

Задание №4. Статически неопределимые системы при изгибе

Задача 4.1. Расчет статически неопределимой балки

Исходные данные

Построить опоры внутренних силовых факторов для балки; подобрать сечение балки, определить прогиб посередине первого пролета. Принять $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Схемы к задаче 4.1

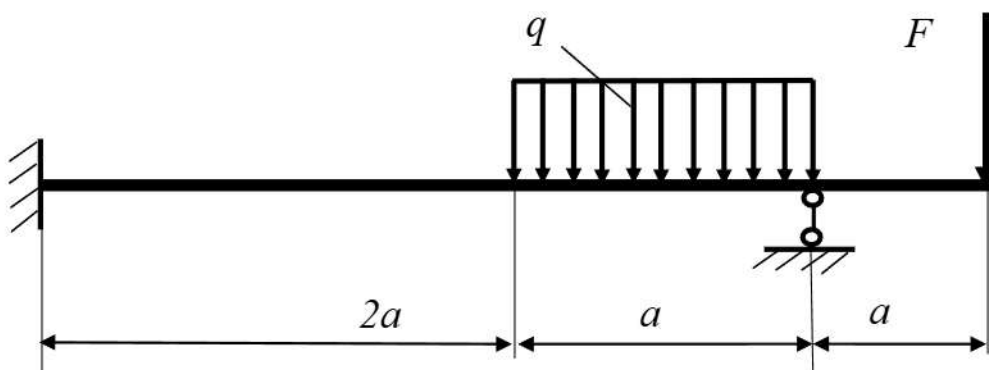


Рис. 4.1.1

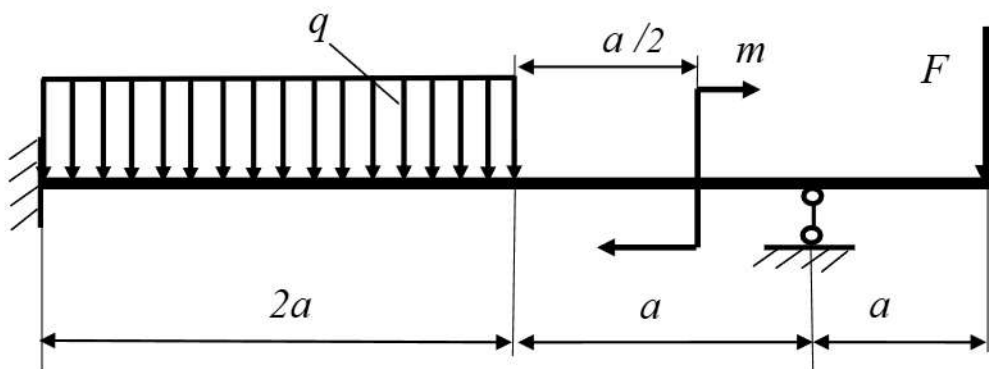


Рис. 4.1.2

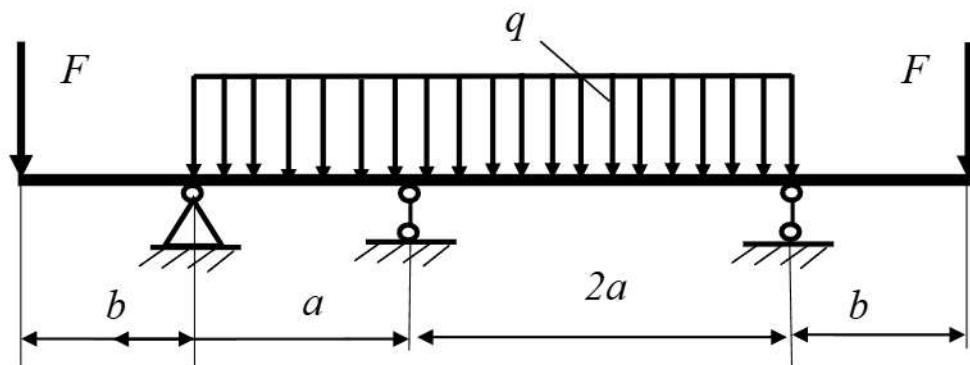


Рис. 4.1.3

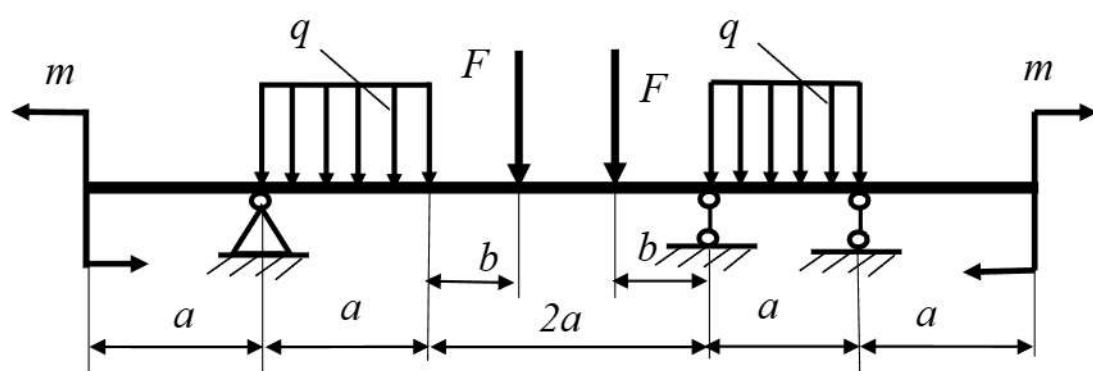


Рис. 4.1.4

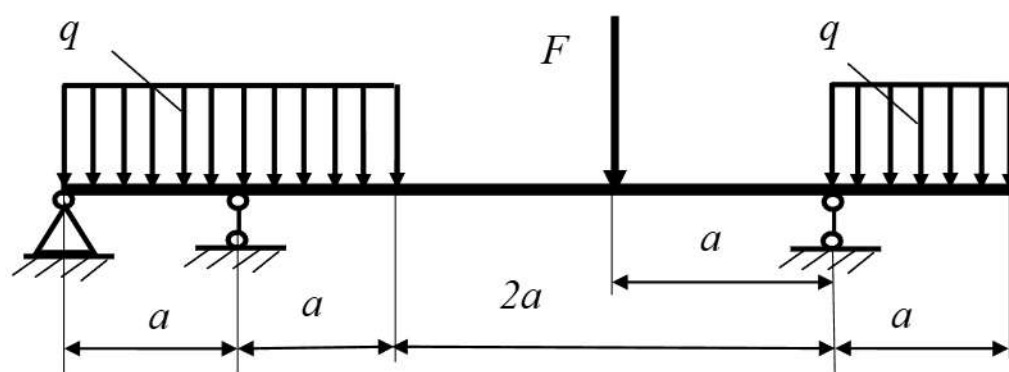


Рис. 4.1.5

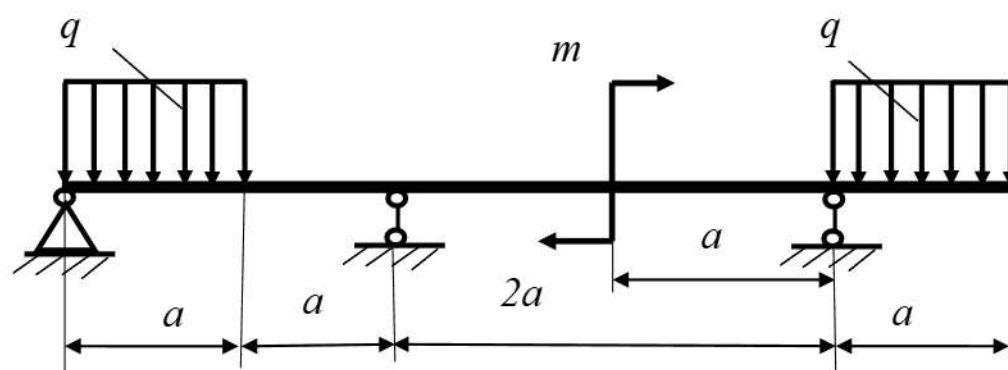


Рис. 4.1.6

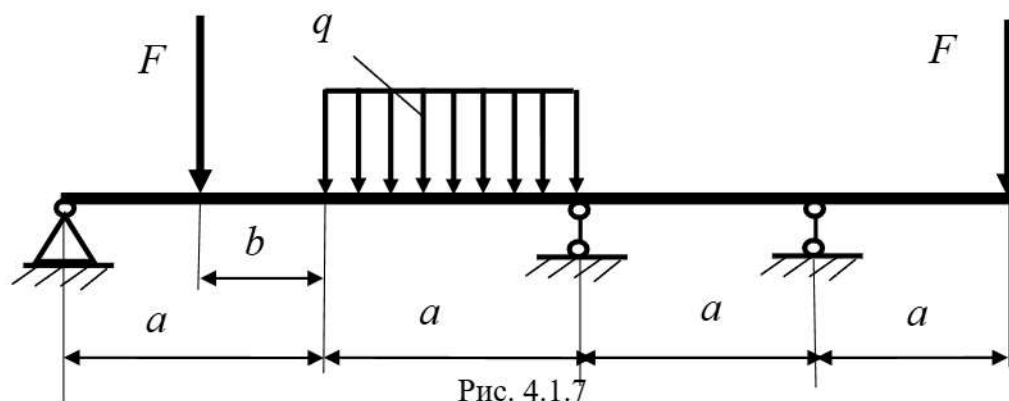


Рис. 4.1.7

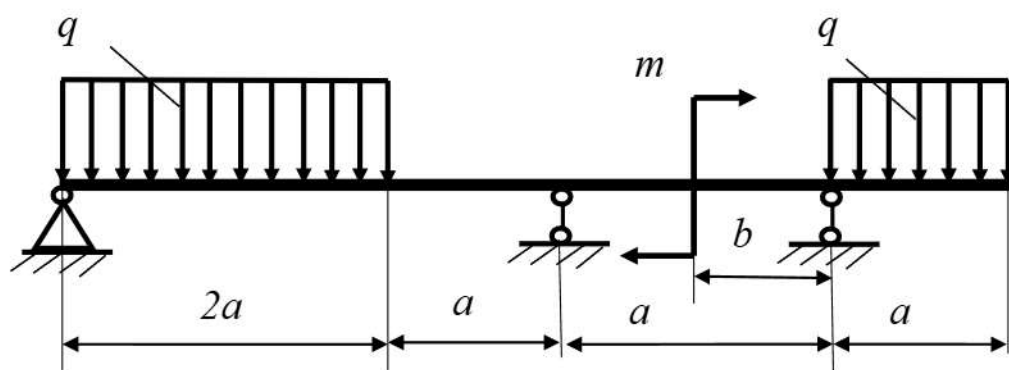


Рис. 4.1.8

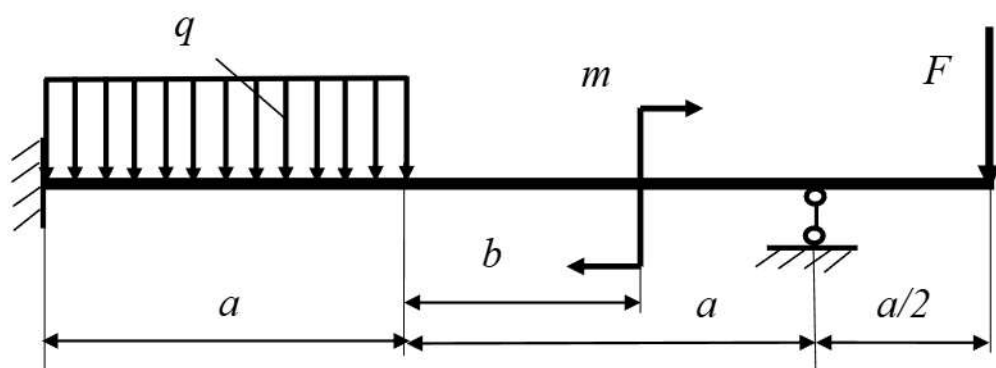


Рис. 4.1.9

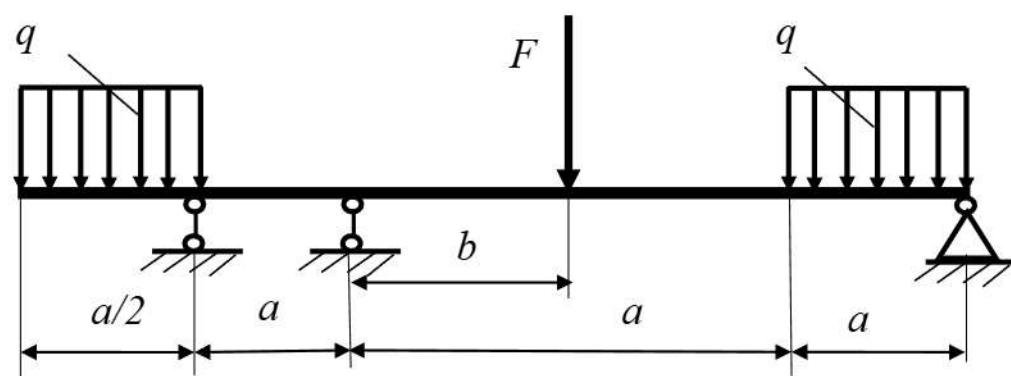


Рис. 4.1.10

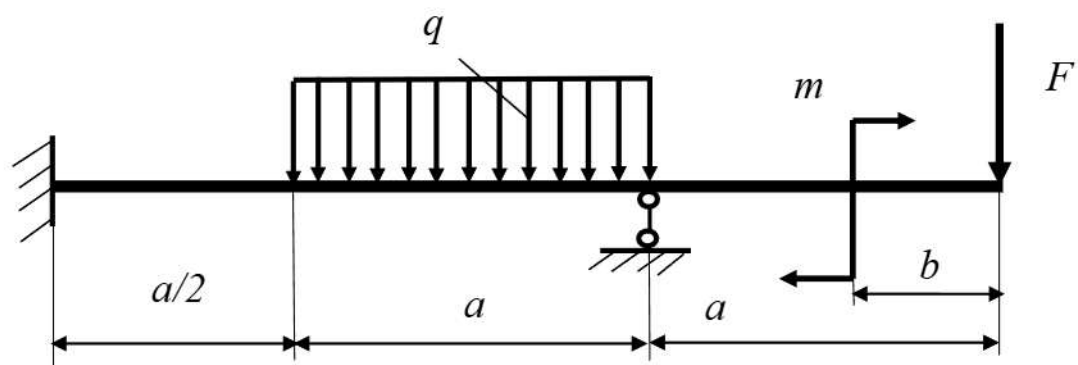


Рис. 4.1.11

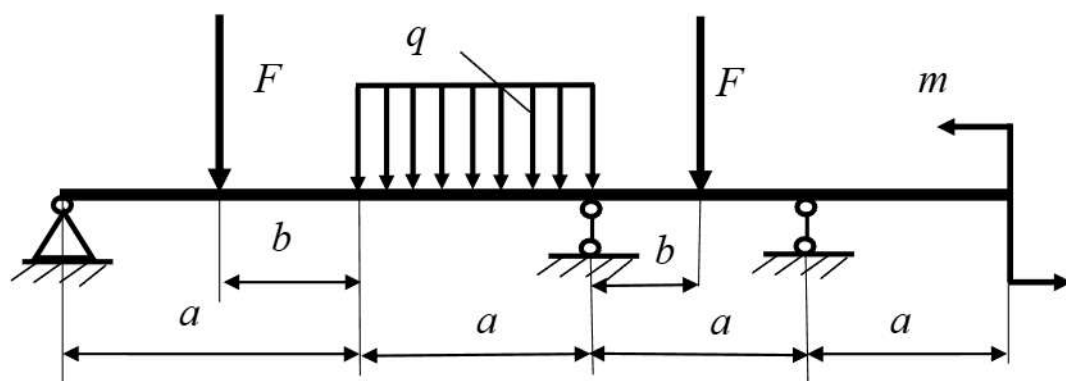


Рис. 4.1.12

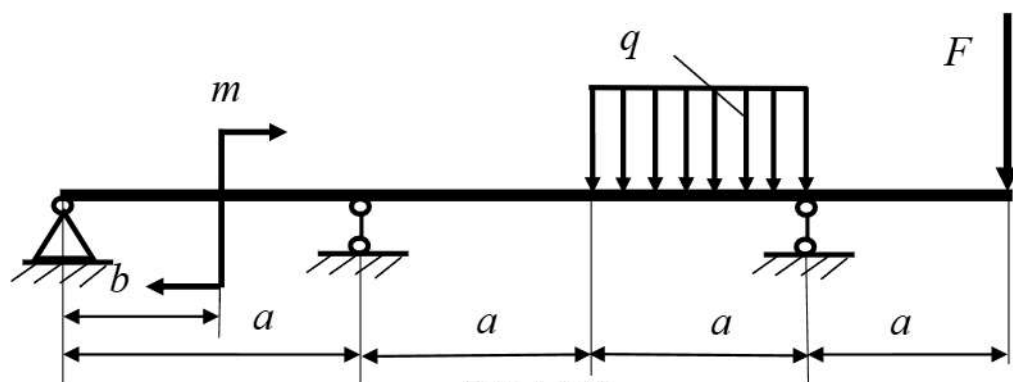


Рис. 4.1.13

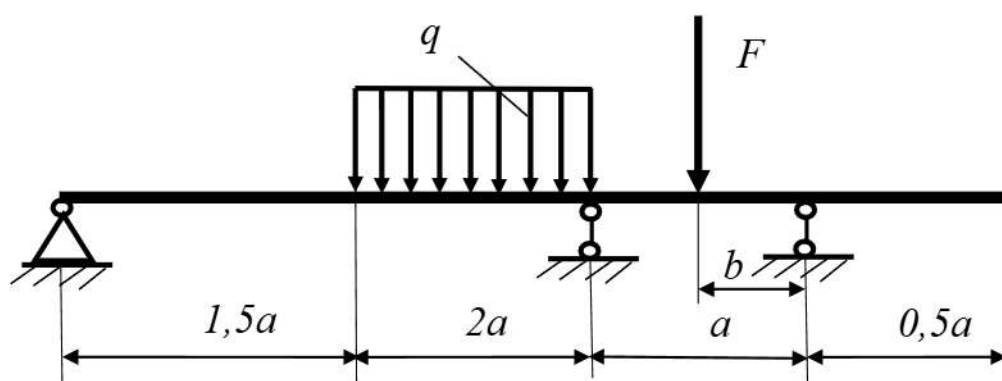


