих для быстрого вызова отдельных опций.

Работа с программой функционально предельно проста. Все необходимые для выполнения работы и прохождения тестирования действия можно осуществить с помощью «мыши», причем нажимая в соответствующих полях только левую клавишу, и клавиатуры. При работе со справкой HTML используются стандартные средства Internet Explorer.

Работа включает в себя ознакомительные и информационные разделы, этап выполнения в соответствии с заданием и процедуру тестирования. Сведения об исполнителях, объеме выполнения лабораторного задания и результатах тестирования объединяются в отчете, защищенном от какого-либо редактирования.

Работу следует выполнять в следующем порядке:

1. Ознакомиться с разделом «О работе с программой»;

2. Ознакомиться с разделом «Схема», т.е. вывести на дисплей, перерисовать в отчет и уяснить роль элементов структурной схемы исследуемого ЦФ;

3. Ознакомиться с разделом «Лабораторное задание», содержащим подробное **лабораторное задание** и **требования к отчету** по выполненной работе;

*Следует иметь в виду, что в данном описании лабораторная работа разбита на три самостоятельных раздела и имеет три лабораторных задания.*

4. Выполнить лабораторное задание;

5. Выполнить **тест.** Тестирование проводится только на аудиторном занятии!

**ВНИМАНИЕ !!! Клавишу «Тест» следует нажимать только с разрешения преподавателя!** *При нажатии клавиши «Тест» открывается заставка теста, предоставляющая три возможности для продолжения: 1) «Начать тестирование»; 2) «Отказаться от тестирования», 3) возможность выхода из опции «Тест» (предполагая выполнить тест позднее) – для этого необходимо нажать иконку* ✕ *в правом верхнем углу окна теста.*

При входе в режим тестирования Вам необходимо ответить на все задания теста, однако *выход из режима программно заблокирован* паролем, который вводит приглашенный Вами к рабочему месту преподаватель. Любые попытки самостоятельно выйти из режима обречены на неудачу и приведут лишь к перезагрузке программы (с потерей всех ранее полученных результатов). При нажатии клавиши «*Отказаться от тестирования*» можно продолжить выполнять работу, однако вернуться к процедуре тестирования *уже невозможно*. Иными словами, работа позволяет проводить объемные экспериментальные исследования, но обращаться к процедуре тестирования можно только *один раз*.

К другим разделам основного меню можно обращаться сколько угодно раз, в том числе к справке HTML.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 26 – 1

### 1.1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

На персональном компьютере провести анализ ***нерекурсивных*** (трансверсальных) цифровых фильтров (ЦФ) 1-го и 2-го порядка; исследовать частотные и временные характеристики фильтров, а также их взаимосвязь со значениями коэффициентов (параметров) ЦФ.

### 1.2. ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. Изучить теорию нерекурсивных ЦФ по приведенной литературе и приложению к лабораторной работе.
2. Для данных из таблицы 1 записать разностное уравнение и системную функцию нерекурсивного ЦФ 1-го порядка.
3. Изобразить структурную схему ЦФ.
4. Рассчитать и построить импульсную реакцию и амплитудно-частотную характеристику ЦФ (Взять 20 значений частот в диапазоне 0 - 8 кГц).

Таблица 1. Исходные данные для расчетов: a1= a2 = b2 = 0, b0 = 1.

| № варианта | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Параметр: b1 | 0,6 | -0,6 | 0,5 | -0,5 | 0,4 | -0,4 | 0,3 | -0,3 | 0,7 | -0,7 | 0,8 | -0,8 |

### 1.3. ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАДАНИЕ

**Указание: установить коэффициент b0 = 1 (*и не изменять его во всех экспериментах*).**

Произвести анализ временных и частотных характеристик нерекурсивных ЦФ 1-го и 2-го порядка (для этого следует установить **a1 = 0, a2 = 0**) при следующих значениях коэффициентов:

а) для фильтра первого порядка:

- b0 = 1, **b1 = 1, b2 = 0**;
- b0 = 1, **b1 = -1, b2 = 0**;

б) для фильтра второго порядка:

- b0 = 1, **b1 = 1, b2 = 1** (*однородный фильтр*);
- b0 = 1, **b1 = 0.3 ... 0.5, b2 = - 0.2 ... - 0.4**

(*выбрать по одному значению в заданных пределах*);

- b0 = 1, **b1 = -1, b2 = 1;**
- b0 = 1, **b1 = -2, b2 = 1;**
- b0 = 1, **b1 = 1, b2 = -2.**

Обратить внимание на зависимость АЧХ, ФЧХ и ИХ ЦФ от значений коэффициентов b1, b2. Определить, к какому типу (ФНЧ, ФВЧ и т.д.) принадлежат исследованные ЦФ. Сделать соответствующие выводы.

## 1.4. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА ПО РАБОТЕ

Отчет должен содержать:

- сведения об исполнителе, дату и время выполнения работы;
- наименование и цель работы;
- исходные данные и результаты выполнения домашнего задания 1.2;
- структурную схему нерекурсивного ЦФ 2-го порядка;
- наборы численных значений коэффициентов ЦФ, при которых проводился анализ характеристик;
- графики характеристик, снятых в соответствии с лабораторным заданием 1.3;
- детальные выводы по проделанной работе.

## 1.5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Запишите выражение для прямого Z-преобразования.
2. Чему равно Z-преобразование единичного импульса?
3. Как называется отклик ЦФ на воздействие в виде единичного импульса?
4. Поясните свойства Z-преобразования.
5. Как определяется порядок ЦФ?
6. При каком воздействии отклик ЦФ называется переходной функцией?
7. Коэффициенты разностного уравнения ЦФ равны $b0=1$, $b1=0.5$. Чему равно численное значение импульсной реакции при $n=0$?
8. Параметры фильтра $b0=1$, $b1=0.5$, $b2=0.8$. Введите численное значение переходной функции при $n = 1$.
9. Требуется ли проверять на устойчивость нерекурсивный ЦФ?
10. На нерекурсивный ЦФ 2 порядка с коэффициентами $b0=b1=b2=1$ действует сигнал, состоящий из трех временных отсчетов: $x(0)=x(1)=x(2)=1$. Каково значение отсчета отклика фильтра $y(2)$?
11. Как называется ЦФ, если все коэффициенты разностного уравнения $ai = 0$?
12. Как определяется системная функция ЦФ?
13. На нерекурсивный ЦФ 2 порядка с коэффициентами $b0=b1=b2=1$ действует сигнал, состоящий из трех временных отсчетов $x(0)=x(1)=x(2)=1$. Каково максимальное значение отклика фильтра $y(nT)$?
14. Осуществляет ли нерекурсивный ЦФ 1 порядка полосовую фильтрацию?
15. На нерекурсивный ЦФ 2 порядка с коэффициентами $b0=b1=b2=1$ действует сигнал, состоящий из трех временных отсчетов: $x(0)=x(1)=x(2)=1$. Сколько не нулевых отсчетов содержит отклик фильтра $y(nT)$?
16. Как называется модуль комплексного коэффициента передачи $K(jw)$ ЦФ?
17. Как называется отклик ЦФ на воздействие в виде единичной функции включения (скачка) $1(nT)$ ?
18. Запишите разностное уравнение нерекурсивного ЦФ.
19. Поясните, что такое дискретная свертка сигналов?
20. Нарисовать структурную схему нерекурсивного ЦФ 2-го порядка.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 26 – 2

## 2.1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

На персональном компьютере провести анализ ***рекурсивных*** цифровых фильтров (ЦФ) 1-го и 2-го порядка; исследовать частотные и временные характеристики фильтров, их взаимосвязь со значениями коэффициентов ЦФ; определить области устойчивости рекурсивных фильтров 1 и 2 порядка.

## 2.2. ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. Изучить теорию рекурсивных ЦФ по приведенной литературе и приложению к лабораторной работе.
2. Для данных из таблицы 2 записать разностное уравнение и системную функцию нерекурсивного ЦФ 1-го порядка.
3. Изобразить структурную схему ЦФ.
4. Рассчитать и построить по 20 точкам импульсную реакцию и амплитудно-частотную характеристики. Частота дискретизации - 8 кГц.

Таблица 2. Исходные данные для расчетов: b1= b2 = a2 = 0, b0 = 1.

| № варианта | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Параметр: а**1** | 0,6 | -0,6 | 0,5 | -0,5 | 0,4 | -0,4 | 0,9 | -0,9 | 0,7 | -0,7 | 0,8 | -0,8 |

## 2.3. ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАДАНИЕ

Произвести анализ АЧХ, ФЧХ, импульсных (ИХ) и переходных характеристик (ПХ) и устойчивости рекурсивных ЦФ 1-го и 2-го порядка (для этого следует установить: b0 = 1, **b1 = 0, b2 = 0).**

**Указание:** *записывать в отчет значения полюсов системной функции* **H(z).**

а) При анализе рекурсивного ЦФ 1-го порядка следует установить **a2=0**.

