

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»



Школа базовой инженерной подготовки  
Отделение общетехнических дисциплин

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ЗВЕНЬЕВ МЕХАНИЗМА (ГЕОМЕТРИЯ МАСС)**

Методическое указание к выполнению лабораторно-практической работы по курсу «Механика 2»

Составитель: Горбенко В.Т.

Рецензент: Беляев А.Е.

Технический редактор: Черемискина М.С.

Томск - 2021

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

При решении целого ряда задач динамики механизмов, связанных с исследованием движения механизма (машины), определением усилий в звеньях и давлений в кинематических парах необходимо знать основные механические параметры звена, к которым относятся: вес звена  $G$ , его масса,  $m$ , положение центра масс  $S$  и момент инерции звена  $J$ .

Подобно тому, как масса является мерой инертности тела в поступательном движении, момент инерции является мерой инерции во вращательном движении.

Для уяснения того, что такое момент инерции представим, что твёрдое тело с массой  $m$  (рис.1) вращается с угловой скоростью  $\omega$  и угловым ускорением  $\varepsilon$  в плоскости, перпендикулярной оси, проходящей через неподвижную точку  $O$ . Расположенная в любой точке элементарная масса  $dm$ , удалённая от оси вращения на расстояние  $r$ . будет создавать силы инерции  $dF_u^n$  (нормальную) и  $dF_u^\tau$  (тангенциальную). Элементарный момент этих сил относительно точки  $O$  будет равен

$$dM_u = dF_u^\tau \cdot r = -dm \cdot a^\tau \cdot r = -dm \cdot \varepsilon \cdot r^2 \quad (1)$$

Где:  $a^\tau$  - тангенциальное ускорение в точке  $B$  (т.к. линия действия силы  $dF_u^n$  проходит в точку  $O$ , то момент её равен нулю).

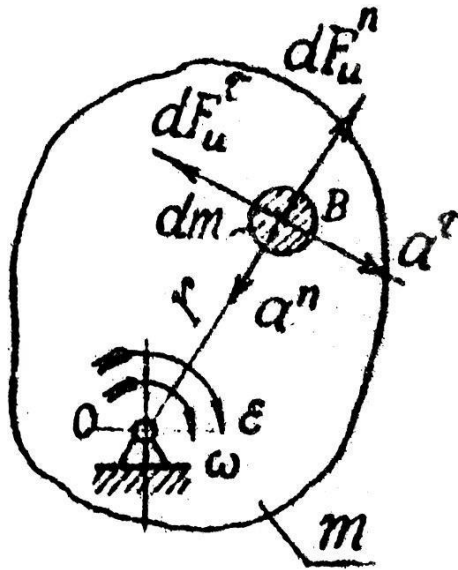


Рис. 1

Полный момент сил инерции определится как интеграл, взятый по всей массе тела, т.е.

$$M_u = \int_m -\varepsilon \cdot dm \cdot r^2 = -\varepsilon \int_m dm \cdot r^2 \quad (2)$$

Интеграл выражения (2) называется **моментом инерции** тела относительно оси, проходящей через точку  $O$  и перпендикулярной плоскости движения и обозначается  $J_O$ , т.е.

$$J_0 = \int_m dm \cdot r^2 \quad (3)$$

В инженерных расчётах, все физические величины выражаются в Международной системе СИ с основными единицами – метр (длина), килограмм (масса) и секунда (время). Поэтому размерность момента инерции в системе СИ –  $\text{кг} \cdot \text{м}^2$  (в случаях малых значений момента инерции для небольших деталей могут использоваться размерности  $\text{кг} \cdot \text{см}^2$ ,  $\text{г} \cdot \text{см}^2$  или даже  $\text{г} \cdot \text{мм}^2$ ).

Раньше применялась техническая система МКГСС с основными единицами – метр, килограмм-сила, секунда. Момент инерции в этой системе выражается в  $\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$  ( $1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 = 0.102 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$ ,  $1 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2 = 9,80665 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \approx 9,81 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ )

Заметим, что в этой работе речь идёт о моменте инерции **массы**, так как есть ещё моменты инерции **сечения**, например, центробежный, осевой, полярный, размерность которых – линейная величина в четвёртой степени –  $\text{см}^4$ ,  $\text{мм}^4$ .

Отношение  $\frac{J}{m} = r_u^2$ . Величина  $r_u$  называется **радиусом инерции**, т.е. это расстояние от рассматриваемой оси до точки, в которой нужно сосредоточить массу всей системы, чтобы момент инерции её относительно данной оси равнялся моменту инерции тела или системы относительно той же оси.