Рис. 4.1.14

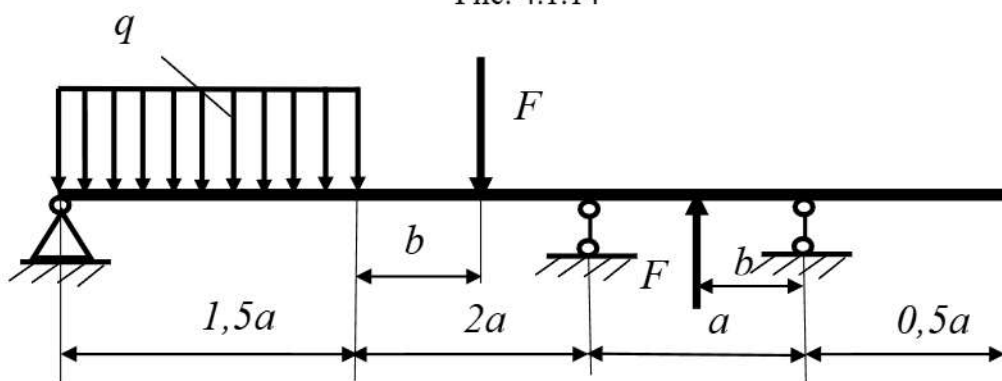


Рис. 4.1.15

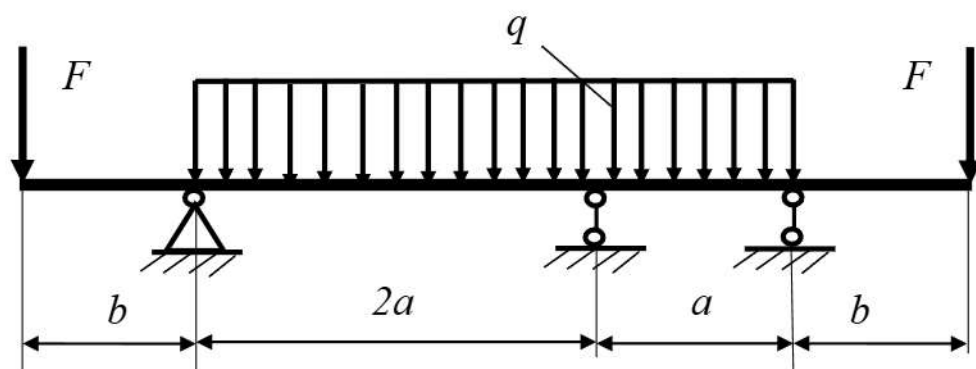


Рис. 4.1.16

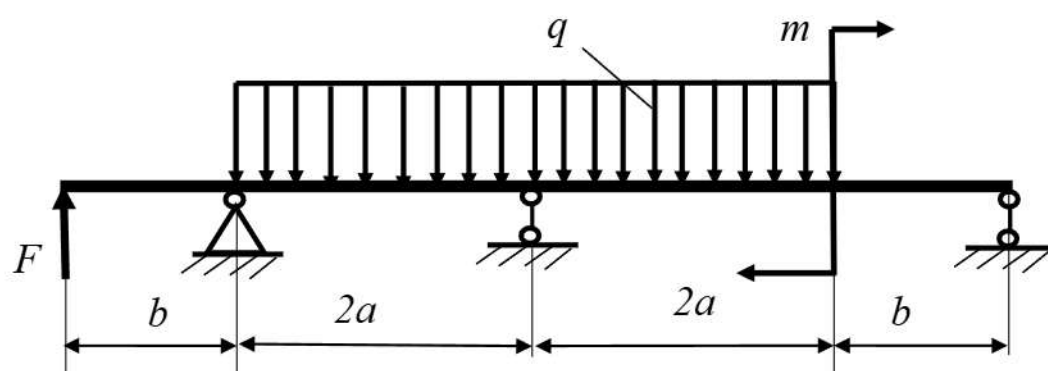


Рис. 4.1.17

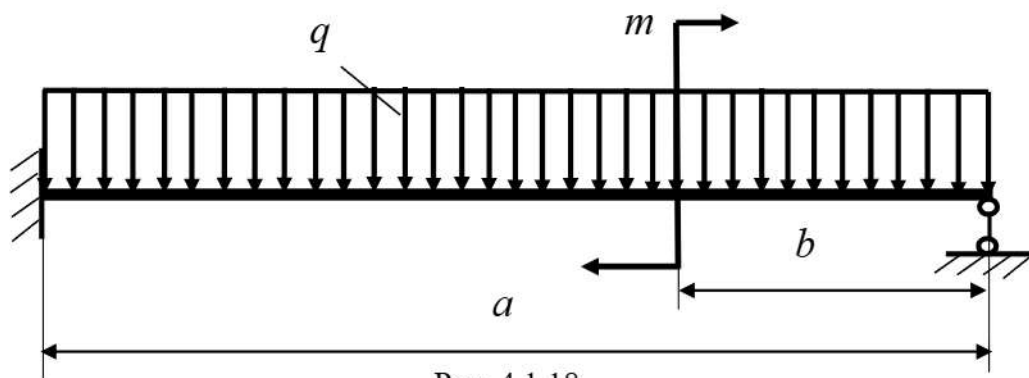


Рис. 4.1.18

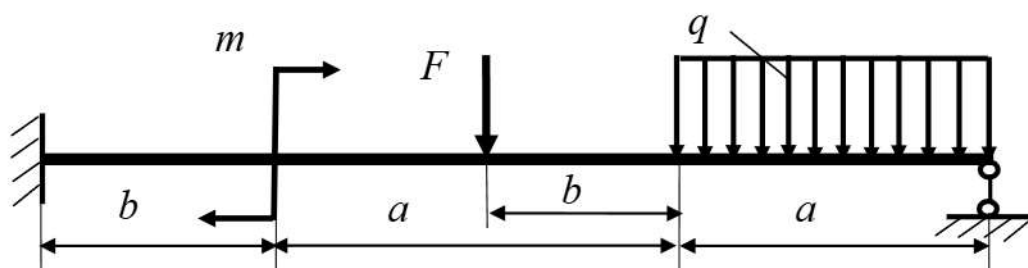


Рис. 4.1.19

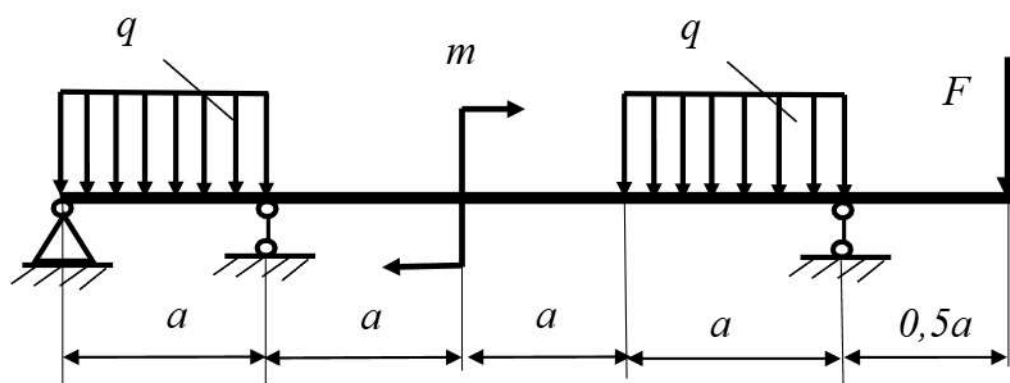


Рис. 4.1.20

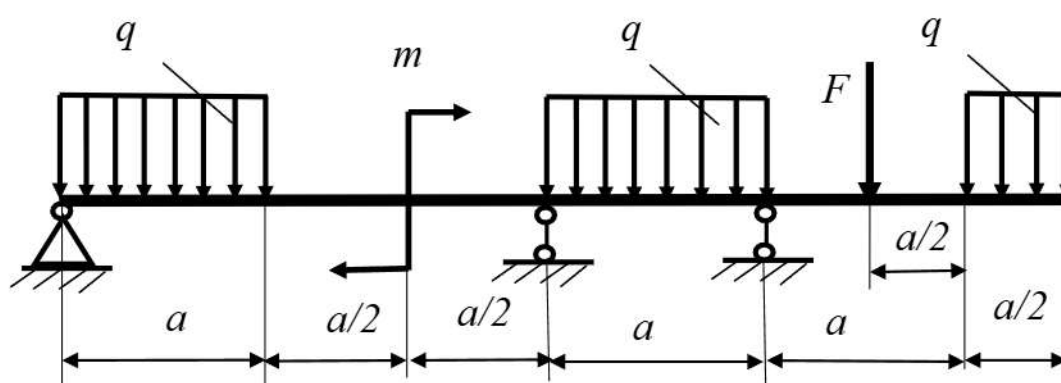


Рис. 4.1.21

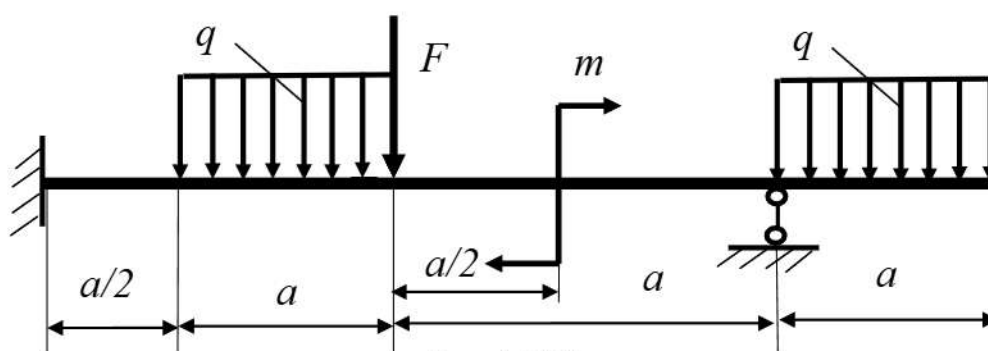


Рис. 4.1.22

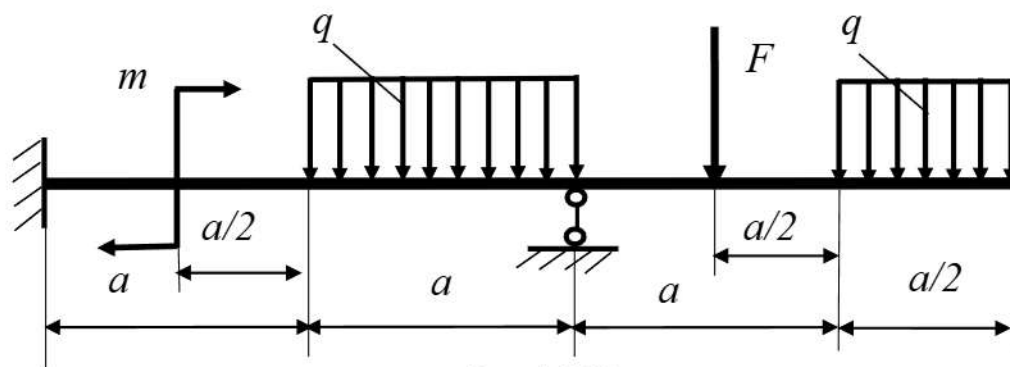


Рис. 4.1.23

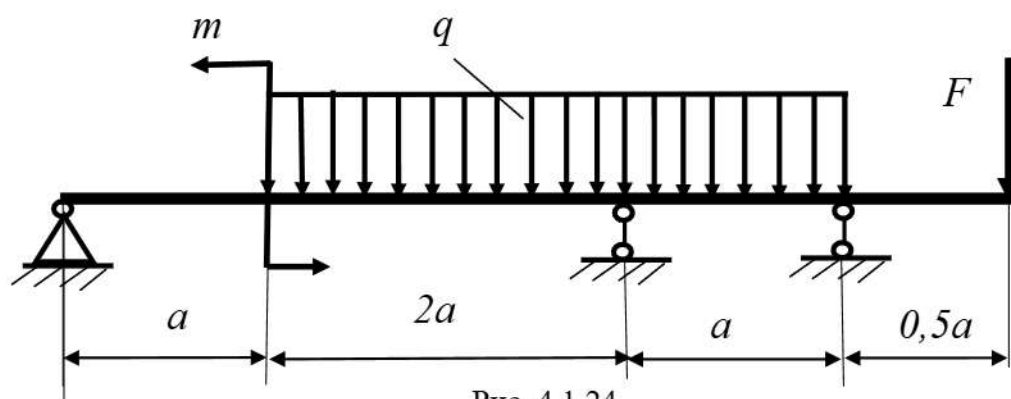


Рис. 4.1.24

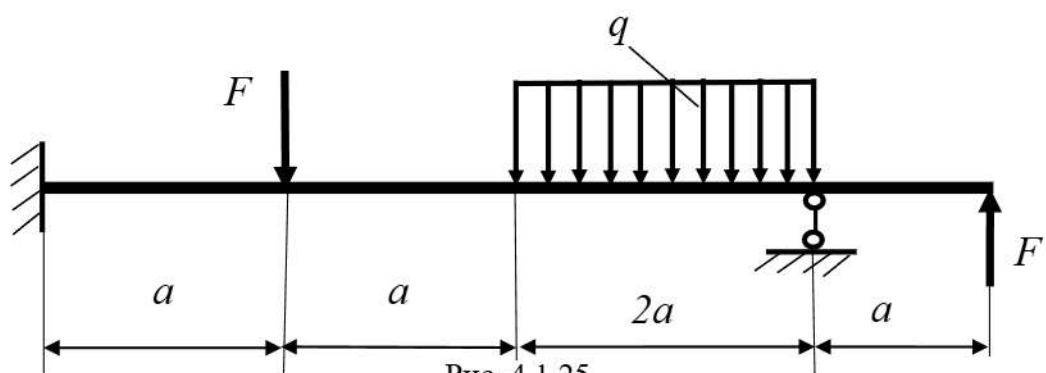


Рис. 4.1.25

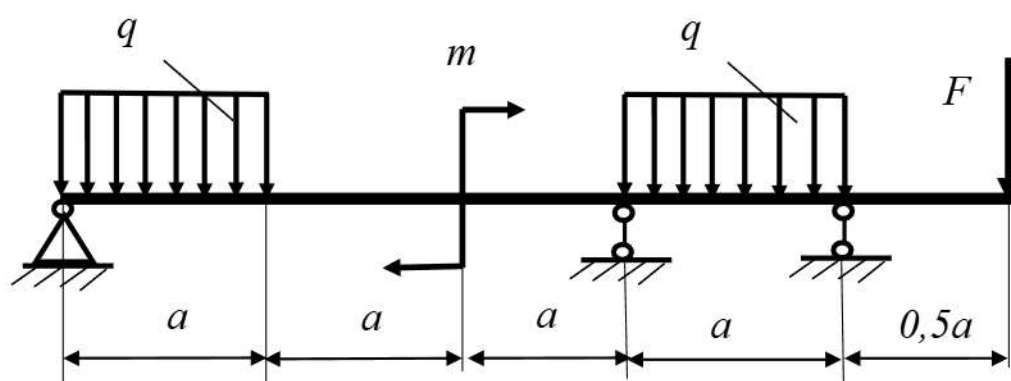


Рис. 4.1.26

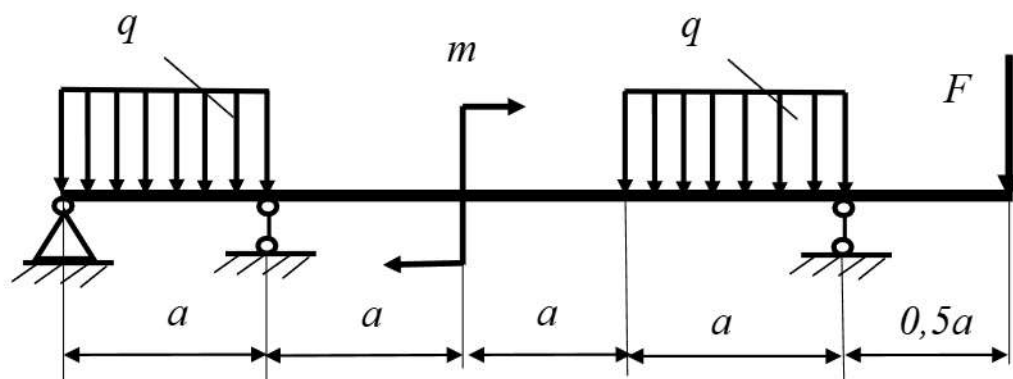


Рис. 4.1.27

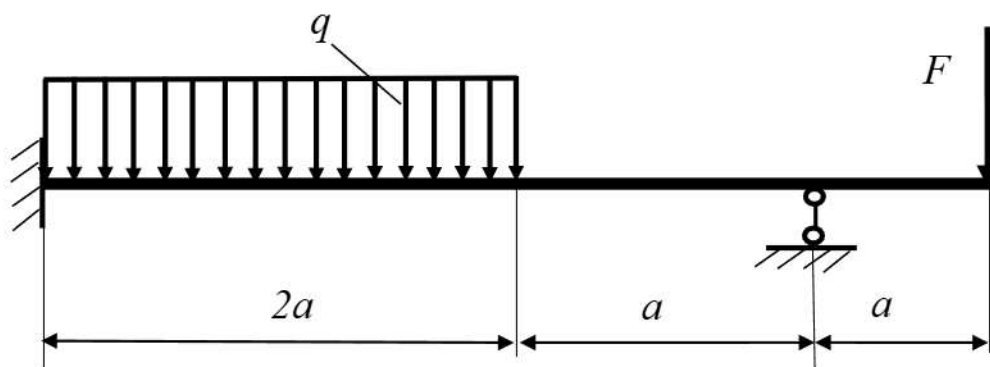


Рис. 4.1.28

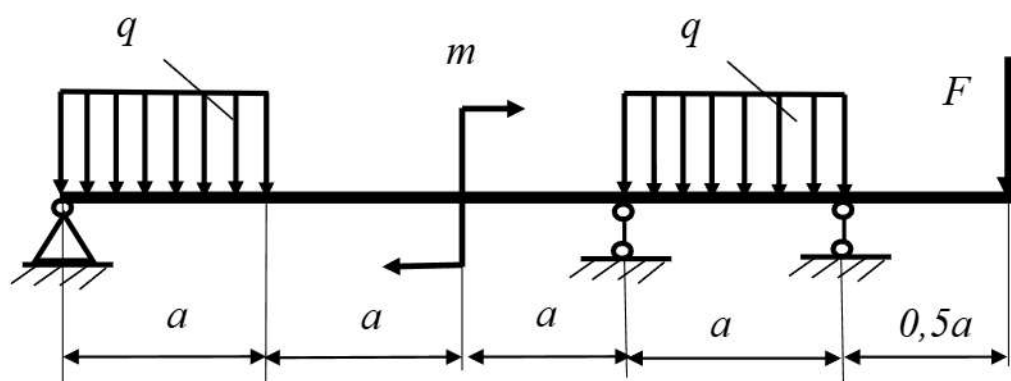


Рис. 4.1.29

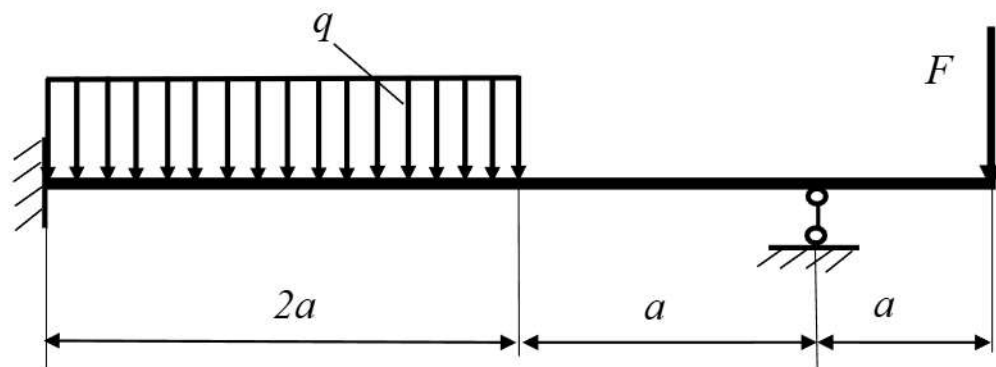


Рис. 4.1.30

Таблица 4.1

Данные для вариантов

Номер варианта (рисунка)	m , кН·м	F , кН	q , кН/м	a , м	b , м	Номер варианта (рисунка)	m , кН·м	F , кН	q , кН/м	a , м	b , м