- Определить область устойчивости рекурсивного ЦФ 1 порядка на плоскости коэффициентов (a1, a2) и на Z – плоскости; для этого исследовать все характеристики ЦФ при шести значениях a1: **a1=±1, a1=±1+da1, ±1-da1**, где **da1** - *отклонение значения коэффициента* **a1** *от* **±1** вправо и влево на 1 пиксель (*достигается однократным нажатием клавиш с горизонтальными стрелками*);
- Зарисовать АЧХ, ФЧХ, ИХ и ПХ при a1 = ± 0.9 и a1 = ± 0.7;
- Сделать соответствующие выводы.

б) При анализе рекурсивного ЦФ 2 порядка коэффициенты a1 ≠ 0, a2 ≠ 0.

- Исследовать взаимосвязь коэффициентов a1 и a2 и местоположения полюсов рекурсивного ЦФ. Обратить внимание, что модуль полюса не зависит от значения коэффициента a1 в области треугольника устойчивости, лежащей ниже параболы, а аргумент положительного полюса возрастает при уменьшении a1 (подтвердить этот вывод 3 – 4 экспериментами);

- Зарисовать АЧХ, ФЧХ, ИХ и ПХ для 6-ти положений указателя <+> на плоскости коэффициентов внутри треугольника устойчивости (следовать приведенному рисунку (Рис.1) и указаниям преподавателя);
- Сделать соответствующие выводы.

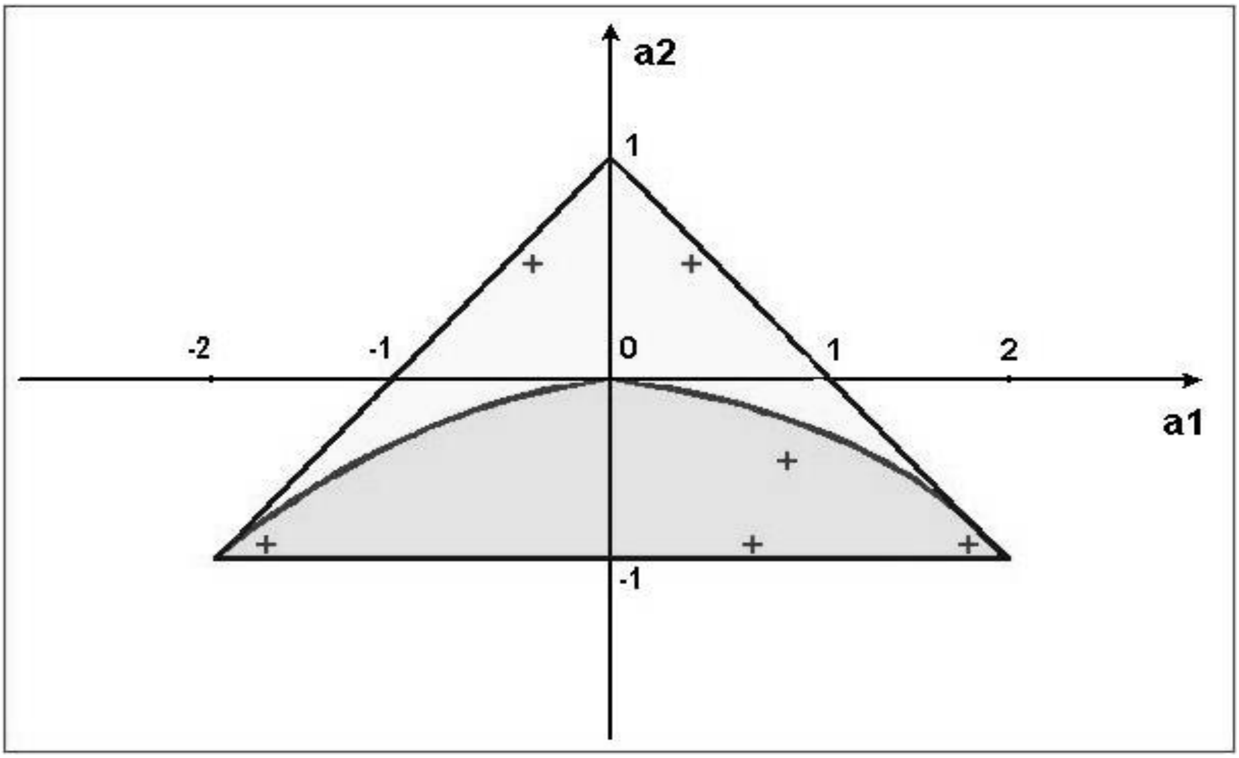


**Рис.2**. Рекомендуемые сочетания коэффициентов (a1, a2) при анализе характеристик рекурсивного ЦФ 2 порядка.

## 2.4. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА ПО РАБОТЕ

Отчет должен содержать:

- сведения об исполнителе, дату и время выполнения работы;
- наименование и цель работы;
- исходные данные и результаты выполнения домашнего задания 2.2;
- структурную схему рекурсивного ЦФ 2-го порядка;
- наборы численных значений коэффициентов ЦФ, при которых проводился анализ характеристик, наличие и значения полюсов системной функции;
- графики характеристик, снятых в соответствии с лабораторным заданием 2.3;
- детальные выводы по проделанной работе.

## 2.5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какой цифровой фильтр называется рекурсивным?
2. Как определяется порядок цифрового фильтра?
3. Все коэффициенты разностного уравнения ЦФ равны нулю за исключением a1, a3, b0. Каков порядок фильтра?
4. Что называют импульсной реакцией цифрового фильтра?
5. Коэффициенты разностного уравнения равны a1 = 0.5, a2 = - 0.8, b0 = 1. Введите численное значение импульсной реакции при n=0.
6. Параметры фильтра a1 = - 0.6, a2 = - 0.6, b0 = 1. Устойчив ли фильтр с такими параметрами?
7. Параметры фильтра a1 = 0.8, a2 = - 0.9, b0 = 1. Введите численное значение переходной функции при n = 1.
8. Запишите в виде численного ответа Z-преобразование функции: x(kT) = 1 при k = 0, x(kT) = 0 при любых других k.
9. Параметры фильтра a1 = 0.6, a2 = 0.6, b0 = 1. Устойчив ли фильтр с такими параметрами?
10. Параметры фильтра a1 = 1.5, a2 = - 0.8, b0 = 1. Устойчив ли фильтр с такими параметрами?
11. Как называется ЦФ, если хотя бы один из коэффициентов ai разностного уравнения не равен 0?
12. Как определяется системная функция цифрового фильтра?
13. Осуществляет ли рекурсивный ЦФ 1 порядка полосовую фильтрацию?
14. Как называется модуль комплексного коэффициента передачи K(jw) ЦФ?
15. Как называется аргумент комплексного коэффициента передачи K(jw) ЦФ?
16. Как называется отклик ЦФ на воздействие в виде дискретной функции включения 1(nT) ?
17. Запишите разностное уравнение рекурсивного ЦФ.
18. Изобразите каноническую схему ЦФ 2-го порядка.
19. Чем отличается каноническая схема ЦФ от схемы прямой реализации?
20. Как определяются полюса системной функции ЦФ?
21. В какой области плоскости Z должны находиться полюса для обеспечения устойчивости ЦФ?
22. В какой области плоскости ($a_2$, $a_1$) должны находиться коэффициенты рекурсивного ЦФ для обеспечения его устойчивости?
23. Как будет изменяться АЧХ ЦФ при изменении интервала дискретизации?

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 26 – 3

## 3.1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

На персональном компьютере провести анализ *нерекурсивных* и *рекурсивных* цифровых фильтров (ЦФ) 1-го и 2-го порядка; провести эпмирический синтез ЦФ для типовых прототипов (ФНЧ, ФВЧ и др.) в рамках полного ЦФ второго порядка.

## 3.2. ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

Цифровой фильтр 2-го порядка задан своими параметрами (таблица 3):

Таблица 3. Исходные данные для расчетов

| № варианта | Коэффициенты числителя системной функции ЦФ | | | Коэффициенты знаменателя системной функции ЦФ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $b_0$ | $b_1$ | $b_2$ | $a_1$ | $a_2$ |
| **1** | **0,4** | **0,5** | **0,1** | **0,2** | **0,7** |
| **2** | **0,5** | **3,0** | **0,1** | **-0,8** | **-0,9** |
| **3** | **0,6** | **1,7** | **0,1** | **-0,2** | **0,7** |
| **4** | **0,7** | **1,5** | **0,1** | **0,8** | **-0,9** |
| **5** | **0,8** | **2,9** | **0,1** | **0,3** | **0,5** |
| **6** | **0,9** | **2,8** | **0,1** | **-1,1** | **-0,8** |
| **7** | **1,0** | **2,7** | **0,1** | **-0,3** | **0,5** |
| **8** | **1,1** | **2,6** | **0,1** | **1,1** | **-0,8** |
| **9** | **1,2** | **2,5** | **0,1** | **0,4** | **0,4** |
| **10** | **1,3** | **2,4** | **0,1** | **-0,7** | **-0,7** |
| **11** | **1,4** | **2,3** | **0,12** | **-0,4** | **0,4** |
| **12** | **1,5** | **2,2** | **0,12** | **0,7** | **-0,7** |
| **13** | **1,6** | **2,1** | **0,12** | **0,5** | **0,3** |
| **14** | **1,7** | **2,0** | **0,12** | **-1,0** | **-0,6** |
| **15** | **1,8** | **1,9** | **0,12** | **-0,5** | **0,3** |
| **16** | **1,9** | **1,3** | **0,12** | **1,0** | **-0,6** |
| **17** | **2,0** | **1,8** | **0,12** | **0,1** | **0,6** |
| **18** | **2,1** | **1,7** | **0,12** | **-0,5** | **-0,5** |
| **19** | **2,2** | **1,6** | **0,12** | **-0,1** | **0,6** |
| **20** | **2,3** | **1,5** | **0,12** | **0,5** | **-0,5** |