Заметим, что через любую точку можно провести неограниченное число осей и моменты инерции (для несимметричного тела) относительно каждой из них будут разными. В практике чаще всего бывает необходимым знать величину момента инерции относительно оси, перпендикулярной плоскости движения. Обычно эту ось проводят через центр тяжести звена  $S$ . В этом случае момент инерции тела будем обозначать  $J_S$ .

Подставляя выражение (3) в (2), получим:

$$M_u = -J_0 \cdot \varepsilon \quad (4)$$

т.е. полный момент от сил инерции тела равен произведению момента инерции на угловое ускорение. Момент от сил инерции является величиной векторной. Знак минус показывает, что момент от сил инерции имеет направление, противоположное угловому ускорению.

Массу звена (а, следовательно, и его вес), положение его центра тяжести и момент инерции могут быть определены аналитически (расчётным путём), экспериментально, либо по эмпирическим зависимостям, полученным на основании статических данных.

Аналитический метод определения механических параметров звена обычно применяют при расчёте и проектировании новых машин, когда детали выполнены в чертеже. Экспериментальный метод может быть применён лишь при наличии деталей в натуре.

Рассмотрим методы аналитического и экспериментального определения указанных выше механических параметров звена.

## АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД

**1. Масса звена** определится как произведение его объёма на массовую плотность

$$m = V \cdot \rho \text{ [кг, г]} \quad (5)$$

где  $V$  – объём [см<sup>3</sup>]

$\rho$  - плотность материала [кг\см<sup>3</sup>, г\см<sup>3</sup>]

Для деталей сложной конфигурации:

$$m = \sum V_i \cdot \rho \quad (6)$$

где  $V_i$  - объем простейших фигур (цилиндров, призм, шаров и т.д.).

Если деталь составная и выполнена из различных материалов, то в этом случае

$$m = \sum V_i \cdot \rho_i \quad (7)$$

где  $\rho_i$  - плотность материала элементов детали.

Вес звена определится из выражения:

$$G = m \cdot g \text{ [Н, кН]},$$

где  $g = 9.81 \text{ м/с}^2$  – ускорение свободного падения.

**2. Центр тяжести** звена (твёрдого тела), как известно из теоретической механики, можно определить по формулам:

$$\begin{aligned} X_s &= \frac{\sum m_i \cdot x_i}{m} \\ Y_s &= \frac{\sum m_i \cdot y_i}{m} \\ Z_s &= \frac{\sum m_i \cdot z_i}{m} \end{aligned} \quad (8)$$

Где  $X_s, Y_s, Z_s$  – координаты центра тяжести звена;

$m$  – общая масса;

$m_i$  – масса отдельных составляющих звена;

$x_i, y_i, z_i$  – координаты центров тяжести отдельных элементов звена (рис.2)

На рисунке 3 изображён шатун двигателя внутреннего сгорания. Разбив его на простейшие фигуры (два полых цилиндра, призма) и зная размеры элементов, определим

массы  $m_1, m_2, m_3$ . Т.к. положения центров тяжести этих фигур известны, и они лежат на прямой  $AB$  (т.е.  $Y_s=Z_s=0$ ), то центр тяжести всего звена найдём из выражения

$$X_s = \frac{\sum m_i \cdot x_i}{m} = \frac{m_2 \cdot c + m_3 \cdot l}{m_1 + m_2 + m_3}$$