1 (4.1.1)	5,0	2,0	0,5	4,0	2,0	16 (4.1.16)	17,5	14,0	2,5	4,0	3,0
2 (4.1.2)	7,5	4,0	1,0	3,5	1,5	17 (4.1.17)	20,0	16,0	3,0	2,5	2,0
3 (4.1.3)	10,0	6,0	1,5	3,0	2,0	18 (4.1.18)	22,5	18,0	5,0	3,0	1,5
4 (4.1.4)	12,5	8,0	2,0	2,5	1,0	19 (4.1.19)	25,0	20,0	5,0	2,5	1,0
5 (4.1.5)	15,0	10,0	2,5	2,0	1,0	20 (4.1.20)	27,5	22,0	6,0	2,0	1,0
6 (4.1.6)	17,5	12,0	4,0	1,5	0,5	21 (4.1.21)	30,0	24,0	4,0	2,5	1,0
7 (4.1.7)	20,0	14,0	10,0	1,0	0,5	22 (4.1.22)	32,5	26,0	8,0	3,0	1,5
8 (4.1.8)	22,5	16,0	8,0	2,0	1,0	23 (4.1.23)	35,0	28,0	6,0	3,5	2,0
9 (4.1.9)	25,0	18,0	6,0	3,0	2,0	24 (4.1.24)	37,5	30,0	8,0	4,0	2,0
10 (4.1.10)	30,0	20,0	4,0	4,0	3,0	25 (4.1.25)	40,0	32,0	6,0	3,0	1,0
11 (4.1.11)	5,0	4,0	1,0	4,0	2,0	26 (4.1.26)	20,0	10,0	5,0	2,0	1,0
12 (4.1.12)	7,5	6,0	1,5	3,5	1,5	27 (4.1.27)	22,5	12,0	4,0	2,5	1,5
13 (4.1.13)	10,0	8,0	2,0	3,0	1,0	28 (4.1.28)	25,0	14,0	3,0	3,0	1,5
14 (4.1.14)	12,5	10,0	4,0	2,5	2,0	29 (4.1.29)	27,5	16,0	4,0	3,5	2,0
15 (4.1.15)	15,0	12,0	5,0	2,0	1,0	30 (4.1.30)	30,0	18,0	6,0	2,0	1,0

Примечание. Номер варианта соответствует номеру рисунка (например, в задаче 4.1 варианту 9 соответствует рис. 4.1.9).