**Требуется:**

1. Записать разностное уравнение ЦФ.
2. Изобразить структурную каноническую схему ЦФ.
3. Рассчитать 20 значений импульсной реакции ЦФ и построить в масштабе её временную диаграмму.
4. Записать выражение для системной функции ЦФ и получить аналитическое выражение для его амплитудно-частотной характеристики (АЧХ).
5. Рассчитать 20 значений АЧХ ЦФ для дискретных значений частот $f_i = i/19\Delta t$,где $i$ = 0,1,2,...,19, $\Delta t$ = 125 мкс – интервал ( $f_{ä} = 1/\Delta t = 8$ кГц - частота) дискретизации. Построить в масштабе график АЧХ .
6. Рассчитать нули и полюса системной функции ЦФ. Определить, является ли данный ЦФ устойчивым ?

## 3.3. ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАДАНИЕ

Произвести анализ и осуществить эмпирический синтез полного ЦФ 2-го порядка. Исследовать частотные и временные характеристики ЦФ при ненулевых значениях его коэффициентов. Цель данных исследований - эмпирически (опытным путем) синтезировать несколько разновидностей типовых фильтров (ФНЧ и ФВЧ), беря за основу фильтры-прототипы с максимально плоской АЧХ (Баттерворта) и фильтры с чебышевской АЧХ.

**Указание: установить b0=1 и в дальнейшем не менять.**

Исследования рекомендуется проводить поэтапно.

**Этап1. Установить a1=0, a2=0.**

Зарисовать АЧХ, ФЧХ, ИХ и ПХ нерекурсивных ЦФ 2-го порядка для следующих значений коэффициентов **b1** и **b2**:

| **Вариант** | **1** (ФНЧ) | **2** (ФВЧ) |
|---|---|---|
| **b1** | **2.0** | **- 2.0** |
| **b2** | **1.0** | **1.0** |

**Этап 2. Установить b0=1; b1=0; b2=0.**

Зарисовать АЧХ, ФЧХ, ИХ и ПХ рекурсивного ЦФ 2-го порядка для следующих значений коэффициентов **a1** и **a2**:

| **Вариант** | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|
| **a1** | **0.35** | **0.8** | **1.1** | **1.3** |
| **a2** | **-0.2** | **-0.3** | **-0.4** | **-0.5** |

Значения коэффициентов устанавливаются графически путем перемещения указателя «+» на плоскости коэффициентов (a1, a2).

**Этап 3. Исследование АЧХ полных ЦФ.**

*АЧХ полного ЦФ определяется как произведение АЧХ нерекурсивного и рекурсивного ЦФ.*

*ФЧХ полного ЦФ определяется как сумма ФЧХ нерекурсивного и рекурсивного ЦФ.*

**Замечание**: при заданных выше значениях коэффициентов реализуются ЦФ с *максимально-плоскими* АЧХ.

**3.1.** Зарисовать АЧХ, ФЧХ, ИХ и ПХ ЦФ *нижних частот* (ЦФНЧ) для следующих сочетаний коэффициентов **b1, b2, a1, a2**: 1 варианта коэффициентов **b1, b2** и вариантов 1, 2, 3 и 4 коэффициентов **a1, a2;**

**3.2.** Зарисовать АЧХ, ФЧХ, ИХ и ПХ ЦФ *верхних частот* (ЦФВЧ) для следующих сочетаний коэффициентов **b1, b2, a1, a2**: 2 варианта коэффициентов **b1, b2** и вариантов 1, 2, 3 и 4 коэффициентов **a1, a2;**

**3.3.** Самостоятельно эмпирически подобрать коэффициенты **b1, b2, a1, a2** (по 2 варианта ЦФНЧ и ЦФВЧ) для формирования АЧХ ЦФ несколько другого характера, пользуясь изложенной выше поэтапной методикой. Для скорейшего достижения положительного результата следует использовать данные, полученные ранее.

## 3.4. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА ПО РАБОТЕ

Отчет должен содержать:

- сведения об исполнителе, дату и время выполнения работы;
- наименование и цель работы;
- исходные данные и результаты выполнения домашнего задания 3.2;
- структурную каноническую схему полного ЦФ 2-го порядка;
- наборы численных значений коэффициентов ЦФ, при которых проводился анализ характеристик, наличие и значения полюсов системной функции;
- графики характеристик, снятых в соответствии с лабораторным заданием 3.3;
- детальные выводы по проделанной работе.

## ПРИМЕРЫ ВОПРОСОВ ДЛЯ ТЕСТИРОВАНИЯ

1. Отклик ЦФ на воздействие в виде единичного импульса называется: * импульсной реакцией; * переходной характеристикой
2. Какой из ЦФ является фильтром второго порядка?
3. Линейный цифровой фильтр средствами вычислительной техники выполняет операцию: * модуляции; * детектирования; фильтрации.
4. Все коэффициенты разностного уравнения цифрового фильтра равны нулю за исключением a1, a3, b0, b1 и b2. Каков порядок фильтра? *1; *2; *3; *4.
5. Какой из ЦФ является фильтром второго порядка? * $b_0$=1, $b_{i>0}$=0, $a_1$ и $a_2$ не равны нулю, $a_{i>0}$=0; * $b_0$ … $b_3$ не равны нулю, все $a_i$ =0; * $b_0$=1, $b_{i>0}$=0, $a_1$… $a_3$ не равны нулю, $a_{i>3}$=0.
6. АЧХ параллельно соединенных ЦФ, является: * суммой АЧХ отдельных ЦФ; * вычисляется иным способом; * произведением АЧХ отдельных ЦФ.
7. Импульсной характеристикой g(n) цифрового фильтра называется отклик ЦФ на: * последовательность единичных импульсов; * единичный импульс; * воздействие произвольной формы.
8. Коэффициенты разностного уравнения равны a1=0.5, a2= - 0.8, b0=1, b1=0.5. Введите численное значение импульсной реакции g(nT) при n=0.
9. Совпадают ли масштабы по частоте у АЧХ ЦФ и их аналоговых прототипов? * да, совпадают; * нет, не совпадают; * частотные масштабы взаимно не связаны.

10. Системная функция (СФ) параллельно соединенных ЦФ является: * произведением СФ отдельных ЦФ; * суммой СФ отдельных ЦФ; * вычисляется иным способом.
11. Параметры фильтра a1 = - 0.6, a2 = - 0.6, b0 = 1, b1 = 1, b2 = 1. Устойчив ли фильтр с такими параметрами? * да, устойчив; * нет, не устойчив.
12. Линейный цифровой фильтр описывается: * разностным уравнением; * дифференциальным уравнением; * алгебраическим выражением.
13. Параметры фильтра a1 = 0.8, a2 = - 0.9, b0 = 1, b1 = 0.5, b2 = 0.8. Введите численное значение переходной функции h(nT) при n = 1.
14. Запишите в виде численного ответа Z-преобразование функции: x(kT) = 1 при k = 0, x(kT) = 0 при любых других k.
15. Параметры фильтра a1 = 0.6, a2 = 0.6, b = 1, b1 = 1, b2 = -1. Устойчив ли фильтр с такими параметрами? * да, устойчив; * нет, не устойчив.
16. Требуется ли проверять на устойчивость нерекурсивный ЦФ?
17. Параметры фильтра a1 = 1.5, a2 = - 0.8, b = 1, b1 = 2, b2 = -1. Устойчив ли фильтр с такими параметрами? * да, устойчив; * нет, не устойчив.
18. Все коэффициенты разностного уравнения цифрового фильтра равны нулю за исключением b0, b1 и a1. Каков порядок фильтра?
19. На нерекурсивный ЦФ 2 порядка с коэффициентами b0=b1=b2= 1 действует сигнал, состоящий из трех временных отсчетов: x(0)=x(1)=x(2)=1. Каково значение отсчета отклика фильтра y(2)?
20. Если все коэффициенты разностного уравнения ai = 0, то ЦФ называется: * нерекурсивным; * рекурсивным.
21. Системной функцией цифрового фильтра называется отношение: * $Y(j\omega)/X(j\omega)$; * $Y(z)/X(z)$;* $y(nT)/x(nT)$.
22. На нерекурсивный ЦФ 2 порядка с коэффициентами b0=b1=b2=1 действует сигнал, состоящий из трех временных отсчетов: x(0)=x(1)=x(2)=1. Каково максимальное значение отклика фильтра y(nT)?
23. Параметры фильтра a1=0.96, a2=0, b0=1, b1=2, b2=3. Устойчив ли фильтр с такими параметрами?
24. Системная функция (СФ) последовательно соединенных ЦФ является: * произведением СФ отдельных ЦФ; * суммой СФ отдельных ЦФ; * вычисляется иным способом.
25. Осуществляет ли ЦФ 1 порядка полосовую фильтрацию?
26. АЧХ последовательно соединенных ЦФ является: * суммой АЧХ отдельных ЦФ; * вычисляется иным способом; * произведением АЧХ отдельных ЦФ.
27. На нерекурсивный однородный ЦФ 2 порядка с коффициентами b0 = b1 = b2 = 1 действует дискретный сигнал, состоящий из трех временных отсчетов: x(0) = x(1) = x(2) = 1. Сколько не нулевых отсчетов содержит отклик фильтра y(nT)?
28. Какова задача синтеза линейного цифрового фильтра? * определить АЧХ и ФЧХ ЦФ; * определить структуру ЦФ, обеспечивающую требуемый отклик; * определить отклик ЦФ по известной структуре ЦФ.
29. Модуль комплексного коэффициента передачи K(jw) ЦФ называется: * ФЧХ; * АЧХ; * системной функцией ЦФ.

