

## Лекция 7. Автокорреляция случайного члена

### Введение. Когда ошибки "помнят" о прошлом

До сих пор мы предполагали, что ошибки в разных наблюдениях не коррелированы:  $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ . Это предположение об **отсутствии автокорреляции**. Однако, когда данные представляют собой **временные ряды** (наблюдения, идущие последовательно во времени), это предположение часто нарушается.

**Автокорреляция (серийная корреляция)** - это корреляция случайного члена текущего наблюдения со случайными членами предыдущих наблюдений.

**Аналогия:** Представьте, что вы каждый день предсказываете температуру в полдень. Если сегодня вы ошиблись в сторону потепления, то завтра, скорее всего, тоже ошибетесь в ту же сторону, потому что погода - инерционный процесс. **Ошибки предсказания связаны между собой.** То же самое происходит в экономике: кризис или бум не заканчиваются мгновенно.

### 1. Что такое автокорреляция?

**Формальное определение:** Нарушение 5-й предпосылки КЛМР:

$$\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j | X) \neq 0 \text{ для некоторых } i \neq j.$$

Чаще всего рассматривают **автокорреляцию 1-го порядка**, когда текущая ошибка зависит от ошибки предыдущего периода:

$$\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + u_t$$

где:

- $\rho$  - коэффициент автокорреляции ( $-1 < \rho < 1$ ).

- $u_t$  - "белый шум", случайная компонента, удовлетворяющая всем предпосылкам КЛМР.

### Типы автокорреляции:

**Положительная автокорреляция ( $\rho > 0$ ):** наиболее распространенный тип в экономике. Положительная ошибка влечет за собой положительную, отрицательная – отрицательную (Рисунок 7.1).

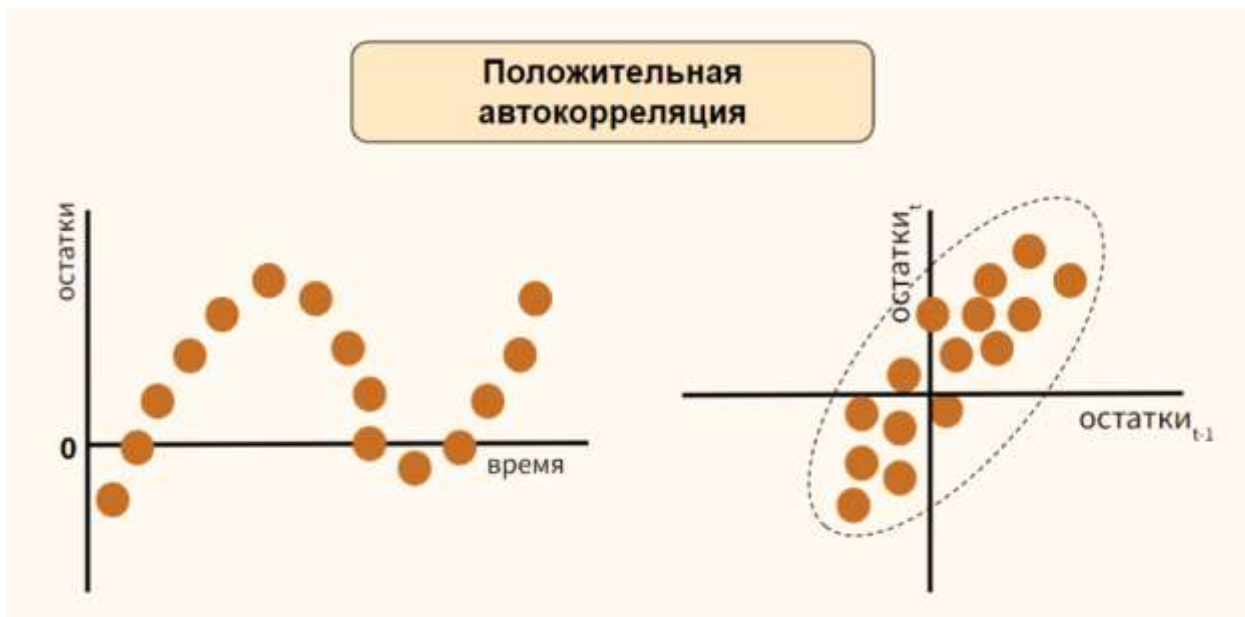


Рисунок 7.1. Положительная автокорреляция

**Отрицательная автокорреляция ( $\rho < 0$ ):** встречается реже. Положительная ошибка сменяется отрицательной, и наоборот (Рисунок 7.2).