Методические указания к решению задачи

1. Установить степень статической неопределимости балки.
2. Раскрыть статическую неопределимость.

2.1. Построить эпюры изгибающих моментов от заданной внешней нагрузки для каждого пролета неразрезной балки как для самостоятельных шарнирно-опертых балок;

2.2. Вычислить грузовые площади ω в каждом пролете и положения их центров тяжести, пользуясь табл. 4.1.

2.3. Составить уравнения трех моментов и определить опорные моменты.

2.4. Рассмотрев ряд шарнирно-закрепленных балок, нагруженных уже известными опорными моментами и заданной нагрузкой, определить сначала частичные, а затем и полные реакции неразрезной балки.

3. Построить эпюры внутренних силовых факторов.

4. Подобрать из условия прочности двутавровое сечение балки.

5. Методом Мора с применением правила Верещагина определить прогиб посередине первого пролета балки.

6. Произвести капитальную проверку правильности расчета неразрезной балки путем определения одного из известных перемещений.

Примеры решения задачи

Исходные данные

Рассмотрим неразрезную балку (см. рис. 4.1.31, а). Пусть дано: $\ell_1 = 4$ м; $\ell_2 = 5$ м; $a = 1,5$ м; $q_1 = 30$ кН/м; $F_1 = 40$ кН; $F_2 = 80$ кН; $m = 25$ кН·м. Для данной балки построить эпюры Q и M , подобрать номер двутавра, определить прогиб посередине первого пролета балки.

Решение

1. Балка один раз статически неопределима (четыре неизвестных при трех уравнениях равновесия).

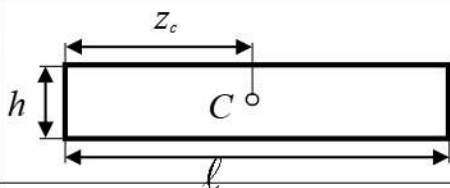
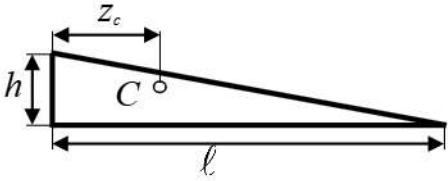
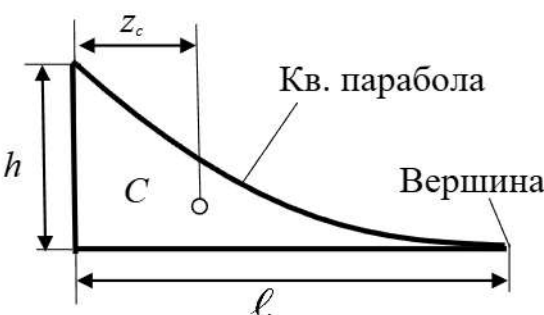
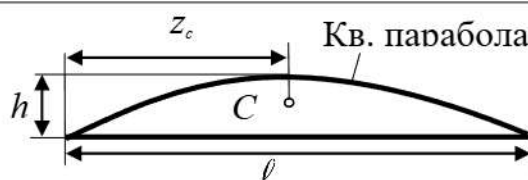
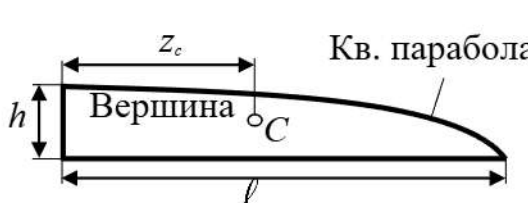
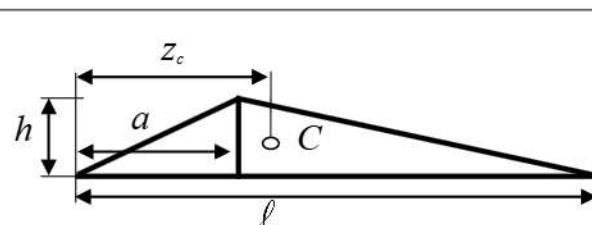
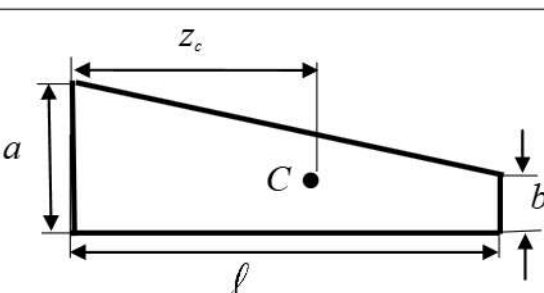
2. Строим эпюры изгибающих моментов для первого и второго пролетов неразрезной балки как для простых однопролетных балок от заданной в пролетах внешней нагрузки (рис. 4.1.31, б).

3. Вычисляем грузовые площади ω_1 и ω_2 и находим положение их центров тяжести.

Рассмотрим отдельно первый пролет (см. рис. 4.1.32, а). Грузовую площадь $\omega_1 = \omega_2' + \omega_2''$ и координату $x_{ц.м}$ определим по табл. 4.1.

Таблица 4.1

Геометрические характеристики эпюр

1		ω	z_c
		ℓh	$\frac{1}{2}\ell$
2		$\frac{1}{2}\ell h$	$\frac{1}{3}\ell$
3	 Кв. парабола Вершина	$\frac{1}{3}\ell h$	$\frac{1}{4}\ell$
4	 Кв. парабола	$\frac{2}{3}\ell h$	$\frac{1}{2}\ell$
5	 Кв. парабола Вершина	$\frac{2}{3}\ell h$	$\frac{3}{8}\ell$
6		$\frac{1}{2}\ell h$	$\frac{a+\ell}{3}$
7		$\frac{a+b}{2}\ell$	$\frac{a+2b}{3(a+b)}\ell$

Графическая часть задачи

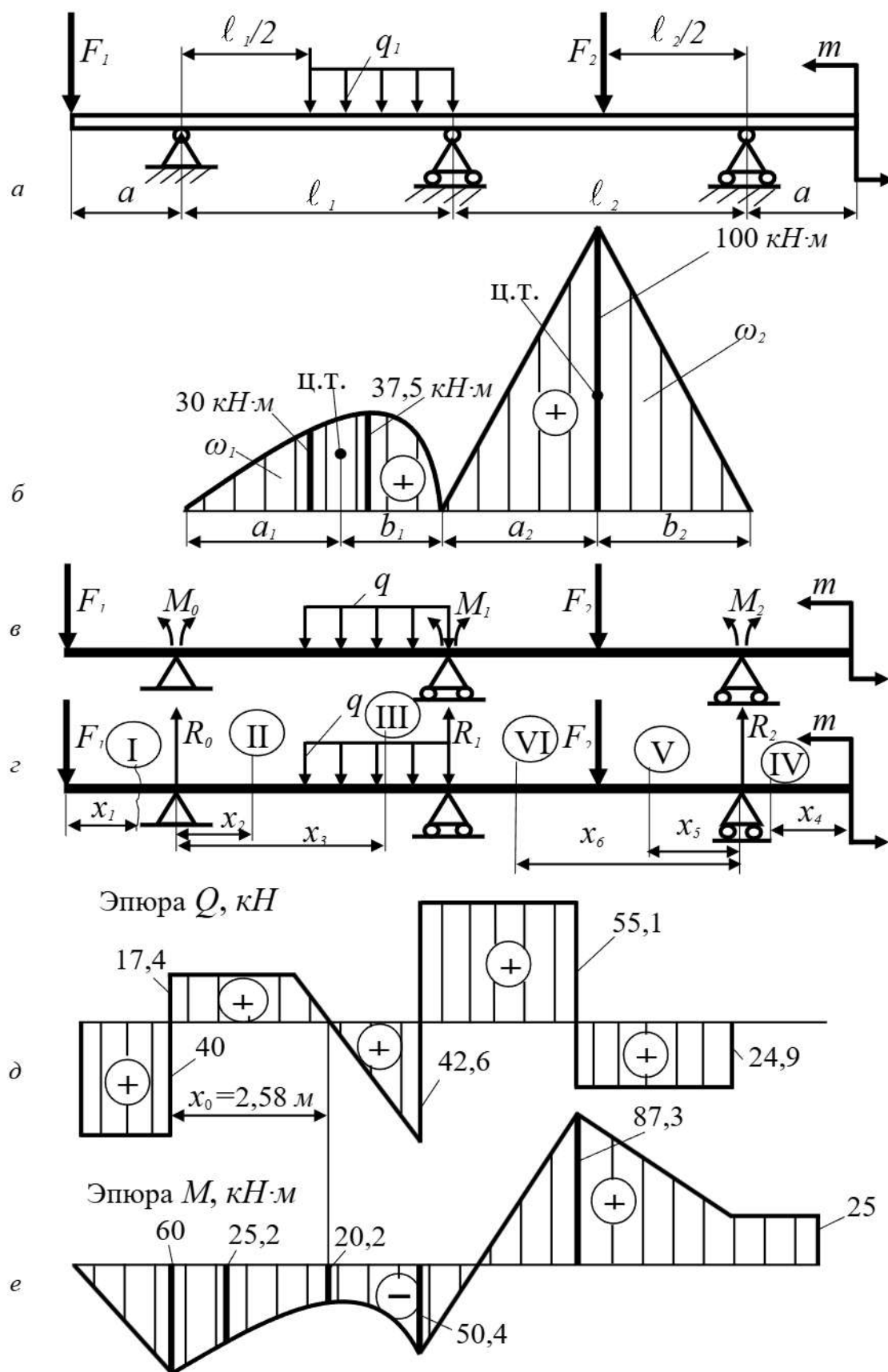


Рис. 4.1.31

Рассмотрим эпюру M (см. рис. 4.1.32, б) для первого пролета.

Из уравнений равновесия

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{1}{8} q_1 \ell_1 = \frac{1}{8} \cdot 30 \cdot 4 = 15 \text{ кН}, \\ R_B &= \frac{3}{8} q_1 \ell_1 = \frac{3}{8} \cdot 30 \cdot 4 = 45 \text{ кН}. \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

На рис. 4.1.32 грузовая площадь

$$\omega_1 = \omega'_1 + \omega''_1,$$

где ω'_1 — площадь равнобедренного треугольника;

$$\omega''_1 = \frac{2}{3} \ell \cdot h = \frac{2}{3} \cdot \frac{\ell_1}{2} \cdot \frac{q_1 \cdot \left(\frac{\ell_1}{2}\right)^2}{8} = \frac{q_1 \cdot \ell_1^3}{96}.$$

На рис. 4.1.32, б найдем положения центров тяжести площадей ω'_1 и ω''_1 :

— для ω'_1 $a_1 = b_1 = \ell_1 / 2$;

— для ω''_1 (на рис. 4.1.32, б не показано) $a''_1 = \frac{\ell_1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\ell_1}{2} = \frac{3}{4} \ell_1$; $b''_1 = \frac{1}{4} \ell_1$.

Грузовая площадь ω_2 определяется аналогично ω'_1 , поэтому вычисления ее здесь не приводятся.