30. Задан график АЧХ цифрового фильтра. Этот график является (выберите ответ): * непрерывной периодической нечетной функцией частоты; * непрерывной периодической четной функцией частоты; * дискретной периодической четной функцией частоты; * непрерывной непериодической четной функцией частоты;
31. Параметры фильтра $a1 = - 0.6$, $a2 = 0.8$, $b = 1$, $b1 = - 1$, $b2 = 1$. Устойчив ли фильтр с такими параметрами?
32. Отклик ЦФ на воздействие в виде дискретной функции включения $1(nT)$ называется: * импульсной реакцией; * переходной функцией.
33. Параметры фильтра $a1 = 1.6$, $a2 = 0.2$, $b = 1$, $b1 = -2$, $b2 = 1$. Устойчив ли фильтр с такими параметрами?
34. Если какой-либо коэффициент разностного уравнения $ai$ не равен 0, то ЦФ является: * нерекурсивным; * рекурсивным.
35. ФЧХ последовательно соединенных ЦФ является: * суммой ФЧХ отдельных ЦФ; * произведением ФЧХ отдельных ЦФ; * вычисляется иным способом.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

### Основная


1. Л.М. Гольденберг, Б.Д. Матюшкин, М.Н. Поляк. Цифровая обработка сигналов: Учеб. пособие для вузов.-2-изд.,перераб. и доп.-М.: Радио и связь, 1990.
2. А.С. Карташкин. Линейные цифровые фильтры. Вопросы и задачи: Учеб пособие для вузов. –М.: Радио и связь, 1995.
3. В.Н. Молчанов, Н.М. Наумов, В.Г.Санников. Цифровая обработка сигналов: Учеб. пособие: Под редакцией В.Г. Санникова. - М.: МТУСИ, 2000.


### Дополнительная


4. И.С. Гоноровский. Радиотехнические цепи и сигналы:Учебник для вузов.-М.: Радио и связь, 1986.
5. С.И. Баскаков. Радиотехнические цепи и сигналы:Учебник для вузов.- М.: Высш. шк., 1988.
6. Радиотехнические цепи и сигналы. Примеры и задачи:Учеб. пособие для вузов/ под ред.И.С.Гоноровского.- М.: Радио и связь, 1989.
7. В.Г. Санников. Сборник задач по курсу “Теория электрической связи”: Учеб. пособие -М.: МТУСИ, 1992.
8. З.С. Карамов, Г.И. Колесниченко. Цифровая обработка сигналов: Учеб. пособие.-М.:МИС, 1990. (Математическое описание цифровых сигналов и систем).

ПРИЛОЖЕНИЕ

## КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

**Классификация сигналов и устройств их обработки**. По виду представления аргумента и мгновенного значения сигнала $x(t)$ различают сигналы: *аналоговые* (*непрерывные*), изменяющиеся непрерывно как по времени, так и по значениям, т.е. $t \in T_x$, где $T_x$ - длительность сигнала, и $x \in D_x$, где $D_x$ - диапазон изменения сигнала; *аналого-дискретные* (*непрерывно-дискретные*), принимающие конечное или счетное число значений $x = x^l$, $l = 0,1,2,...,L_x$-1, в любой момент времени $t \in T_x$,, где $L_x$ - число дискретных уровней сигнала в диапазоне $D_x$; *дискретно-аналоговые* (*дискретно-непрерывные*), принимающие континуум значений, но изменяющие эти значения через равные или не равные интервалы времени $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, причем $x(t=t_i)=x_i$, $x_i \in D_x$, $t_i \in T_x$, $i = 0,1,2,..., N_x-1$, где $N_x$ - число дискретных отсчетов сигнала на длительности $T_x$; *цифровые* (*дискретно-дискретные*), принимающие конечное или счетное число значений в дискретные моменты времени, т.е. $x_ц(t)= x^l(t_i)= x^l_i$, $l = 0,1,2,...,L_x-1$, $i = 0,1,2,..., N_x-1$.

В зависимости от того, к какому множеству (дискретному или непрерывному) принадлежат сигналы на входе и выходе устройства обработки, различают *цифровые* и *аналоговые устройства обработки сигналов* (УОС). УОС цифровые по входу, но непрерывные по выходу, называют *цифро-аналоговыми*. УОС непрерывные по входу, но цифровые по выходу называют *аналого-цифровыми.* УОС, на входе и выходе которых наблюдаются дискретно-аналоговые сигналы часто также называют *дискретно-аналоговыми.*

Цифровая форма представления сигналов открывает огромные, практически ничем не ограниченные возможности при их цифровой обработке. *Цифровая обработка сигналов* (ЦОС) по сравнению с аналоговой приводит к значительному увеличению точности и помехоустойчивости представления сообщений и сигналов. Эти привлекательные стороны ЦОС с такими свойствами цифровых устройств, как стабильность, надежность, экономичность, легкость воспроизводства, простота реализации на больших интегральных схемах (БИС) привели к быстрому развитию методов ЦОС и к созданию быстродействующего, миниатюрного оборудования. Отметим, что большинство преобразований над непрерывными сообщениями либо вообще не осуществимы, либо достигаются ценой сложных и громоздких инженерных решений. В то же время над сигналами, представленными в цифровой форме, эти же преобразования могут быть легко и просто реализованы при помощи микропроцессоров (МП) и микро ЭВМ. Применение ЭВМ и процессоров для ЦОС практически снимает так называемую проблему *физической реализуемости* преобразований, переводя её в плоскость чисто технических вопросов, касающихся вычислительной мощности применяемых МП и ЭВМ (в частности, быстродействия и объема памяти).

ЦОС включает как получение дискретно-аналогового и цифрового представления сигналов, так и теорию, расчет и применение цифровых алгоритмов для преобразования полученных цифровых данных. При этом специфической особенностью ЦОС является наличие ошибок квантования при преобразовании аналоговых сигналов в цифровые. Однако разработка 32-х разрядных матричных МП позволила существенно уменьшить влияние ошибок квантования на результаты обработки цифровых сигналов. Поэтому в линейной теории ЦОС появилась возможность вместо цифровых сигналов и устройств их обработки рассматривать дискретно-аналоговые сигналы и устройства их обработки без учета эффекта квантования. Такие устройства называют еще *дискретными линейными системами* (ДЛС).

**Дискретное представление непрерывных сигналов и *Z*-преобразование.**

Для точного представления непрерывного сигнала $x(t)$ на конечном интервале $T_x$ требуется знать его мгновенные значения во всех точках этого интервала, т.е. располагать континуумом отсчетов, отстоящих друг от друга на бесконечно малые интервалы. Вместе с тем в технике связи часто встречаются сигналы, обладающие таким свойством, что для точного или с заданной точностью представления достаточно знать их отсчеты лишь в точках, отстоящих друг от друга на конечный временной интервал $T<<T_x$, называемый интервалом дискретизации. Это характерно для сигналов, спектр которых ограничен по полосе частот, т.е. спектральная плотность амплитуд $S_x(j\omega)$ не содержит составляющих за пределами частот максимальной частоты $F_m$.

Примерами сигналов с ограниченным спектром являются речевые сигналы, сигналы звукового и телевизионного вещания и др. Действительно, для высококачественной передачи речи в телефонии необходимая полоса частот $F_m$ не превышает 5 кГц. Удовлетворительное качество речи обеспечивается при её передаче по стандартному телефонному ТЧ (тональной частоты) каналу в полосе частот от 0,3 до 3,4 кГц. При телевизионной передаче максимальная частота $F_m$ сигнала определяется числом различимых элементов изображения и не превышает 6 МГц.