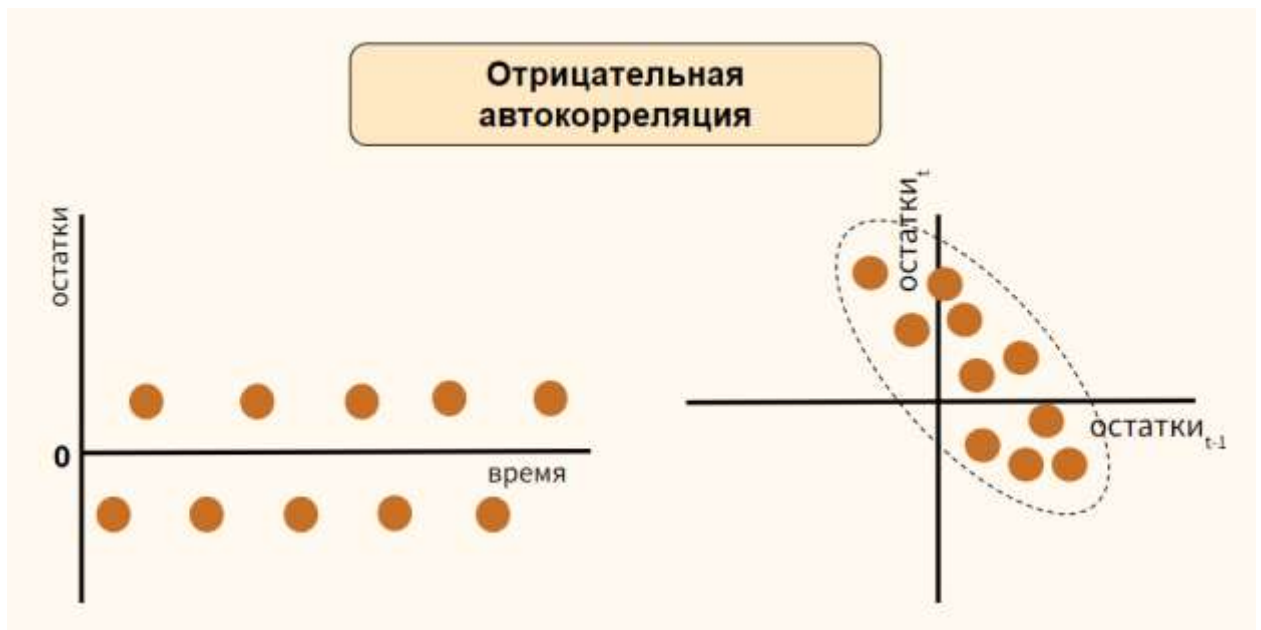


Рисунок 7.2. Отрицательная автокорреляция

## 2. Причины и последствия автокорреляции

### 2.1. Типичные причины:

- **Инерционность экономических процессов.** (Инфляция, безработица, ВВП).
- **Эффект паутины в экономике.** (Производство сельхозпродукции: высокие цены → увеличение посевов → перепроизводство → падение цен).
- **Пропуск важной объясняющей переменной.**
- **Неправильная функциональная форма модели.**
- **Интерполяция и сглаживание данных.**

### 2.2. Последствия (аналогичны гетероскедастичности):

1. **Оценки коэффициентов ( $b$ ) остаются несмещенными и состоятельными.**
2. **Стандартные ошибки коэффициентов становятся смещенными.**
  - Обычные формулы  $se(b)$  неверны.
  - При **положительной** автокорреляции стандартные ошибки МНК **занижаются**.

- **t-статистики завышаются.**
- **Доверительные интервалы** становятся уже, чем должны быть.
- **Мы чаще отвергаем нулевую гипотезу, когда она верна (Ошибка I рода).**

**Итог:** Мы можем принять незначимый коэффициент за значимый.

### 3. Обнаружение автокорреляции

#### 3.1. Графический анализ

- **График остатков от времени:** строим остатки  $e_t$  против времени  $t$  (Рисунок 7.1).
- **Что ищем?** Не случайный "белый шум", а циклические паттерны, волны или тенденцию.

#### 3.2. Статистические тесты

##### А. Тест Дарбина-Уотсона (Durbin-Watson Test)

- **Назначение:** Обнаружение автокорреляции **1-го порядка**.
- **Статистика:**  $d = \sum (e_t - e_{t-1})^2 / \sum e_t^2$
- **Как интерпретировать?**
  - $d \approx 2 \rightarrow$  нет автокорреляции.
  - $d \rightarrow 0 \rightarrow$  сильная **положительная** автокорреляция.
  - $d \rightarrow 4 \rightarrow$  сильная **отрицательная** автокорреляция.
- **Процедура:** сравниваем рассчитанное  $d$  с табличными критическими значениями.