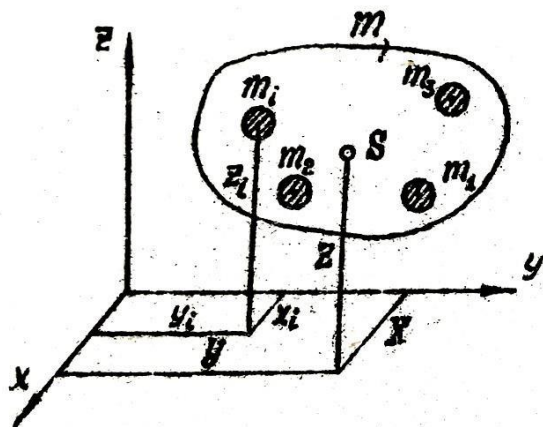


Рис. 2

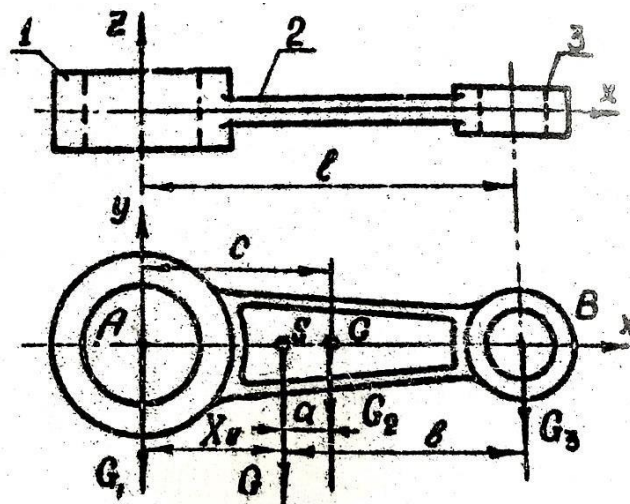


Рис. 3

**3. Момент инерции.** Если звено имеет правильную геометрическую форму, то момент инерции его может быть определён по формуле (3). В таблице 1 приведены моменты инерции некоторых тел правильной формы относительно осей, проходящих через центр тяжести.

Если деталь имеет сложную форму, момент инерции её определяется по формуле Эйлера:

$$J_s = \sum (J_{si} + m_i l^2) \quad (9)$$

Где:  $J_s$  – момент инерции всей детали относительно оси, проходящей через её центр тяжести;

$J_{si}$  – момент инерции части детали, имеющей простую геометрическую форму относительно оси, проходящей через её центр тяжести;

$l$  – расстояние от центра тяжести данной фигуры до оси, относительно которой определяется момент инерции детали.

Так, для детали, изображённой на рисунке 3 момент инерции её относительно оси, проходящей через общий центр тяжести  $S$  будет:

$$J_s = (J_1 + m_1 \cdot X_s^2) + (J_2 + m_2 \cdot a^2) + (J_3 + m_3 \cdot b^2)$$

Где  $J_1, J_2, J_3$  – моменты инерции левой и правой головок (полые цилиндры) и тела шатуна (призмы) относительно осей, проходящих через их центры тяжести;

$m_1, m_2, m_3$  – массы элементов шатуна.

По аналогичной формуле определяется момент инерции относительно параллельной оси. Например, для той же детали момент инерции относительно оси, проходящей через точку  $A$  определяется как

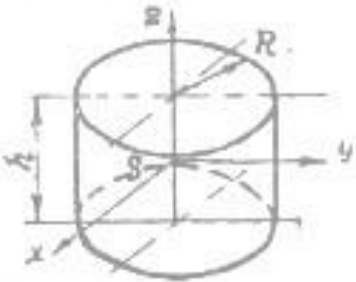
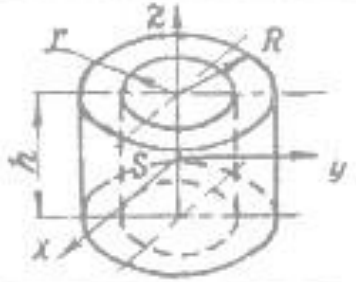
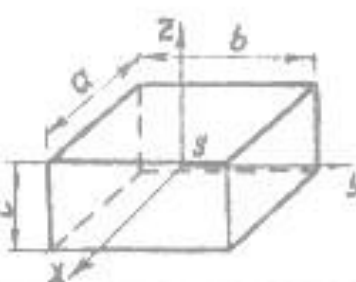
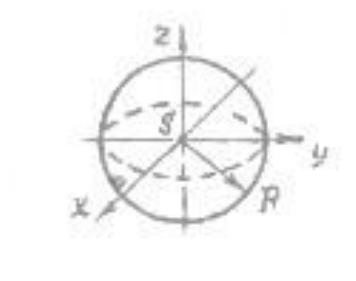
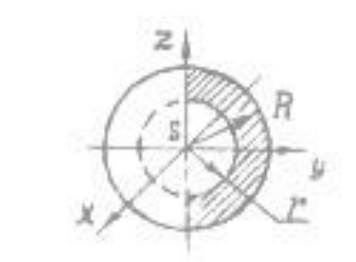
$$J_A = (J_S + m \cdot X_S^2) \quad (10)$$

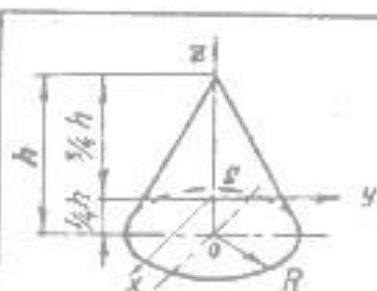
(Здесь  $m$  – масса всей детали).