В теории электрической связи под дискретизацией понимают преобразование непрерывной функции $x(t)$ в дискретно-непрерывную $x_d(t) = \{x_i = x(t_i)\}$, $i =...-1,0,+1,...$. При заданном интервале дискретизации $T$ на выходе идеального дискретизатора наблюдается периодическая (с периодом $T$) последовательность импульсов нулевой длительности со значениями $x(t_i)$ исходной функции в моменты времени $t_i = iT$. Математической моделью дискретизации служит преобразование в виде произведения двух функций: исходной непрерывной функции $x(t)$ и периодической импульсной последовательности $\delta_T(t)$

$$x_d(t) = x(t)\cdot\delta_T(t) = \sum_{i=-\infty}^{i=\infty} x(t_i)\cdot\delta(t-i\cdot T) = \sum_{i=-\infty}^{i=\infty} x_i\cdot\delta(t-i\cdot T), \qquad (1)$$

где $\delta(t\text{-}i\cdot T)$ – дельта-функции Дирака, заданные в моменты $t_i = i\cdot T$.

Фундаментальное значение для дискретного представления непрерывных сигналов и решения многих задач теории и техники связи имеет теорема В.А. Котельникова. Суть данной теоремы состоит в следующем: любая непрерывная функция $x(t)$ с ограниченным спектром может быть точно представлена последовательностью своих отсчетов $x_i = x(t_i{=}iT)$, $i =...-2,-1,0,+1,+2,...$, взятых в моменты времени $t_i$, отстоящие друг от друга на интервал времени $\Delta t = T <$

$1/2F_m$, где частота дискретизации $f_d = 1/T \geq 2F_m$. Теорема Котельникова служит теоретической основой импульсных (дискретно-аналоговых) и цифровых методов передачи непрерывных сигналов.

Строгое доказательство теоремы Котельникова можно найти в указанной литературе. Согласно выводам данной теоремы сигнал представляется в виде ортогонального ряда Котельникова, представляющего собой свертку во временной области последовательности отсчетов $\{x_i\}$ с функциями отсчетов $\{Sa(\psi_i)\}$ вида

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{i=\infty} x_i \cdot \frac{\sin \omega_m (t - i \cdot T)}{\omega_m (t - i \cdot T)} = \sum_{i=-\infty}^{i=\infty} x_i \cdot Sa[\omega_m (t - i \cdot T)] \, . \qquad (2)$$

Из данного соотношения следует, что безошибочное восстановление в любой момент времени $t$ сигнала $x(t)$ по его отсчетам $x_i$, $i$=...-1,0,+1,..., взятым в дискретные моменты, возможно только при выполнении следующих ограничений: 1) спектр сигнала строго ограничен верхней частотой $\omega_m = 2\pi F_m$; 2) в восстановлении сигнала участвует бесконечное (счетное) число отсчетов; 3) в качестве восстанавливающего устройства используется идеальный фильтр нижних частот (ИФНЧ) с импульсной реакцией $q(t) = Sa[\omega_m (t - i \cdot T)]$. В реальных условиях эти условия не выполняются и непрерывный сигнал восстанавливается в виде $x^*(t)$, т.е. с некоторой погрешностью $\varepsilon(t) = x^*(t) - x(t)$.

В цифровых системах передачи и обработки сигналов наряду с временной дискретизацией сигнал $x(t)$ подвергается квантованию по уровню и двоичному кодированию. В практических системах эти три операции осуществляются в блоке аналого-цифрового преобразования (АЦП). Откликом АЦП является сигнал импульсно-кодовой модуляции (ИКМ). После передачи или (и) обработки ИКМ сигнала для восстановления исходного сигнала $x(t)$ применяют обратное к АЦП преобразование, называемое цифро-аналоговым (ЦАП). В ЦАП двоичные (цифровые) кодовые комбинации сигнала ИКМ декодируются, в результате чего восстанавливается последовательность $\{x_i\}$, которая затем интерполируется и фильтруется в фильтре нижних частот (ФНЧ) с граничной частотой $F_m$ исходного сигнала. Следует иметь в виду, что восстановление исходного сигнала не является точным и связано с наличием погрешностей неидеальной дискретизации, нелинейного квантования, ошибок округления, ошибок передачи, обработки и др.

В курсе ЦОС вопросы передачи сигналов, как правило, не затрагиваются, а основное внимание уделяется методам цифровой фильтрации и цифрового спектрального анализа. Для решения такого круга задач разработаны компактные и быстродействующие 32-х разрядные МП, обладающие пренебрежимо малыми ошибками квантования. Поэтому, как указывалось во введении, в линейной теории ЦОС появилась возможность вместо цифровых сигналов и устройств их обработки рассматривать дискретные (точнее дискретно-аналоговые) сигналы и устройства. Заметим, что в теории ЦОС вместо термина *устройство* используют термин *система*, и говорят о дискретных сигналах и системах. Теория ЦОС или *линейная теория дискретных сигналов и систем* во многом схожа с теорией линейных аналоговых сигналов и систем. Это связано с тем, что дискретный сигнал (цифровой сигнал при малых ошибках квантования) при правильно выбранной частоте дискретизации несет в себе согласно теореме Котельникова всю или почти всю информацию об исходном непрерывном сигнале.

Практически каждому методу математического описания непрерывных сигналов соответствует свой аналог при математическом описании дискретных сигналов. Например, интегральному преобразованию Фурье для непрерывных сигналов соответствует дискретное преобразование Фурье (ДПФ) применительно к дискретным сигналам, а интегральному преобразованию Лапласа – Z - преобразование.

Z-преобразование является одним из математических методов, разработанных для анализа и проектирования дискретных сигналов и систем. Если преобразование Лапласа позволяет свести линейные дифференциальные уравнения, которыми описываются непрерывные системы - к алгебраическим, то Z-преобразование позволяет установить такое же соответствие между разностными и алгебраическими уравнениями для дискретных сигналов и систем. Это существенно упрощает анализ дискретных линейных систем с постоянными параметрами. Z-преобразование можно объяснить как эволюцию представления сигналов, заданных на бесконечном интервале наблюдения, от интеграла Фурье через преобразование Лапласа, что позволяет лучше понять различие между этими важнейшими направлениями теории сигналов.

Пусть задан непрерывный сигнал $x(t)$. Изображение этого сигнала $X(p)$ определяется посредством прямого преобразования Лапласа вида

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-pt} dt \,. \tag{3}$$

Найдем изображение дискретно-непрерывного сигнала $x_d(t)$. Для этого в соотношение (3) вместо $x(t)$ подставим $x_d(t)$, определяемого соотношением (1). Тогда, учитывая свойство перестановочности операций интегрирования и суммирования, а также фильтрующее свойство дельта-функции Дирака, получаем

$$X(p) = \int_0^{\infty} x_d(t) \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} x_i \cdot \delta(t - i \cdot T) \cdot e^{-pt} dt = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \cdot e^{-p \cdot i \cdot T} \,. \tag{4}$$

Вводя в (4) переменную $z = e^{pT}$, получаем следующее прямое Z-преобразование для последовательности $\{x_i\}$

$$X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \cdot z^{-i} \,. \tag{5}$$

Так же как преобразование Лапласа, Z-преобразование имеет прямое и обратное представления. Прямое Z-преобразование, обозначаемое $X(z)$, задается степенным рядом (5) от комплексной переменной $z^{-i}$, умноженной на дискретные отсчеты $x_i$, $i$=0,1,2,..., исходного сигнала, где комплексная переменная $z$ этого преобразования связана с комплексной переменной $p$ преобразования Лапласа соотношениями вида: $z = e^{pT}$, $p=\ln(z)/T$. Если прямое преобразование Лапласа $X(p)$

задается на комплексной $p$-плоскости ($p=c+j\omega$), то прямое Z-преобразование $X(z)$ задается на окружности в $z$-плоскости ($z=e^{cT}e^{j\omega T}$); эта окружность единичная при $c=0$. Если соблюдаются условия теоремы Котельникова, то кольцеобразный спектр последовательности $\{x_i\}$ в $z$-плоскости представляет собой спектр $X(e^{j\omega T})=S_{xT}(j\omega)/T$ исходного непрерывного сигнала $x(t)$, но уменьшенный в $T$ раз и изогнутый по единичной окружности. Из-за этого Z-преобразование особенно удобно применять в тех случаях, когда проектируются цифровые фильтры, моделирующие заданные аналоговые системы.

Обратное Z-преобразование имеет следующий вид

$$x_i = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)\cdot z^{i-1}dz\,; \tag{6}$$

оно позволяет по функции $X(z)$ найти дискретную последовательность $\{x_i\}$ с помощью определения контурного интеграла (6). Здесь $c$ – контур, расположенный в области сходимости $X(z)z^{i-1}$ и охватывающий начало координат в z-плоскости (часто используют единичный контур с $c=1$). Для дробно-рациональных функций $X(z)$ контурные интегралы удобно вычислять с помощью теоремы Коши о вычетах; последовательность $\{x_i\}$ определяется суммой вычетов подынтегральной функции в полюсах, расположенных в области, охватываемой контуром $c$:

$$x_i = \sum_{zp_k} \mathrm{Res}_{zp_k}[X(z)\cdot z^{i-1}], \tag{7}$$

причем вычет в *простом* полюсе $z = zp_k$ равен

$$\mathrm{Res}_{zp_k}[X(z)\cdot z^{i-1}] = \lim_{z\to zp_k}[(z-zp_k)\cdot X(z)\cdot z^{i-1}]. \tag{8}$$

Остановимся на некоторых важных свойствах Z-преобразования.

