

## Лекция 10. Адаптивные сезонные модели (АСМ)

### Введение. Когда сезонность непостоянна

На прошлой лекции мы изучали модели ARIMA, которые предполагают, что сезонные паттерны **постоянны** во времени. Но в реальности сезонность часто меняется: мода на подарки смещается, климатические паттерны изменяются, потребительские привычки эволюционируют.

**Адаптивные сезонные модели** - это класс моделей, которые позволяют сезонным компонентам **меняться с течением времени**, адаптируясь к новым данным.

**Ключевая идея:** вместо того чтобы считать сезонность фиксированной, мы позволяем ей медленно изменяться, "обучаясь" на новых наблюдениях.

### 1. Базовые компоненты адаптивных моделей

Любая адаптивная модель включает три компоненты:

- **Уровень ( $L_t$ )** — текущее значение ряда без сезонности и тренда
- **Тренд ( $T_t$ )** — текущая скорость роста/падения
- **Сезонность ( $S_t$ )** — сезонная компонента для текущего периода

**Особенность АСМ:** все три компоненты **рекуррентно обновляются** с приходом каждого нового наблюдения.

### 2. Модель Хольта-Винтерса - классика адаптивного прогнозирования

Это самая известная адаптивная сезонная модель. Существует в двух вариантах:

### 2.1. Аддитивная модель Хольта-Винтерса

Используется, когда сезонные колебания **постоянны по амплитуде**.

**Уравнения обновления:**

- **Уровень:**  $L_t = \alpha(Y_t - S_{t-s}) + (1 - \alpha)(L_{t-1} + T_{t-1})$
- **Тренд:**  $T_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1}$
- **Сезонность:**  $S_t = \gamma(Y_t - L_t) + (1 - \gamma)S_{t-s}$
- **Прогноз на k периодов:**  $\hat{Y}_{t+k} = L_t + k * T_t + S_{t-s+k}$

где:

- s — длина сезонного цикла (12 для месяцев, 4 для кварталов)
- $\alpha, \beta, \gamma$  — параметры сглаживания ( $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1$ )

### 2.2. Мультипликативная модель Хольта-Винтерса

Используется, когда сезонные колебания **пропорциональны уровню ряда** (амплитуда растет с ростом ряда).

**Уравнения обновления:**

- **Уровень:**  $L_t = \alpha(Y_t/S_{t-s}) + (1 - \alpha)(L_{t-1} + T_{t-1})$
- **Тренд:**  $T_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1}$
- **Сезонность:**  $S_t = \gamma(Y_t/L_t) + (1 - \gamma)S_{t-s}$
- **Прогноз на k периодов:**  $\hat{Y}_{t+k} = (L_t + k * T_t) * S_{t-s+k}$

## 3. Интерпретация параметров сглаживания

- **$\alpha$  (сглаживание уровня):**
  - Высокое  $\alpha \rightarrow$  модель быстро реагирует на новые данные
  - Низкое  $\alpha \rightarrow$  модель более инерционна, сильнее сглаживает шум
- **$\beta$  (сглаживание тренда):**

- Высокое  $\beta \rightarrow$  тренд быстро адаптируется к изменениям
- Низкое  $\beta \rightarrow$  тренд более стабилен во времени
- **$\gamma$  (сглаживание сезонности):**
  - Высокое  $\gamma \rightarrow$  сезонность быстро адаптируется к изменениям паттерна
  - Низкое  $\gamma \rightarrow$  сезонность более стабильна, медленно меняется

**Эмпирическое правило:** Обычно  $0.1 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 0.3$

#### 4. Выбор между аддитивной и мультипликативной моделью

**Критерий выбора:** анализ графика временного ряда.

- **Аддитивная модель:** если амплитуда сезонных колебаний примерно постоянна
- **Мультипликативная модель:** если амплитуда сезонных колебаний растет/падает с ростом/падением уровня ряда