Схема первого пролета

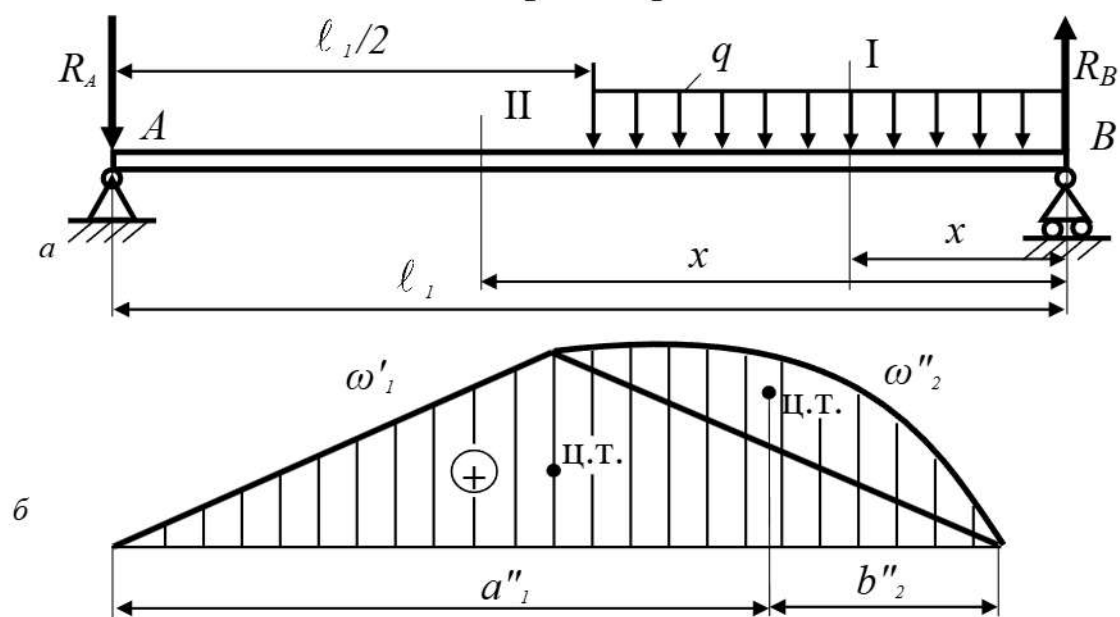


Рис. 4.1.32

Эквивалентная схема первого пролета



Рис. 4.1.33

Эквивалентная схема второго пролета

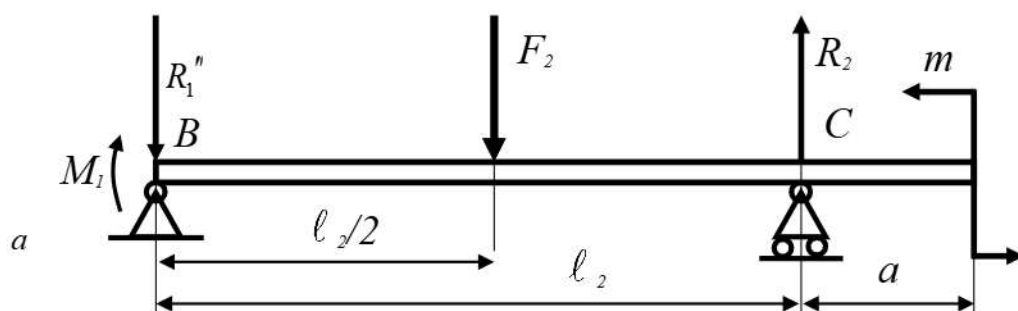


Схема суммирования реакций

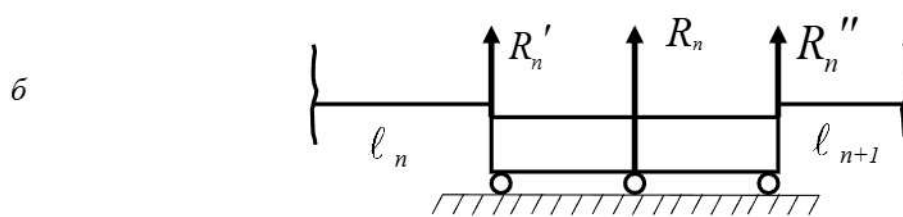


Рис. 4.1.34

4. Определяем опорные моменты. Запишем уравнение трех моментов:

$$M_{n-1} \ell_n + 2 M_n (\ell_n + \ell_{n-2}) + M_{n+1} \ell_{n+1} = -6 \left(\frac{\omega_n a_n}{\ell_n} + \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{\ell_{n+1}} \right). \quad (4.1.2)$$

В нашем случае уравнение примет вид

$$M_0 \ell_1 + 2 M_1 (\ell_1 + \ell_2) + M_2 \ell_2 = -6 \left(\frac{\omega'_1 a'_1 + \omega''_1 a'_1}{\ell_1} + \frac{\omega_2 b_2}{\ell_2} \right). \quad (4.1.3)$$

Учитывая, что $M_0 = -F_1 a$; $M_2 = m$, находим M_1 :

$$-240 + 18 M_1 + 125 = -6 \left(\frac{120 + 60}{4} + \frac{250 \cdot 2,5}{5} \right),$$

откуда

$$M_1 \approx -50,3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

5. Перейдем к определению опорных реакций неразрезной балки. Рассмотрим сначала первый, а затем второй пролет, нагруженный заданной нагрузкой и найденными опорными моментами.

Первый пролет (см. рис. 4.1.33). Вычислим опорные реакции из уравнений равновесия:

$$\sum m_A(\vec{F}_i) = 0; \quad -F_1 a - R'_1 \ell_1 + q_1 \frac{\ell_1}{2} \cdot \frac{3}{4} \ell_1 - M_1 = 0,$$

или

$$-60 - 4 R'_1 + 30 \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot 4 + 50,3 = 0,$$

откуда

$$R'_1 = 42,6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\sum m_B(\vec{F}_i) = 0; \quad -F_1 (a + \ell_1) + R_0 \ell_1 - M_1 - q_1 \frac{\ell_1}{2} \cdot \frac{\ell_1}{4} = 0,$$

или

$$-40 \cdot 5,5 + 4R_0 + 50,3 - 60 = 0,$$

откуда

$$R_0 = 57,4 \text{ кН}.$$

Во втором пролете (рис. 4.1.34, а) аналогично получим

$$\sum m_B(\vec{F}_i) = 0; \quad -m - R_2 \ell_2 + F_2 \frac{\ell_2}{2} + M_1 = 0,$$

или

$$-25 - 5R_2 + 200 - 50,3 = 0,$$

откуда

$$R_2 \approx 24,9 \text{ кН};$$

$$\sum m_C(\vec{F}_i) = 0; \quad M_1 + R_1'' \ell_2 - F_2 \frac{\ell_2}{2} - m = 0,$$

или

$$-50,3 + 5R_1'' - 80 \cdot \frac{5}{3} - 25 = 0,$$

откуда

$$R_1'' \approx 55,1 \text{ кН}.$$

Полные реакции неразрезной балки найдем согласно схеме рис. 4.1.34, б по формуле

$$R_n = R'_n + R''_n. \quad (4.1.4)$$

Тогда окончательно получим

$$R_0 = 57,4 \text{ кН};$$

$$R_1 = R'_1 + R''_1 = 55,1 + 42,6 = 97,7 \text{ кН}; \quad (4.1.5)$$

$$R_2 = 24,9 \text{ кН}.$$

6. Построим эпюры Q и M для неразрезной балки (рис. 4.1.31, а) аналитическим методом:

- на участке I

$$0 \leq x_1 \leq a; Q = -F_1 = -40 \text{ кН}; M = -F_1 x_1;$$

$$M_{x_1=0} = 0; M_{x_1=a} = -F_1 a = -60 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

- на участке II

$$0 \leq x_2 \leq \frac{\ell_1}{2}; Q = -F_1 + R_0 = 17,4 \text{ кН};$$

$$M = -F_1 (a + x_2) + R_0 x_2;$$

$$M_{x_2=0} = -F_1 a = -60 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x_2=\frac{\ell_1}{2}} = -F_1 \left(a + \frac{\ell_1}{2} \right) + R_0 \frac{\ell_1}{2} = -40 \cdot 3,5 + 57,4 \cdot 2 = -25,2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

- на участке III

$$\frac{\ell_1}{2} \leq x_3 \leq \ell_1; Q = -F_1 + R_0 - q \left(x_3 - \frac{\ell_1}{2} \right); Q_{x_3=\frac{\ell_1}{2}} = 17,4 \text{ кН};$$

$$Q_{x_3=\ell_1} = 17,4 - 30 \cdot 2 = -42,6 \text{ кН};$$

$$M = -F_1 (a + x_3) + R_0 x_3 - \frac{q_1 \left(x_3 - \frac{\ell_1}{2} \right)^2}{2}; M_{x_3=\frac{\ell_1}{2}} = -25,2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x_3=\ell_1} = -40 \cdot 5,5 + 57,4 \cdot 4 - 60 = -50,4 \text{ кН} \cdot \text{м} \approx M_1.$$

Так как на этом участке эпюра поперечных сил Q меняет знак, то, значит, на исследуемом участке Q проходит через ноль.

Взяв производную $\frac{dM}{dx} = Q$ и приравняв ее к нулю, найдем

$$-F_1 + R_0 - q \left(x_0 - \frac{\ell_1}{2} \right) = 0;$$

откуда

$$x_0 = 2,58 \text{ м.}$$

Получаем

$$M_{x_3=2,58} = -40(1,5 + 2,58) + 57,4 \cdot 2,58 - 30(2,58 \cdot 2)^2 \cdot \frac{1}{2} \approx -20,2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

на участке IV:

$$0 \leq x_4 \leq \alpha; Q = 0; M = m = 25 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

на участке V:

$$0 \leq x_5 \leq \frac{\ell_2}{2}; Q = -R_2 = -24,9 \text{ кН} \cdot \text{м}; M = R_2 x_5 + m;$$

$$M_{x_5=0} = m = 25 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_{x_5=\frac{\ell_2}{2}} = 24,9 \cdot 2,5 + 25 \approx 87,3 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

на участке VI:

$$\frac{\ell_2}{2} \leq x_6 \leq \ell_2; Q = -R_2 + F_2 = -24,9 + 80 = 55,1 \text{ кН};$$

$$M = R_2 \cdot x_6 + m - F_2 \left(x_6 - \frac{\ell_2}{2} \right); M_{x_6=\frac{\ell_2}{2}} = 87,3 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x_6=\ell_2} = R_2 \ell_2 + m - F_2 \cdot \frac{\ell_2}{2} = -50,4 \text{ кН} \cdot \text{м} \approx M_1.$$

На основании проведенных вычислений построены эпюры Q и M (см. рис. 4.1.31, ∂ , e).

7. Проверяем полученные результаты.

А. Проверку равновесия сделаем согласно равенству $\sum F_{iy} = 0$.

В соответствии со схемой рис. 4.1.31, z и равенством (4.1.5) запишем:

$$R_0 + R_1 + R_2 - F_1 - q_1 \frac{\ell_1}{2} - F_2 = 0.$$

После подстановки числовых значений получим:

$$57,4 + 97,7 + 24,9 - 40 - 80 - 60 = 0.$$

Б. Проверку деформаций можно выполнить путем вычисления, например, прогиба y_2 на второй опоре, зная заранее, что $y_2 = 0$. Для определения y_2 воспользуемся методом начальных параметров в форме, предложенной проф. А. П. Коробовым. Применительно к данной задаче

$$y_n(x) = y_0 + \theta_0 x + \frac{M_0 x^2}{2 E J_z} + \frac{Q_0 x^3}{6 E J_z} - \frac{1}{6 E J_z} \int_{\ell_1/2}^{\ell_1} q_1 (x - \xi)^3 d\xi +$$

$$+ \frac{R_1 (x - \ell_1)^3}{6 E J_z} \Bigg|_{x > 2} - \frac{F_2 (x - (\ell_1 + \ell_2 / 2))^3}{6 E J_z} \Bigg|_{x > \ell_1 + \frac{\ell_1}{2}}, \quad (4.1.6)$$

где y_0 , θ_0 , M_0 и Q_0 — начальные параметры.

Поместив начало координат на опоре O и приняв во внимание рис. 4.1.31, z , ∂ , e , найдем:

$y_0 = 0$ — начальный прогиб;

$\theta_0 \neq 0$ — начальный угол поворота сечения, который подлежит определению;

$M_0 = -60 \text{ кН} \cdot \text{м}$ — изгибающий момент в начале координат;

$Q_0 = 17,4 \text{ кН}$ — поперечная сила в начале координат.

В случае равномерно распределенной нагрузки интеграл, входящий в уравнение прогибов,

$$\int_{\ell_1/2}^{\ell_1} q_1 (x - \xi)^3 d\xi = - \frac{q_1 (x - \xi)^4}{4} \Bigg|_{\frac{\ell_1}{2}}^{\ell_1} = - \frac{q_1 (x - \ell_1)^4}{4} + \frac{q_1 \left(x - \frac{\ell_1}{2}\right)^4}{4}.$$

После подстановки числовых значений получим:

$$y_n(x) = \theta_0 x - \frac{30x^2}{EJ_z} + \frac{17,4x^3}{6EJ_z} - \frac{30(x-2)^2}{24EJ_z} \Bigg|_{x>2} + \frac{30(x-4)^4}{24EJ_z} \Bigg|_{x>4} +$$

$$+ \frac{97,7(x-4)^3}{6EJ_z} \Bigg|_{x>2} - \frac{80(x-6,5)^3}{6EJ_z} \Bigg|_{x>6,5}.$$

Начальный угол поворота сечения θ_0 найдем из условия

$$y_n(\ell_1) = 0,$$

то есть

$$\theta_0 \cdot 4 - \frac{30 \cdot 16}{EJ_z} + \frac{17,4 \cdot 4^3}{6EJ_z} - \frac{30 \cdot 2^4}{24EJ_z} = 0,$$

откуда

$$\theta_0 = \frac{78,6}{EJ_z}.$$

Окончательно

$$y_n(x) = \frac{78,6x}{EJ_z} - \frac{30x^2}{EJ_z} + \frac{2,9x^3}{EJ_z} - \frac{5(x-2)^4}{4EJ_z} \Bigg|_{x>2} + \frac{5(x-2)^4}{4EJ_z} \Bigg|_{x>4} +$$

$$+ \frac{97,7(x-4)^3}{6EJ_z} \Bigg|_{x>4} - \frac{40(x-6,5)^3}{3EJ_z} \Bigg|_{x>6,5}. \quad (4.1.7)$$

Искомое значение y найдем по формуле

$$y_2 = y_{x=9} = \frac{78,6 \cdot 9}{EJ_z} - \frac{30 \cdot 9^2}{EJ_z} + \frac{2,9 \cdot 9^3}{EJ_z} - \frac{5 \cdot 7^4}{4EJ_z} + \frac{5 \cdot 5^4}{4EJ_z} + \frac{97,7 \cdot 5^3}{6EJ_z} - \frac{40 \cdot 2,5^3}{3EJ_z}$$

или

$$y_2 = \frac{1}{E J_z} (206,92 - 208,33) \approx 0,$$

что указывает на правильность расчета (результат можно считать равным нулю, если разность между положительным и отрицательным числами по абсолютной величине не превышает погрешности расчета, то есть не больше, чем 5 %).