1) Линейность. Если $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ – числовые последовательности с известными Z-преобразованиями $X(z)$ и $Y(z)$, то последовательность $\{u_i = \alpha x_i + \beta y_i\}$ имеет Z-преобразование $U(z) = \alpha X(z) + \beta Y(z)$.

2) Z-преобразование смещенного сигнала. Пусть последовательность $\{y_i = x_{i-m}\}$ получена путем задержки последовательности $\{x_i\}$ на $m$ тактов дискретизации. Тогда при нулевых начальных условиях имеем: $Y(z) = z^{-m} X(z)$, $m = 1,2,\ldots$ При $m = 1$ символ $z^{-1}$ служит оператором единичной задержки (на один интервал дискретизации).

3) Z-преобразование свертки. Для последовательностей $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ свертка определяется следующим соотношением

$$f_i = \sum_{k=0}^{i} x_k\cdot y_{i-k} = \sum_{k=0}^{i} x_{i-k}\cdot y_k\,. \tag{9}$$

Если эти последовательности имеют Z-преобразования $X(z)$ и $Y(z)$, то свертке $\{f_i\}$ этих последовательностей отвечает произведение их Z-преобразований: $F(z) = X(z)\cdot Y(z)$.

4) Равенство Парсеваля. Данное равенство позволяет определить энергию $E_x$ дискретно-непрерывного сигнала как по его Z-изображению $X(z)$, так и по последовательности $\{x_i\}$.

$$E_x = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)\cdot X(z^{-1})\cdot z^{-1}dz = \sum_{i=0}^{\infty}(x_i)^2 . \qquad (10)$$

**Дискретные линейные системы и цифровые фильтры.** *Дискретная линейная система* (ДЛС) предназначена для реализации алгоритма преобразования с оператором $\Phi$ входной последовательности $\{x_i\}$ в требуемую выходную последовательность $\{y_i\}$, т.е. $\{y_i\}=\Phi\{x_i\}$. *Цифровой фильтр* (ЦФ), реализованный на цифровом сигнальном процессоре с большой разрядной сеткой, не содержащем нелинейных преобразований, как указывалось выше, приближается по своим свойствам к ДЛС. Поэтому часто понятия ДЛС и ЦФ отождествляют. Цифровой фильтр - это цифровая (с пренебрежимо малой ошибкой квантования) или дискретная система, предназначенная для выделения из входной последовательности её составляющих в той или иной области частот.

Для дискретных линейных систем (или ЦФ) так же, как и для непрерывных линейных систем (НЛС), справедлив *принцип суперпозиции*: отклик системы на сумму воздействий равен сумме откликов на каждое из воздействий. Если НЛС полностью можно описать линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, то ДЛС или ЦФ полностью описывается разностным уравнением с постоянными коэффициентами.

*Разностное уравнение* ЦФ записывается в виде

$$y_i = \sum_{l=1}^{L} a_l \cdot y_{i-l} + \sum_{m=0}^{M} b_m \cdot x_{i-m}\ ,\ i = 0,1,2,..., \qquad (11)$$

где $\{a_l\}$ и $\{b_m\}$ - совокупности коэффициентов ЦФ, $\{x_{i-m}\}$ и $\{y_{i-l}\}$ - задержанные (соответственно на $m$ и $l$ периодов дискретизации) копии входного и выходного сигналов ЦФ.

Решение разностного уравнения (2.11) ищут, как правило, при нулевых начальных условиях: $y_{-l} = x_{-m} = 0$, $l$ =1,2,...$L$, $m$ =1,2,...$M$.

ЦФ называют *рекурсивным*, если хотя бы один из коэффициентов $\{a_l\}$ отличен от нуля. Отклик такого фильтра зависит не только от входного воздействия, но и от задержанных копий отклика, что при реализации ЦФ приводит к появлению цепей обратной связи, существенно влияющих на устойчивость ЦФ.

ЦФ называют *нерекурсивным*, если все коэффициенты $\{a_l\}$ равны нулю. Здесь отклик ЦФ зависит только от значений входного воздействия.

По величине длительности временных характеристик ЦФ различают: КИХ-*фильтры* (фильтры с конечной импульсной характеристикой) и БИХ-*фильтры* (фильтры с бесконечной импульсной характеристикой). КИХ-фильтры могут быть только нерекурсивными, а БИХ-фильтры - как рекурсивными, так и нерекурсивными.

По величине $max(L,M)$ - максимуму из двух чисел, различают ЦФ *первого, второго* и любого другого *порядка*.

По виду АЧХ в полосе частот от 0 до $f_d = 1/T$ различают ЦФ *нижних частот, верхних частот и полосовые* (ФНЧ, ФВЧ и ПФ).

К основным характеристикам ЦФ относятся: *импульсная реакция, переходная функция, системная функция*. Последняя определяет *передаточную функцию* ЦФ и, связанные с ней, *амплитудно-частотную* (АЧХ) и *фазо-частотную* (ФЧХ) *характеристики*.

*Импульсной реакцией* $q_i$, $i = 0,1,2,...$, называется отклик ЦФ на входной единичный импульс: $x_0 = 1$ и $x_i = 0$, $i = ...,-1,+1,...$ ($i \neq 0$).

*Переходной функцией* $h_i$, $i = 0,1,2,...$, называется отклик ЦФ на входное воздействие в виде единичного скачка: $x_i = 1$, $i = 0,1,2,...$ ($i \geq 0$) и $x_i = 0$, $i = ...,-2,-1$ ($i < 0$). В силу принципа суперпозиции переходная функция определяется как сумма значений импульсной реакции до $i$-го момента включительно

$$h_i = \sum_{k=0}^{i} q_k \text{ , } i = 0,1,2,..., \tag{12}$$

*Системная функция* $H(z)$ ЦФ определяется отношением Z-преобразования отклика $Y(z)$ и Z-преобразования входного воздействия $X(z)$. Как известно, эти Z-изображения связаны прямым Z-преобразованием (1.5) с последовательностями $\{y_i\}$ и $\{x_i\}$. Следует отметить, что системная функция $H(z)$ и импульсная реакция ЦФ $\{q_i\}$ также связаны прямым и обратным Z-преобразованиями вида (5) и (6).

Применяя к правой и левой частям разностного уравнения (11) ЦФ прямое Z-преобразование и используя свойства последнего, получаем следующий вид его системной функции

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m \cdot z^{-m}}{1 - \sum_{l=1}^{L} a_l \cdot z^{-l}} = \frac{H_1(z)}{H_2(z)}. \tag{13}$$

Из этого выражения следует, что системная функция ЦФ - есть *дробно-рациональная* функция, числитель и знаменатель которой степенные полиномы комплексной переменной $z$. Причем корни числителя, определяемые из равенства $H_1(z) = 0$, называют *нулями* системной функции (обозначим их $zo_m$ , $m=1,2,...M$), а корни знаменателя, определяемые из $H_2(z) = 0$, называют *полюсами* передаточной функции (обозначим их $zp_l$ , $l=1,2,...L$).

Передаточная и системная функции ЦФ связаны равенством: $K_T(j\omega) = H(z=e^{j\omega T})$. При определении АЧХ и ФЧХ ЦФ его передаточную функцию (*комплексную частотную характеристику*) нужно представить в следующем виде: $K_T(j\omega) = K_T(\omega)\cdot e^{\,j\varphi(\omega)}$. Здесь $K_T(\omega)$ - модуль функции $K_T(j\omega)$ или АЧХ, а $\varphi_T(\omega)$ - аргумент функции $K_T(j\omega)$ или ФЧХ ЦФ. В этих функциях нижний значок $T$ показывает их зависимость от интервала дискретизации. Кроме того, эти функции периодичны с периодом в частотной области $f_d=1/T$.

При подстановке в (13) $z = e^{j\omega T} = \cos\omega T + j\sin\omega T$ АЧХ ЦФ ищется в виде

$$K_T(\omega) = \frac{\sqrt{[\mathrm{Re}\,H_1(\omega)]^2 + [\mathrm{Im}\,H_1(\omega)]^2}}{\sqrt{[\mathrm{Re}\,H_2(\omega)]^2 + [\mathrm{Im}\,H_2(\omega)]^2}}, \tag{14}$$

а, соответственно, ФЧХ в виде

$$\varphi_T(\omega) = arctg[\frac{\mathrm{Im}\,H_1(\omega)}{\mathrm{Re}\,H_1(\omega)}] - arctg[\frac{\mathrm{Im}\,H_2(\omega)}{\mathrm{Re}\,H_2(\omega)}]. \tag{15}$$

Здесь $\mathrm{Im}H(\omega)$ и $\mathrm{Re}H(\omega)$, соответственно мнимая и действительная части комплексной характеристики $H(\omega)$.