Во многих случаях звенья механизма имеют более сложную конфигурацию и тогда определение момента инерции их аналитическим путём представляет значительные трудности. В таких случаях моменты инерции определяются по приближённым формулам, образование которых основано на замене сложной конфигурации реальной детали более простой, подходящей к табличным значениям моментов инерции. Например, заменяющей формой для различных удлинённых звеньев (шатунных, кривошипов, рычагов и т.п.) можно принять стержень постоянного сечения, приближённая формула момента инерции для шестерен, шкивов, маховиков выводится из предположения, что вся масса звена расположена на одном радиусе, а затем вводится поправочный коэффициент.

Наряду с аналитическими методами определения геометрических параметров звеньев применяются и экспериментальные методы, которые для звеньев сложной конфигурации дают результаты более точные, чем результаты, полученные по приближённым (и даже по точным) формулам и поэтому они находят широкое применение при проведении уточнённых расчётов машин.

Таблица 1 – Моменты инерции некоторых тел правильной геометрической формы

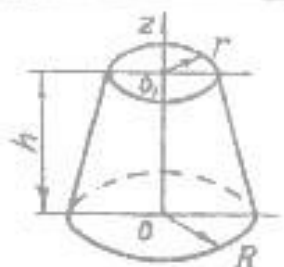
Фигура	Формула момента инерции
	<p>Сплошной цилиндр.</p> $J_x = J_y = \frac{\pi}{12} (3R^2 + h^2);$ $J_z = \frac{\pi R^2}{2}.$
	<p>Полый цилиндр.</p> $J_x = J_y = \frac{\pi}{12} (3R^2 + 3r^2 + h^2);$ $J_z = \frac{\pi}{2} (R^2 + r^2).$
	<p>Прямоугольный параллелепипед.</p> $J_x = \frac{m}{12} (b^2 + c^2);$ $J_y = \frac{m}{12} (a^2 + c^2);$ $J_z = \frac{m}{12} (a^2 + b^2).$
	<p>Шар.</p> $J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} mR^2.$
	<p>Полый шар.</p> $J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} m \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}.$



Прямой круглый конус.

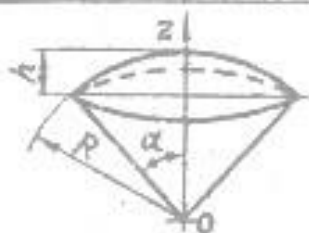
$$J_x = J_y = \frac{3}{20} m (R^2 + \frac{h^2}{4});$$

$$J_z = \frac{3}{10} m R^2$$



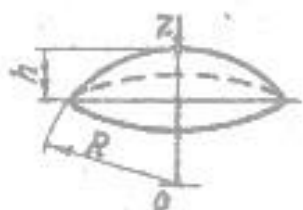
Прямой усеченный круглый конус.

$$J_z = \frac{3}{10} m \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}.$$



Шаровой сектор.

$$J_z = \frac{m h}{5} (3R - h) = \\ = \frac{m R^2}{5} (1 - \cos \alpha)(2 + \cos \alpha).$$



Шаровой сегмент.

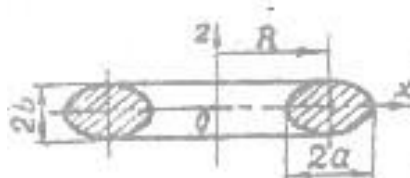
$$J_z = \frac{m h}{10} \cdot \frac{20 R^3 - 15 R h + 3 h^2}{3 R - h}.$$



Кольцо (тор) круглого сечения.

$$J_z = m (R^2 + \frac{3}{4} r^2);$$

$$J_x = m (\frac{1}{2} R^2 + \frac{5}{8} r^2).$$



Кольцо (тор) эллиптического сечения.

$$J_z = m (R^2 + \frac{3}{4} a^2);$$

$$J_x = m (\frac{1}{2} R^2 + \frac{3}{8} a^2 + \frac{1}{4} b^2).$$

$m$  — масса.

В системе СИ  $m$  — кг,  $J$  — кг·м<sup>2</sup>.  
В технич. системе  $m$  — кг·м·с<sup>-2</sup>,  $J$  — кг·м·с<sup>2</sup>.  
 $1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 = 0,102 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$ ,  $1 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2 = 9,81 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .



## ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### Определение массы звена, положения его центра тяжести и момента инерции аналитическим путём

Необходимые инструменты: штангенциркуль, линейка, кронциркуль.

#### Порядок выполнения работы

1. Согласно эскиза детали замените сложную конфигурацию детали простыми правильной геометрической формы.
2. Определить вес, положение центра тяжести и момент инерции простых фигур, заменяющих сложную конфигурацию детали.
3. Найти общий вес, положение общего центра тяжести и момент инерции детали относительно оси, проходящей через центр тяжести и перпендикулярной плоскости движения детали.
4. Составить отчёт.