8. Подбираем сечение двутавра:

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{87,3 \cdot 10^{-3}}{160} \approx 546 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

то есть $W_x = 546 \text{ см}^3$.

По сортаменту (ГОСТ 8239-72) принимаем двутавр №33 с

$$W_z = 597 \text{ см}^3.$$

9. Методом Мора с применением правила Верещагина определим прогиб посередине первого пролета балки y_c . Обратимся к рис. 4.1.33: укажем правильное направление опорного момента M_1 , числовые значения нагрузок, длин (см. рис. 4.1.35, а). Напомним, что перемещение по правилу Верещагина определяется по формуле

$$\delta = \sum \frac{\omega \eta_c}{E J_z}, \quad (4.1.8)$$

где δ — искомое перемещение от заданной нагрузки;

ω — площадь нелинейной эпюры моментов;

η_c — ордината под центром тяжести, взятая на линейной эпюре;

$E J_z$ — жесткость поперечного сечения на данном участке балки.

В соответствии с рис. 4.1.35, б, в, д

$$y_c = \frac{1}{E J_z} (\omega_1 \eta_1 + \omega_2 \eta_2 + \omega_3 \eta_3 + \omega_4 \eta_4 + \omega_5 \eta_5). \quad (4.1.9)$$

На рис. 4.1.35, б, в изображены эпюры M_F и M'_F в расслоенном виде; на рис. 4.1.35, г, д — соответственно единичная система и эпюра.

Далее получаем

$$\omega_1 = \frac{1}{2} R_0 \frac{\ell_1}{2} \cdot \frac{\ell_1}{2} = \frac{R_0 \ell_1^2}{8} = \frac{57,4 \cdot 4^2}{8} = 114,8 \text{ [кН} \cdot \text{м}^2\text{]}; \quad \eta_1 = \frac{1}{6} \ell_1 = \frac{2}{3} \text{ [м]};$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \frac{\ell_1}{2} \frac{\ell_1}{4} = \frac{\ell_1^2}{16} = \frac{4^2}{16} = 1; \quad \eta_2 = \left(a + \frac{\ell_1}{3} \right) F_1 = -113,2;$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2} R'_1 \frac{\ell_1}{2} \cdot \frac{\ell_1}{2} = \frac{R'_1 \ell_1^2}{8} = \frac{42,6 \cdot 4^2}{8} = 85,2; \quad \eta_3 = \frac{\ell_1}{6} = \frac{4}{6};$$

$$\omega_4 = - \frac{1}{3} \ell h = - \frac{1}{3} \frac{\ell_1}{2} \frac{q_1 \ell_1^2}{8} = - \frac{q_1 \ell_1^3}{48} = - 40; \quad \eta_4 = \frac{3 \ell_1}{16} = \frac{3}{4};$$

$$\omega_5 = - \frac{\ell_1}{2} M_1 = - 2 \cdot 50,3 = - 100,6; \quad \eta_5 = \frac{\ell_1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Подставим полученные числовые значения ω и η в формулу (4.1.9):

$$y_c = \frac{1}{E J_z} \left(114,8 \cdot \frac{2}{3} - 1 \cdot 113,2 + 85,2 \cdot \frac{4}{6} - 40 \cdot \frac{3}{4} - 100,6 \cdot \frac{1}{2} \right),$$

откуда окончательно получим искомое перемещение

$$y_c \approx - \frac{60,6}{E J_z}. \quad (4.1.10)$$

Определение перемещений в первом пролете

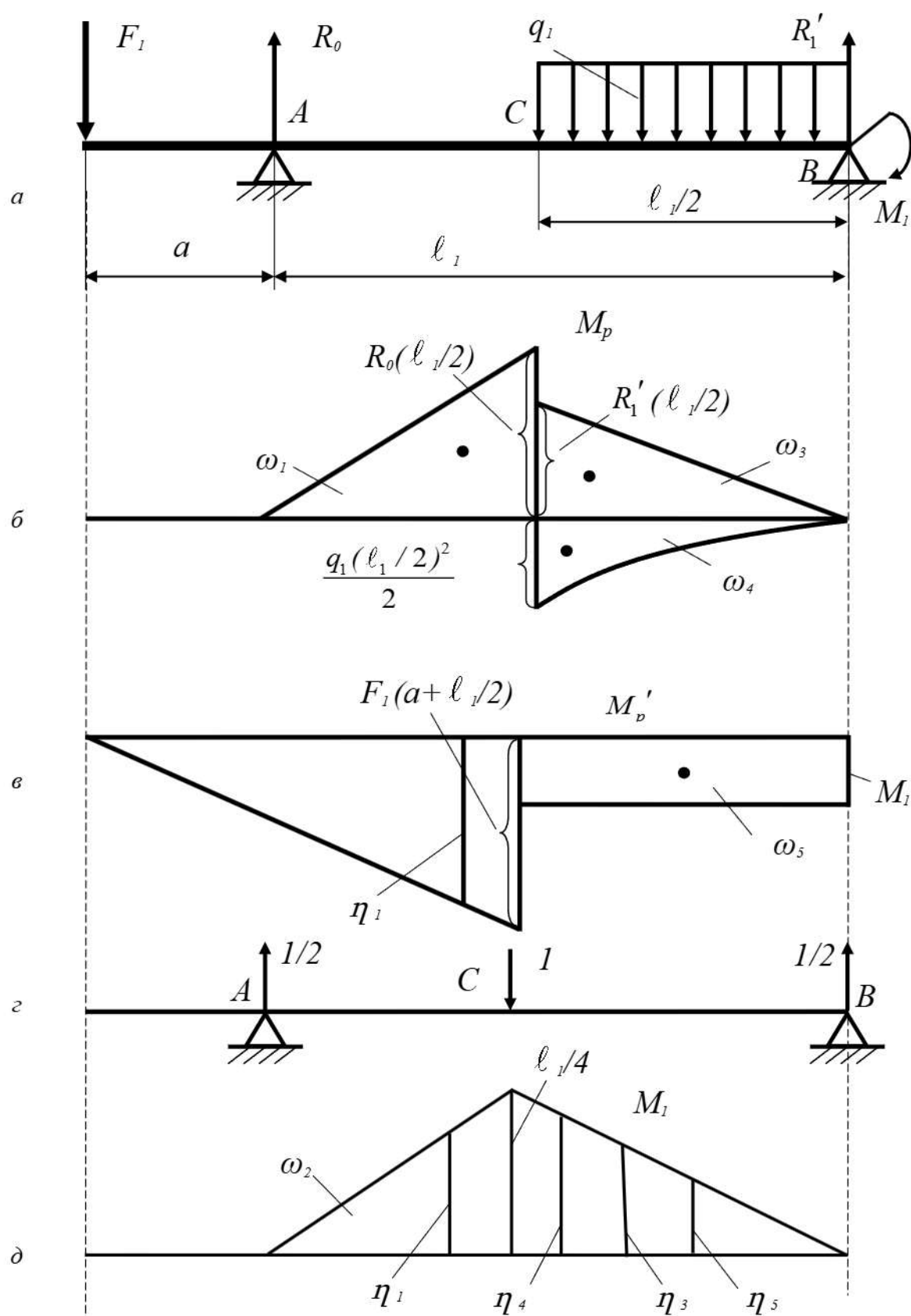


Рис. 4.1.35

Задача 4.2. Расчет статически неопределимой рамы

Исходные данные

Для заданной рамы построить эпюры внутренних силовых факторов N , Q , M .