При решении задач цифровой фильтрации сигналов необходимо обеспечить устойчивый режим работы ЦФ. Если при ограниченном входном воздействии $| x_i | < K_x$, отклик ЦФ ограничен, т.е. $| y_i | < K_y$, $i = 0,1,2,...$, то ЦФ *устойчив*. Здесь $K_x$ и $K_y$ некоторые постоянные, ограничивающие диапазон изменения входной и выходной последовательностей ЦФ. ЦФ *неустойчив*, если при ограниченном воздействии его отклик неограниченно возрастает. *Условия устойчивости* ЦФ определяются значениями полюсов системной функции $H(z)$. Если модули этих полюсов меньше единицы (при $c$=1), то ЦФ - устойчив. Если хотя бы один их модулей полюсов ЦФ больше единицы, то он неустойчив. Геометрически ЦФ устойчив, если его полюсы в Z-плоскости охватываются единичной окружностью.

Важной задачей проектирования ЦФ является выбор метода его *программирования*. Под программированием ЦФ понимают способ его реализации в структурной схеме одного из четырех типов: прямой, канонической, параллельной и последовательной. *Прямым* программированием является реализация ЦФ непосредственно по виду его разностного уравнения (11). Однако этот путь приводит к избыточному числу, равному $L+M$, линий задержек в схеме ЦФ. Минимальное число, равное $max(L,M)$, линий задержек содержится в схеме ЦФ называемой *канонической*. Рассмотрим методику её получения.

В соотношении (13) введем вспомогательную функцию следующего вида:

$$U(z) = \frac{X(z)}{1 - \sum_{l=1}^{L} a_l \cdot z^{-l}}.$$

Откуда получаем следующее соотношение для $U(z)$

$$U(z) \cdot [1 - \sum_{l=1}^{L} a_l \cdot z^{-l}] = X(z) \rightarrow U(z) = \sum_{l=1}^{L} a_l \cdot z^{-l} \cdot U(z) + X(z). \tag{16}$$

Теперь, с учетом (13) и введенной функции $U(z)$, для изображения отклика ЦФ имеем

$$Y(z) = \sum_{m=0}^{M} b_m \cdot z^{-m} \cdot U(z). \qquad (17)$$

Применяя к (16) и (17) процедуру обратного Z-преобразования и используя свойства Z-преобразования, приходим к соотношениям для последовательностей $\{u_i\}$ и $\{y_i\}$:

$$u_i = \sum_{l=1}^{L} a_l \cdot u_{i-l} + x_i, \quad i = 0,1,2,..., \qquad (18)$$

$$y_i = \sum_{m=0}^{M} b_m \cdot u_{i-m}, \quad i = 0,1,2,..., \qquad (19)$$

Из данных соотношений следует, что отклик $\{y_i\}$ ЦФ связан с входным воздействием $\{x_i\}$ не непосредственно, а через вспомогательный сигнал $\{u_i\}$, который в теории сигналов называют сигналом в пространстве состояний ЦФ. Структурная схема ЦФ, соответствующая соотношениям (18) и (19) и называется канонической; она представлена на рис.1.

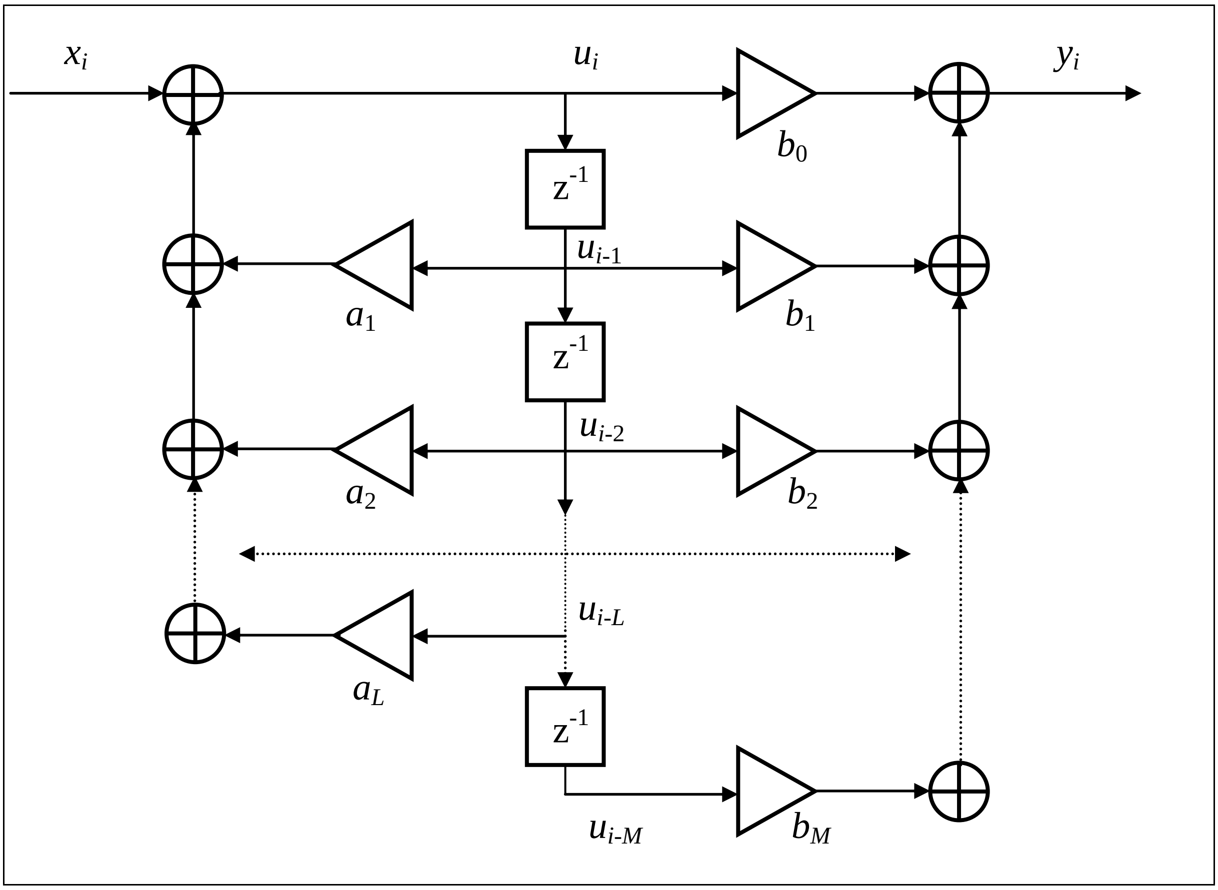


**Рис.3**. Каноническая схема цифрового фильтра

Метод канонической схемы применяется только для построения ЦФ первого и второго порядка, так как чувствительность в этом случае ЦФ к отклонению коэффициентов оказывается выше, чем при параллельном или последовательном способах реализации. *Параллельное* программирование связано с разложением передаточной функции ЦФ на простые дроби и представления её в виде суммы передаточных функций фильтров первого и второго порядка. Таким образом, передаточную функцию ЦФ можно рассматривать как Z-преобразование суммы выходных сигналов $\{y_{ni}\}$, образующихся на выходах систем с передаточными функциями $H_n(z)$, $n$=0,1,...$N$, при подаче на их входы сигнала $\{x_i\}$. *Последовательное* программирование связано с представлением передаточной функции ЦФ в виде произведения передаточных функций фильтров первого и второго порядка. При этом отклик ЦФ формируется на выходе системы из каскадного соединения указанных фильтров при заданном входном воздействии $\{x_i\}$ на входе первого звена этой системы.

Как видно в линейных цифровых фильтрах над переменными выполняются три основные процедуры: сложение (в сумматорах), умножение (в усилительных элементах) и сдвиг во времени (задержка с коэффициентом передачи $z^{-m}$) на $m$ периодов дискретизации.

Следует отметить, что ЦФ произвольного порядка можно реализовать в виде последовательных и параллельных соединений резонаторов (систем второго порядка) и систем первого порядка. Поскольку цифровым схемам присуще свойство хорошей развязки, то в случае реализации ЦФ на элементах цифровой микросхемотехники специальных мер по согласованию резонаторов не требуется. Это обстоятельство отличает проектирование ЦФ от проектирования непрерывных фильтров (НФ). НФ невозможно реализовать без тщательной развязки резонаторов, например, с помощью операционных усилителей.

Ранее мы предположили, что при высокой разрядной сетки цифрового вычислителя (ЦВ) ошибками, возникающими в процессе квантования дискретно-непрерывных сигналов, можно пренебречь. Часто, однако, из-за ограниченности разрядной сетки ЦВ внутри ЦФ возникают *шумы усечения* и *шумы округления*. Например, шум усечения из-за ограниченности разрядной сетки ЦВ появляется путем отбрасывания младших разрядов двоичного представления числа. Тогда двоичное число 0,01010011 (разрядность 8) после усечения до разрядности 3 принимает вид 0,010. Аналогично определяется и шум округления.

Шумы усечения и округления, обусловленные ограниченностью разрядной сетки ЦВ, вводятся аддитивным образом (см. рис.4)

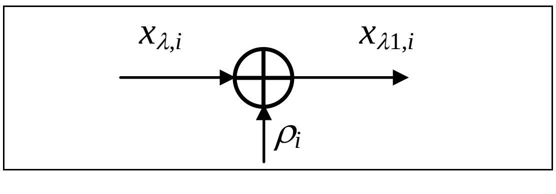


**Рис.4**. Модель учета ошибок усечения и ошибок округления

Здесь введены обозначения: $x_{\lambda1,i}$ – число с разрядностью $\lambda_1$ не усеченного двоичного числа; $x_{\lambda,i}$ - число с разрядностью $\lambda$ усеченного двоичного числа; $\rho_i$ – шум усечения.