#### 5. Оценка параметров и инициализация

##### 5.1. Инициализация компонент

- **Уровень и тренд:** оцениваются с помощью линейной регрессии по первым 2-3 сезонам
- **Сезонность:** рассчитываются как средние отклонения от тренда для каждого сезона

##### 5.2. Оптимизация параметров

Параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  выбираются путем минимизации **суммы квадратов ошибок прогноза на один шаг:**

$$\min \sum (Y_t - \hat{Y}_{\{t|t-1\}})^2$$

где  $\hat{Y}_{t|t-1}$  — прогноз на момент  $t$ , сделанный в момент  $t-1$

## 6. Практический пример: Прогноз продаж мороженого

**Данные:** Ежемесячные продажи мороженого за 3 года (сильная летняя сезонность).

### Шаги анализа:

1. **Визуальный анализ:** Видна растущая тенденция и сезонность с пиком летом. Амплитуда колебаний растет → выбираем мультипликативную модель.

2. **Инициализация:**

- По первым 12 месяцам оцениваем начальный уровень  $L_0 = 1000$  и тренд  $T_0 = 20$

- Начальные сезонные коэффициенты: Январь=0.8, Февраль=0.9, ..., Июль=1.8, ..., Декабрь=0.7

3. **Оптимизация параметров:**

- Методом перебора находим оптимальные параметры:  $\alpha=0.2$ ,  $\beta=0.1$ ,  $\gamma=0.3$

4. **Рекуррентное обновление (пример для июня):**

- $L_{\text{июнь}} = 0.2 * (1500 / 1.8) + 0.8 * (1100 + 25) = 1167$

- $T_{\text{июнь}} = 0.1 * (1167 - 1100) + 0.9 * 25 = 29$

- $S_{\text{июнь}} = 0.3 * (1500 / 1167) + 0.7 * 1.8 = 1.75$

5. **Прогноз на следующий июль:**

- $\hat{Y}_{\text{июль\_след\_год}} = (1167 + 12 * 29) * 1.75 = 2630$

## 7. Преимущества и ограничения АСМ

### Преимущества:

- **Простота интерпретации**
- **Высокая точность** для рядов с выраженной сезонностью
- **Вычислительная эффективность**
- **Автоматическая адаптация** к изменяющимся паттернам
- **Устойчивость** к пропущенным наблюдениям

#### Ограничения:

- Требуется **ручного выбора** типа сезонности (аддитивная/мультипликативная)
- Может плохо работать при **резких структурных сдвигах**
- **Не учитывает** автокорреляцию в остатках
- Сложность выбора **оптимальных параметров** сглаживания

## 8. Сравнение с ARIMA-моделями

Характеристика	Модель Хольта-Винтерса	Сезонная ARIMA
<b>Гибкость</b>	Ограниченная форма	Очень гибкая
<b>Интерпретируемость</b>	Высокая	Низкая
<b>Вычислительная сложность</b>	Низкая	Высокая
<b>Адаптивность</b>	Высокая	Требуется переоценки
<b>Автоматизация</b>	Сложная	Возможна

**Практическое правило:** Хольта-Винтерс часто показывает лучшие результаты для **краткосрочных прогнозов** рядов с четкой сезонностью.

## Резюме

1. **Адаптивные сезонные модели** позволяют сезонности меняться со временем.
2. **Модель Хольта-Винтерса** - классический представитель АСМ.
3. **Аддитивная модель** для постоянной амплитуды, **мультипликативная** - для изменяющейся.
4. **Параметры сглаживания  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$**  определяют скорость адаптации модели.
5. **Простота и интерпретируемость** - главные преимущества АСМ.
6. Модель особенно полезна для **оперативного прогнозирования** бизнес-показателей.

## Вопросы для самопроверки:

1. В какой бизнес-ситуации вы бы выбрали мультипликативную модель Хольта-Винтерса вместо аддитивной?
2. Что произойдет с прогнозами, если установить параметр  $\gamma = 0$ ?
3. Почему модель Хольта-Винтерса может быть предпочтительнее сезонной ARIMA для еженедельного прогноза продаж в розничной сети?