Схемы к задаче 4.2

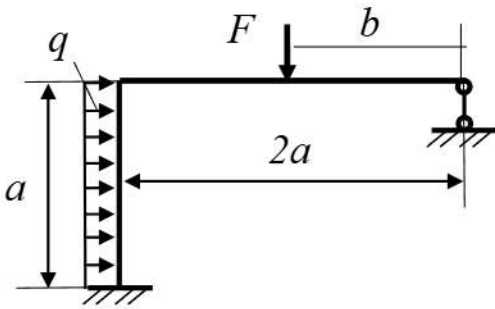


Рис. 4.2.1

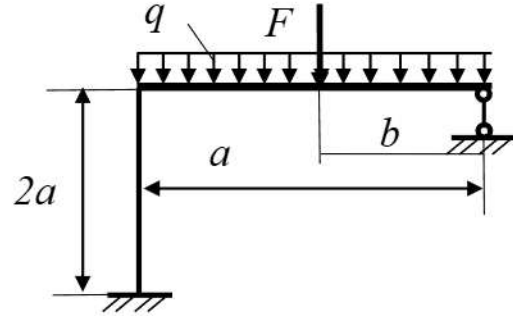


Рис. 4.2.2

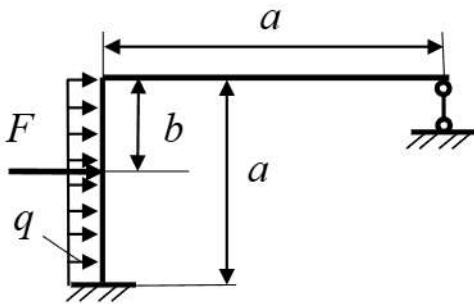


Рис. 4.2.3

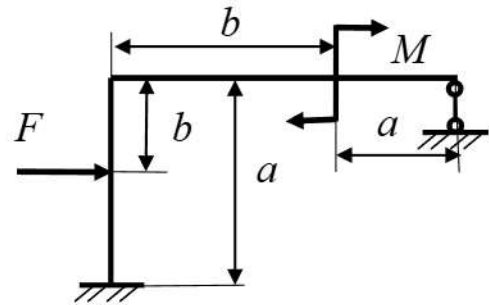


Рис. 4.2.4

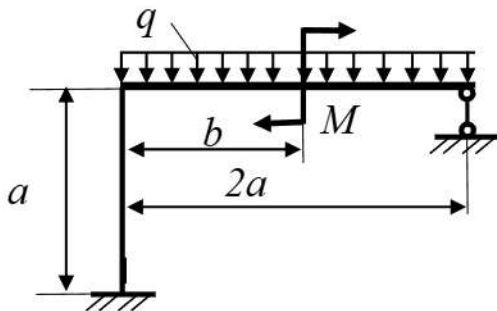


Рис. 4.2.5

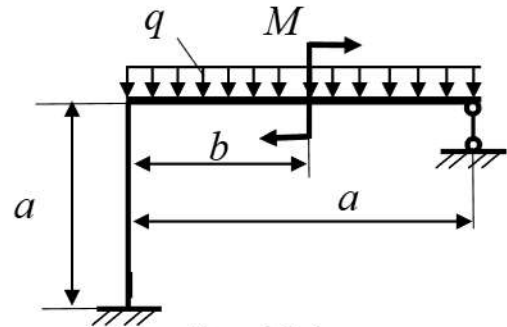


Рис. 4.2.6

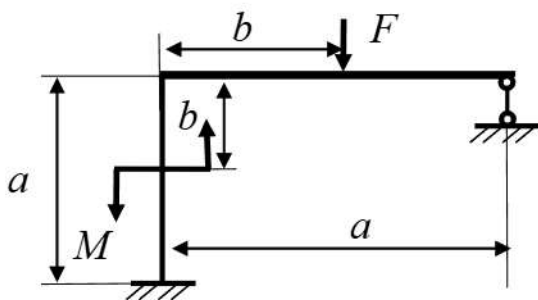


Рис. 4.2.7

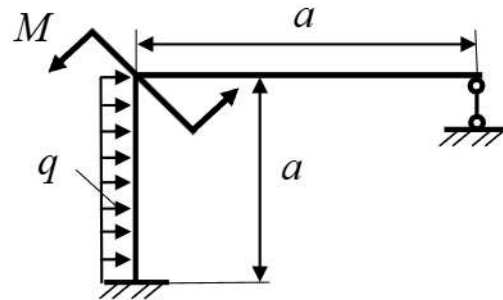


Рис. 4.2.8

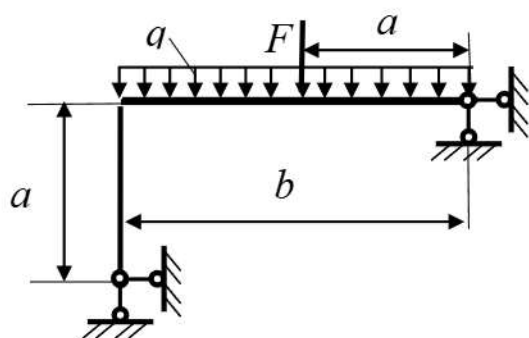


Рис. 4.2.9

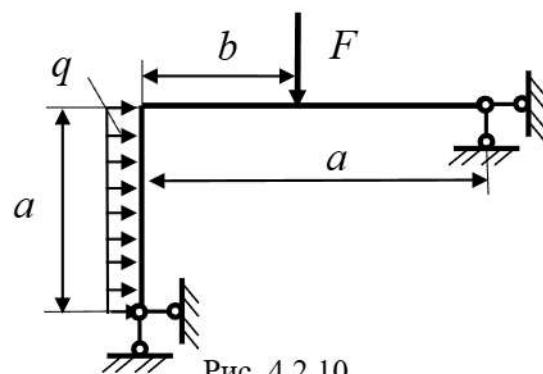


Рис. 4.2.10

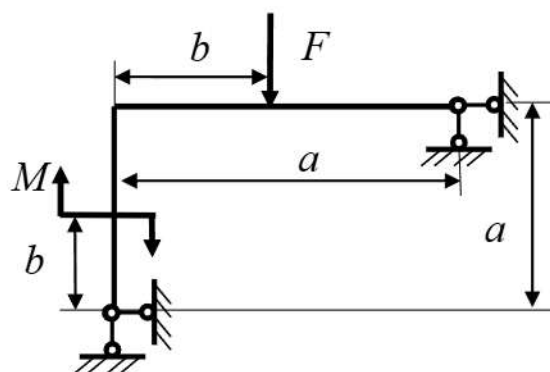


Рис. 4.2.11

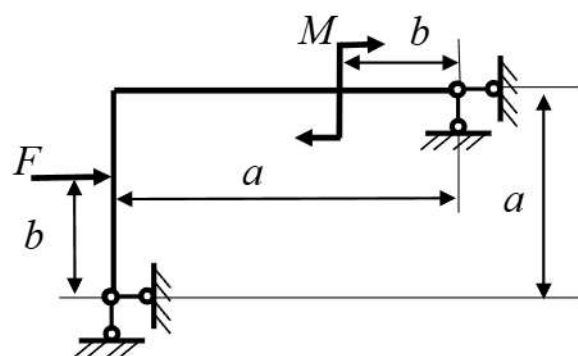


Рис. 4.2.12

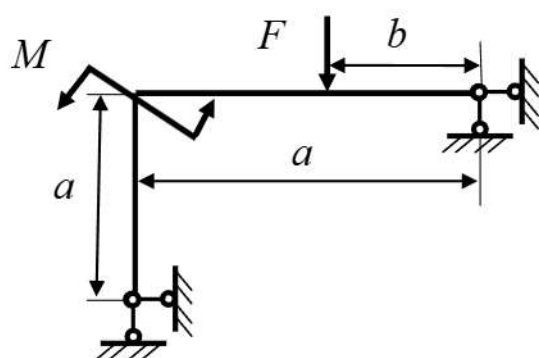


Рис. 4.2.13

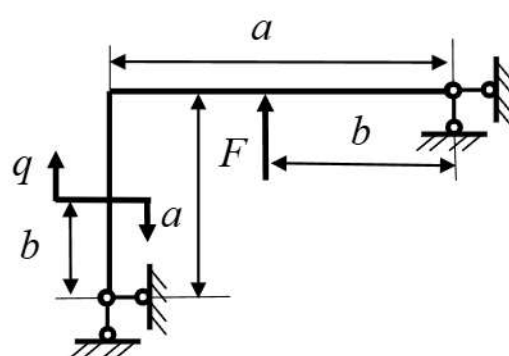


Рис. 4.2.14

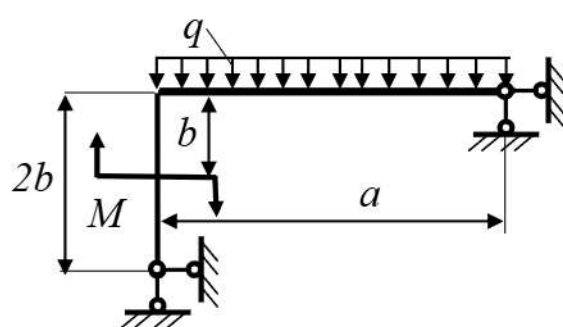


Рис. 4.2.15

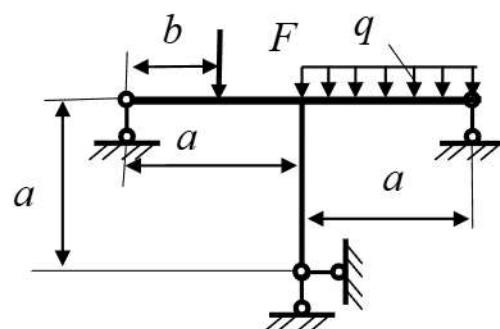


Рис. 4.2.16

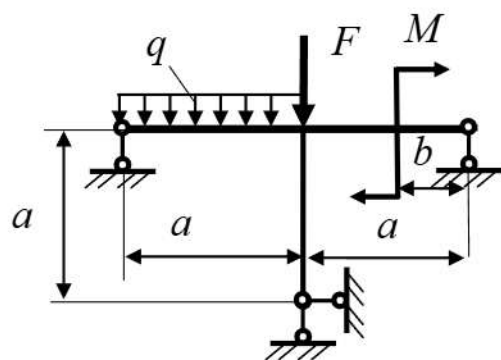


Рис. 4.2.17

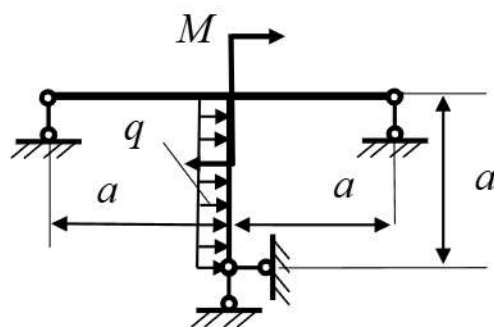


Рис. 4.2.18

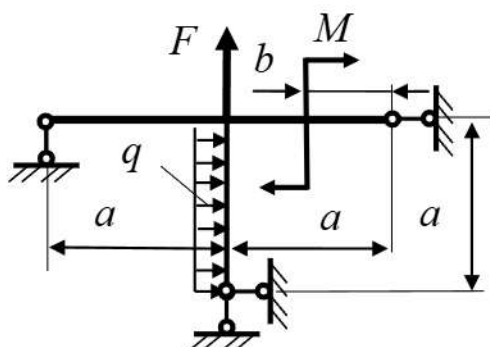


Рис. 4.2.19

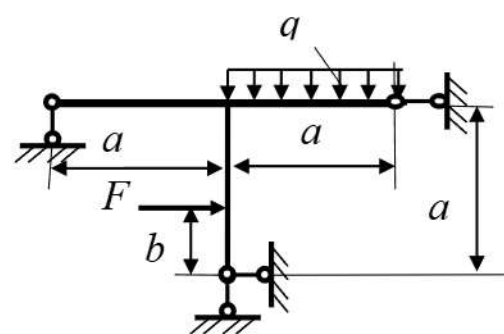


Рис. 4.2.20

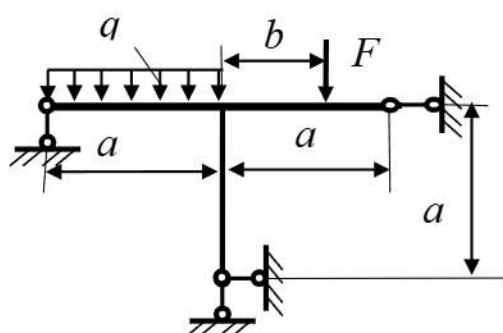


Рис. 4.2.21

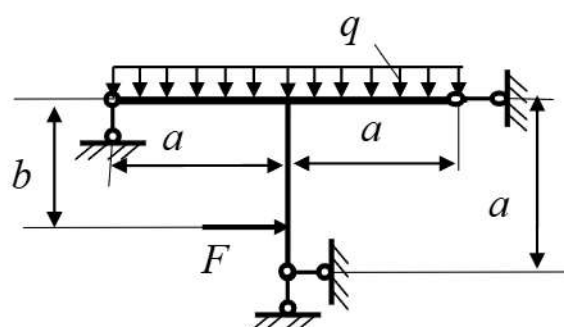


Рис. 4.2.22

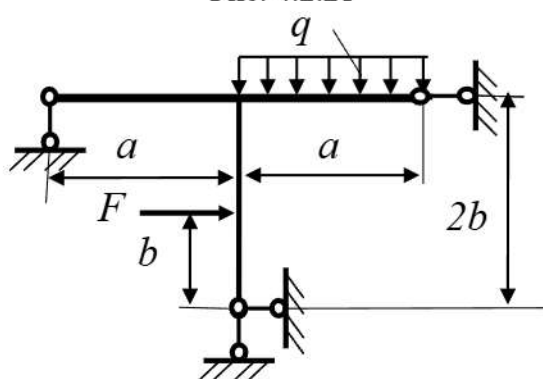


Рис. 4.2.23

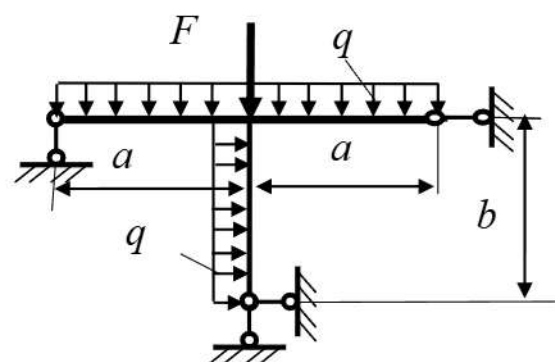


Рис. 4.2.24

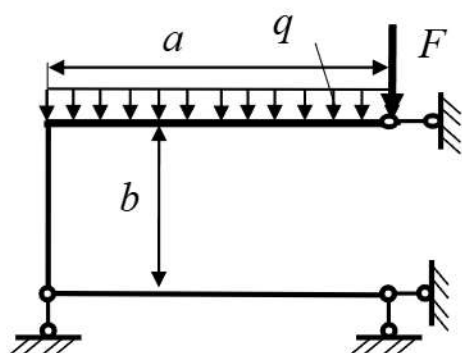


Рис. 4.2.25

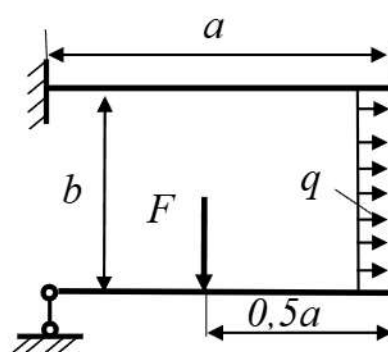


Рис. 4.2.26

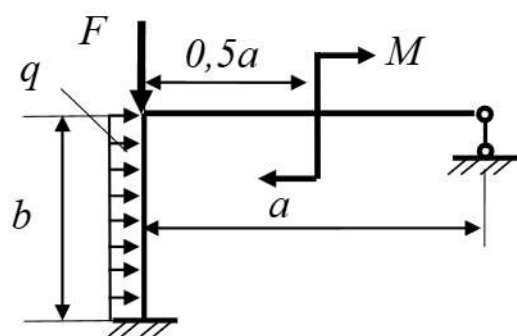


Рис. 4.2.27

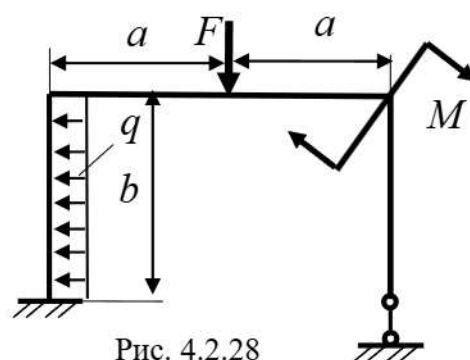


Рис. 4.2.28

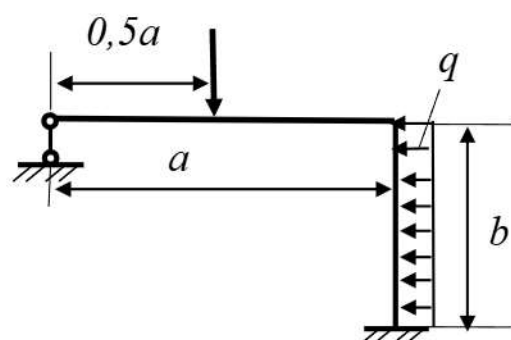


Рис. 4.2.29

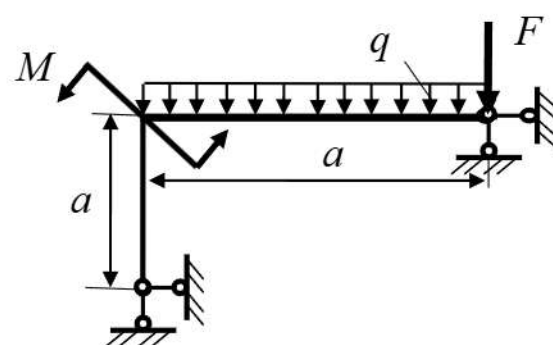


Рис. 4.2.30

Таблица 4.2

Данные для вариантов

Номер варианта (рисунка)	m , кН·м	F , кН	q , кН/м	a , м	b , м	Номер ва- рианта (ри- сунка)	m , кН·м	F , кН	q , кН/м	a , м	b , м
1 (4.2.1)	5,0	2,0	0,5	4,0	2,0	16 (4.2.16)	17,5	14,0	2,5	4,0	3,0
2 (4.2.2)	7,5	4,0	1,0	3,5	1,5	17 (4.2.17)	20,0	16,0	3,0	2,5	2,0
3 (4.2.3)	10,0	6,0	1,5	3,0	2,0	18 (4.2.18)	22,5	18,0	5,0	3,0	1,5
4 (4.2.4)	12,5	8,0	2,0	2,5	1,0	19 (4.2.19)	25,0	20,0	5,0	2,5	1,0
5 (4.2.5)	15,0	10,0	2,5	2,0	1,0	20 (4.2.20)	27,5	22,0	6,0	2,0	1,0
6 (4.2.6)	17,5	12,0	4,0	1,5	0,5	21 (4.2.21)	30,0	24,0	4,0	2,5	1,0
7 (4.2.7)	20,0	14,0	10,0	1,0	0,5	22 (4.2.22)	32,5	26,0	8,0	3,0	1,5
8 (4.2.8)	22,5	16,0	8,0	2,0	1,0	23 (4.2.23)	35,0	28,0	6,0	3,5	2,0
9 (4.2.9)	25,0	18,0	6,0	3,0	2,0	24 (4.2.24)	37,5	30,0	8,0	4,0	2,0
10 (4.2.10)	30,0	20,0	4,0	4,0	3,0	25 (4.2.25)	40,0	32,0	6,0	3,0	1,0
11 (4.2.11)	5,0	4,0	1,0	4,0	2,0	26 (4.2.26)	20,0	10,0	5,0	2,0	1,0
12 (4.2.12)	7,5	6,0	1,5	3,5	1,5	27 (4.2.27)	22,5	12,0	4,0	2,5	1,5
13 (4.2.13)	10,0	8,0	2,0	3,0	1,0	28 (4.2.28)	25,0	14,0	3,0	3,0	1,5
14 (4.2.14)	12,5	10,0	4,0	2,5	2,0	29 (4.2.29)	27,5	16,0	4,0	3,5	2,0
15 (4.2.15)	15,0	12,0	5,0	2,0	1,0	30 (4.2.30)	30,0	18,0	6,0	2,0	1,0

Примечание. Номер варианта соответствует номеру рисунка (например, в задаче 4.2 варианту 5 соответствует рис. 4.2.5).

Методические указания к решению задачи

1. Установить степень статической неопределимости рамы как разность между числом неизвестных усилий и количеством независимых уравнений равновесия статики.
2. Выбрать основную систему.
3. Преобразовать основную систему в эквивалентную.