Шумы квантования (округления и усечения), возникающие при переходе от дискретно-аналоговых сигналов к цифровым, вводятся аддитивным образом на входе ЦФ. Эти же шумы, обусловленные ограниченностью разрядной сетки ЦВ, вводятся аддитивным образом на выходе каждого умножителя внутри ЦФ. Дисперсия шумов округления и усечения, возникающих за счет ограниченности разрядной сетки ЦВ, снижается в два раза при добавлении каждого нового разряда.

**Анализ устойчивости рекурсивного ЦФ второго порядка**. Системная функция ЦФ 2 порядка (см. формулу 13) при умножении числителя и знаменателя на $z^2$ ($L=2, M=2$) принимает вид

$$H(z) = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 - a_1 z - a_2} \tag{20}$$

Числитель в (20) соответствует ограниченной по принимаемым значениям импульсной характеристике и не влияет на устойчивость. Устойчивость или неустойчивость ЦФ с системной функцией (20) определяется параметрами ее знаменателя. Полагая, для простоты рассуждений, $b_0=1,\ b_1=0,\ b_2=0$, получим рекурсивный ЦФ 2 порядка. Он описывается уравнением

$$y_i = a_1 y_{i-1} + a_2 y_{i-2} + x_i \qquad i \ge 0 \tag{21}$$

Импульсная характеристика, соответствующая уравнению (21), равна

$$g_i = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & i=0 & \\ a_1 & i=1, & g_{-1} = g_{-2} = 0 \\ a_1 g_{i-1} + a_2 g_{i-2} & i \ge 2 & \end{array} \right\} \tag{22}$$

Разностному уравнению (22) соответствует характеристическое уравнение

$$z^2 - a_1 z - a_2 = 0, \tag{23}$$

корни которого являются полюсами системной функции (20) и определяются так

$$Zp_{1,2} = 0.5\ (a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + 4a_2}\ ). \tag{24}$$

Общее решение уравнения (22) с учетом (24) ищется в виде

$$g_i = C_1 Zp_1^i + C_2 Zp_2^i \qquad i \ge 0, \tag{25}$$

где постоянные $C_1$ и $C_2$ определяются из начальных условий

$$g_0 = 1 = C_1 + C_2\ , \qquad g_{-1} = 0 = C_1 Zp_1^{-1} + C_2 Zp_2^{-1}\ , \tag{26}$$

и соответственно равны

$$C_1 = \frac{Zp_1}{Zp_1 - Zp_2} \qquad\qquad C_2 = -\frac{Zp_2}{Zp_1 - Zp_2} \tag{27}$$

Для устойчивого ЦФ при $i \to \infty$ импульсная характеристика должна стремится к нулю. При $|Zp_1| \neq |Zp_2|$ условие устойчивости ЦФ определяется очевидными неравенствами

$$|Zp_1| < 1, \qquad |Zp_2| < 1, \tag{28}$$

с учетом которых получаем требуемое $g_{\infty} = 0$.

Известно, что корни уравнения (4) связаны с коэффициентами $a_1$ и $a_2$ выражениями

$$Zp_1 * Zp_2 = -a_2 \tag{29}$$

$$Zp_1 + Zp_2 = a_1 \tag{30}$$

Из (29) следует, что $|-a_2| = |Zp_1|*|Zp_2|$, а учитывая (28), получаем следующее неравенство для $a_2$

$$-1 < a_2 < 1 \tag{31}$$

Подставляя $Zp_2 = -a_2 / Zp_1$ в (30), получаем $a_2 + a_1\,|Zp_1| = |Zp_1^2| < 1$, откуда следует еще два условия устойчивости рекурсивного ЦФ 2 порядка

$$a_2 + a_1 < 1, \qquad a_2 - a_1 < 1 \tag{32}$$

Условия (31) и (32) определяют треугольную область на плоскости коэффициентов ($a_1$, $a_2$); при выборе коэффициентов $a_1$, $a_2$ внутри этой области рекурсивный ЦФ 2 порядка устойчив.

Соотношения (28) говорят о том, что данный фильтр устойчив, если его полюсы находятся внутри единичной окружности на комплексной Z - плоскости.

Определим теперь характер изменения импульсной характеристики ЦФ в области его устойчивости. Для этого проанализируем выражение (25) при возможных значениях полюсов ЦФ (или коэффициентов $a_1$, $a_2$).

Отметим, что при $a_1^2 + 4a_2 = 0$ из (24) получаем *действительные и равные* полюсы: $Zp_1 = Zp_2 = a_1/2$. Этому условию на рис. 5 соответствует параболическая граница

$$a_2 = -(0.5 \cdot a_1)^2. \tag{33}$$

Если $a_1^2 + 4a_2 > 0$, то полюсы (24) действительные и разные. Этому случаю на плоскости коэффициентов соответствуют области над параболической границей, а на комплексной Z – плоскости – действительная ось ($-1 < \mathrm{Re}Z < 1$).

ИХ ЦФ при этом экспоненциально затухает, причем при положении коэффициентов в правой полуплоскости ( $a_1 > 0$ ) ИХ остается положительной, а в левой полуплоскости ( $a_1 < 0$ ) – является знакопеременной.

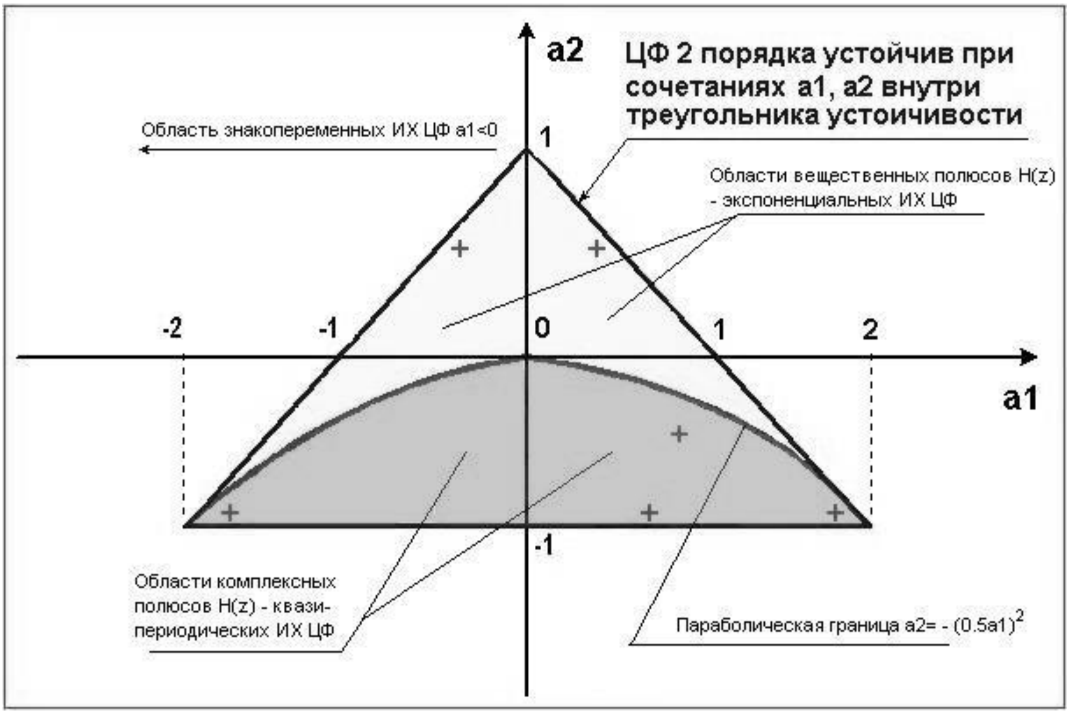


**Рис. 5**. Треугольная область устойчивости рекурсивного ЦФ 2 порядка на плоскости коэффициентов ($a_1$, $a_2$). Характерные области сочетаний коэффициентов $a_1$, $a_2$.

Если $a_1^2 + 4a_2 < 0$, то полюсы (24) являются комплексно сопряженными. Решения (25) уравнения (22) представляют собой затухающую дискретную синусоиду, т.е. ЦФ в данном случае является цифровым колебательным контуром. Частота дискретной синусоиды $\omega_0$ определяется аргументом комплексного полюса $\omega_0$T. При этом $|Zp_{1,2}| = \sqrt{a_2}$ и не зависит от $a_1$. Физически это значит, что при изменении $a_1$ в области под параболической границей при некотором постоянном $a_2$<0 меняется только резонансная частота цифрового колебательного контура, а «добротность» ЦФ, определяемая модулем $|Zp_{1,2}|$ остается неизменной; на комплексной Z–плоскости сопряженные полюсы движутся по концентрической окружности. Отметим, что в левой полуплоскости на плоскости коэффициентов ( $a_1 < 0$ ) ИХ меняет знак при переходе от $g_i$ к $g_{i+1}$.