4. Записать систему канонических уравнений по методу сил.
5. Найти перемещения (коэффициенты при неизвестных и свободные члены) энергетическим методом с применением правила Верещагина.

6. Решить систему канонических уравнений.

7. Построить эпюры N , Q , M , рассматривая эквивалентную систему.

Пример решения задачи

Исходные данные

Для заданной рамы (см. рис. 4.2.31, а) построить эпюры M , Q и N .

Решение

В данной раме пять реактивных усилий: три в жесткой заделке и два в шарнирно-неподвижной опоре. Следовательно, рама ($5 - 3 = 2$) дважды статически неопределима. Основную систему получаем, отбрасывая две связи шарнирно-неподвижной опоры. Заменяем действие связей неизвестными усилиями X_1 и X_2 ; получаем эквивалентную систему (см. рис. 4.2.31, б).

Система канонических уравнений для статически неопределимой рамы с двумя лишними неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \Delta_{1F} = 0, \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \Delta_{2F} = 0. \end{cases}$$

Определяем перемещения (коэффициенты и свободные члены) канонических уравнений. Для этого, нагружая основную систему последовательно силами $\bar{X}_1 = 1$ (см. рис. 4.2.31, в), $\bar{X}_2 = 1$ (см. рис. 4.2.31, д) и заданной нагрузкой (см. рис. 4.2.31, ж), строим соответствующие эпюры изгибающих моментов (см. рис. 4.2.31, з, е, з).

Перемножая эти эпюры по правилу Верещагина, получаем

$$\Delta_{1F} = -\frac{1}{EJ_z} \left(\frac{qb^2}{2} \cdot 2bb + \frac{1}{3} \cdot \frac{qb^2}{2} \cdot b \cdot \frac{3}{4}b \right) = -\frac{9qb^4}{8EJ_z};$$

$$\Delta_{2F} = \frac{1}{EJ_z} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{qb^2}{2} \cdot bb = \frac{qb^4}{6EJ_z};$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_z} \left(\frac{1}{2} \cdot b \cdot b \cdot \frac{2}{3} \cdot b + b \cdot 2b \cdot b \right) = \frac{7b^3}{3EJ_z};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{1}{EJ_z} \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot b \cdot b = -\frac{b^3}{2EJ_z};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ_z} \left(3 \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot b \cdot \frac{2}{3} b + b \cdot b \cdot b \right) = \frac{2b^3}{EJ_z}.$$

После подстановки

$$\begin{aligned} \frac{7b^3}{3EJ_z} X_1 - \frac{b^3}{2EJ_z} X_2 - \frac{9qb^4}{8EJ_z} &= 0; \\ -\frac{b^3}{2EJ_z} X_1 + \frac{2b^3}{EJ_z} X_2 + \frac{qb^4}{6EJ_z} &= 0 \end{aligned}$$

и после упрощений

$$\begin{aligned} 56X_1 - 12X_2 - 27qb &= 0; \\ -3X_1 + 12X_2 + qb &= 0. \end{aligned}$$

Решаем уравнения

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{26}{53} qb = \frac{26}{53} \cdot 10 \cdot 3 = 14,7 \text{ кН}; \\ X_2 &= \frac{26}{636} qb = \frac{26}{636} \cdot 10 \cdot 3 = 1,18 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Положительные значения X_1 и X_2 указывают на то, что направления этих реакций были выбраны правильно.

Теперь, рассматривая данную раму как статически определимую, можно построить суммарную эпюру изгибающих моментов M (см. рис. 4.2.31, и), а также эпюры поперечных Q (см. рис. 4.2.31, к) и продольных N (см. рис. 4.2.31, л) сил.

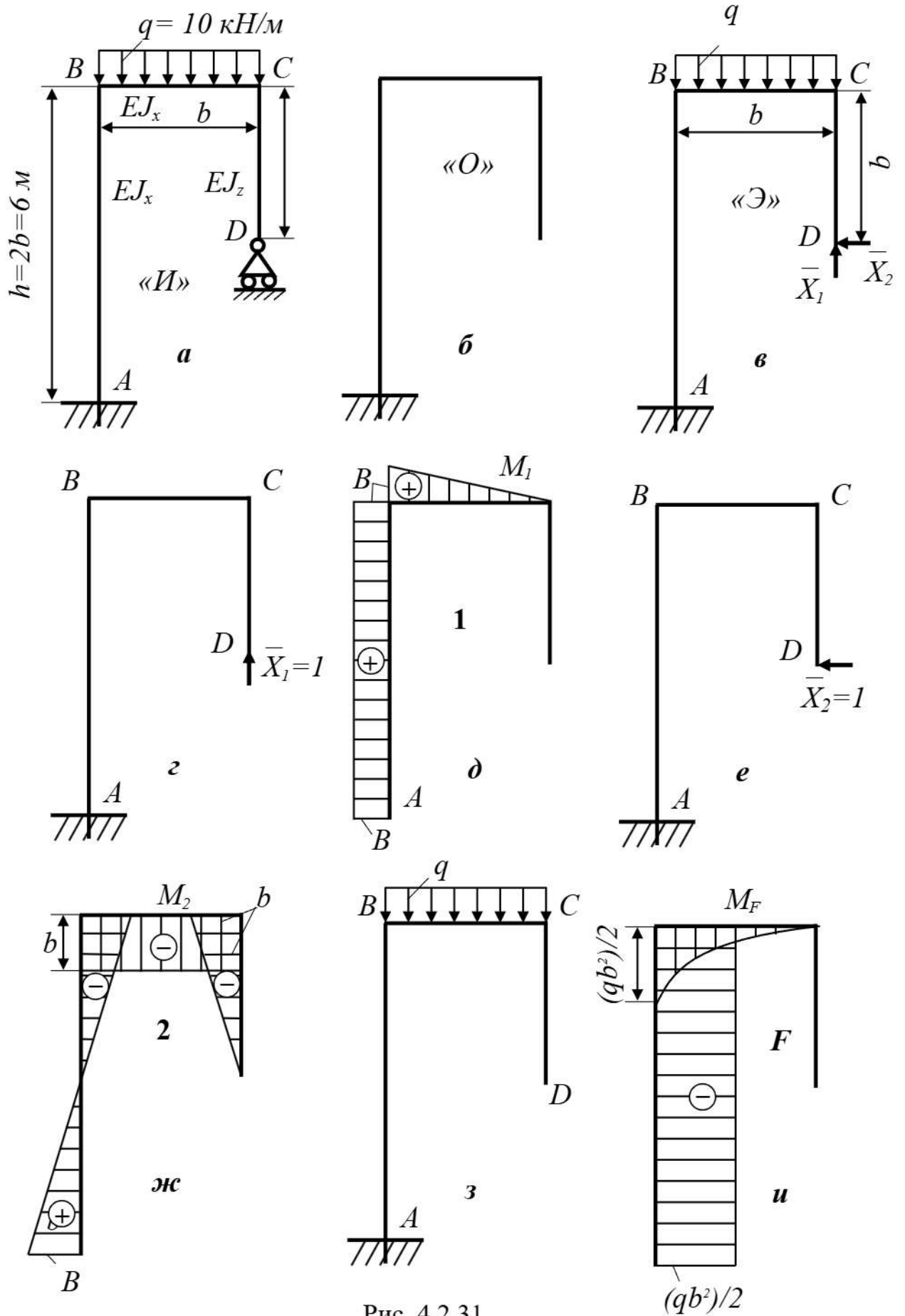


Рис. 4.2.31

(продолжение см. на с. 141)

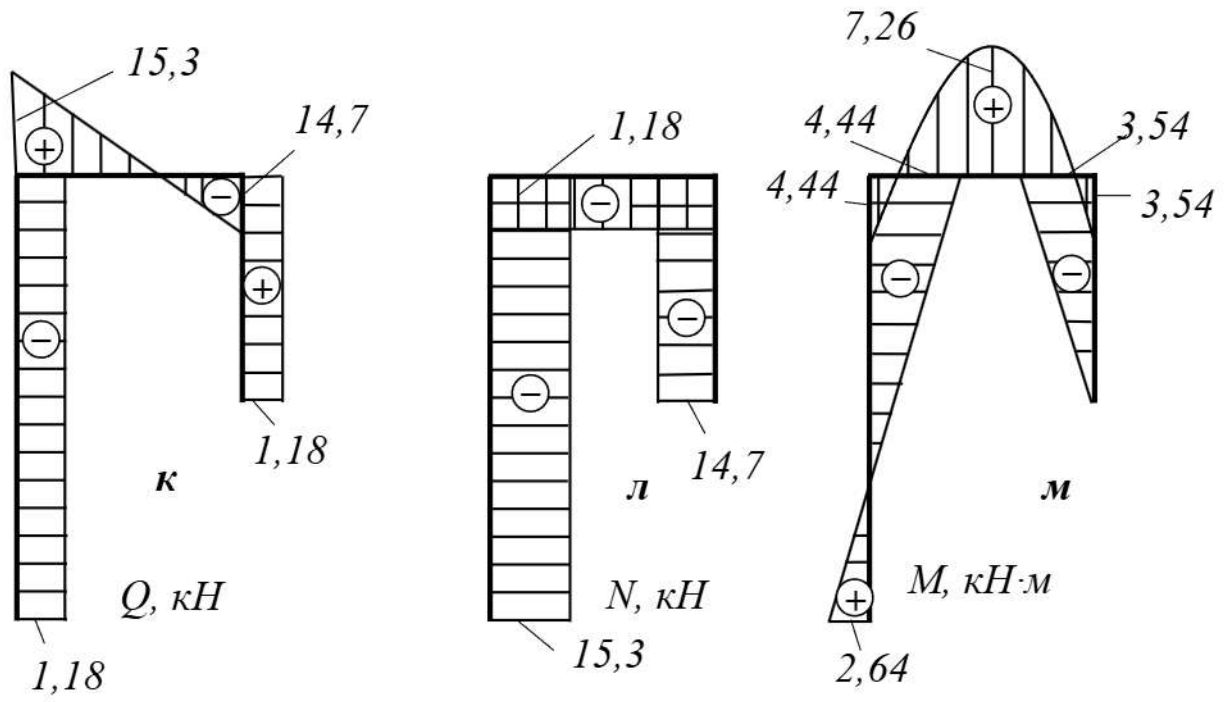


Рис. 4.2.31 (продолжение)