##### В. Тест Бреуша-Годфрей (Breusch-Godfrey Test) — более общий и мощный

- **Преимущества:**
  - Проверяет автокорреляцию **высоких порядков** (например, квартальные данные могут зависеть от прошлого года).
  - Работает при наличии лагированной зависимой переменной ( $Y_{t-k}$ ) в правой части модели.

- **Шаги:**

1. Оцениваем исходную регрессию, получаем остатки  $e_t$ .
2. Оцениваем вспомогательную регрессию:  

$$e_t = \delta_0 + \delta_1 X_{t-1} + \dots + \delta_p X_{t-p} + \phi_1 e_{t-1} + \phi_2 e_{t-2} + \dots + \phi_p e_{t-p} + u_t$$
3. Нулевая гипотеза  $H_0$ : **нет автокорреляции** до порядка  $p$  ( $\phi_1 = \phi_2 = \dots = \phi_p = 0$ ).
4. Используем статистику  $LM = (n-p) \cdot R^2 \sim \chi^2_p$ .
5. Если  $LM > \chi^2_{\text{крит}}$ , **отвергаем  $H_0$**  — есть автокорреляция.

#### 4. Методы борьбы с автокорреляцией

##### 4.1. Обобщенный метод наименьших квадратов (ОМНК / GLS)

Если структура автокорреляции известна (например,  $\rho$ ), можно преобразовать модель, чтобы избавиться от нее.

- **Преобразование Прайса-Уинстена:** итеративная процедура для оценки  $\rho$  и параметров модели одновременно.
  - Исходная модель:  $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$ , где  $\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + u_t$
  - Лагируем исходную модель на один период:  $Y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 X_{t-1} + \varepsilon_{t-1}$
  - Умножаем лагированную модель на  $\rho$ :  $\rho Y_{t-1} = \rho \beta_0 + \rho \beta_1 X_{t-1} + \rho \varepsilon_{t-1}$
  - Вычитаем из исходной модели:  $Y_t - \rho Y_{t-1} = \beta_0(1-\rho) + \beta_1(X_t - \rho X_{t-1}) + (\varepsilon_t - \rho \varepsilon_{t-1})$
  - Так как  $\varepsilon_t - \rho \varepsilon_{t-1} = u_t$  (белый шум), получаем модель без автокорреляции.
  -

##### 4.2. Робастные стандартные ошибки (стандартные ошибки Ньюи-Уэста)

**Современный и самый популярный подход.** Аналог ошибок Уайта для автокорреляции.

- **Идея:** мы не меняем МНК-оценки коэффициентов ( $b$ ), но пересчитываем их стандартные ошибки так, чтобы они были состоятельными при наличии **и автокорреляции, и гетероскедастичности**.
- **Преимущества:**
  - Не требует точного знания структуры автокорреляции.
  - Очень гибкий метод.
  - Реализован во всех современных эконометрических пакетах.
- **Важно:** Эти ошибки также называются **НАС-оценками** (Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent).

#### 4.3. Переспецификация модели

- Включение в модель лагированной зависимой переменной  $Y_{t-1}$  как регрессора.
- Включение пропущенных переменных, которые могут быть причиной автокорреляции.
- Смена функциональной формы.
- 

#### 5. Практический пример в три шага

**Данные:** Ежеквартальный ВВП страны за 10 лет.

##### 1. Оцениваем модель МНК:

$$\text{ВВП}_t = b_0 + b_1 * \text{ПромПроизводство}_t + e_t$$

Получаем:  $b_1 = 0.8$  ( $t = 8.5$ ,  $p < 0.001$ ). Коэффициент значим.

##### 2. Проверяем на автокорреляцию (Тест Бреуша-Годфри):

- Строим график остатков от времени: видна волнообразная картина.
- Проводим тест Б-Г для автокорреляции 1-го и 2-го порядка:  $LM = 12.4$ ,  $p\text{-value} = 0.002$ .
- **Вывод:** Автокорреляция присутствует.

### 3. Принимаем меры (Робастские ошибки Ньюи-Уэста):

- Пересчитываем стандартные ошибки. Новая  $se(b_{\beta})$  больше старой.
- Новая t-статистика:  $t = 4.8$ ,  $p\text{-value} = 0.0001$ .
- **Итоговый вывод:** Коэффициент  $b_{\beta}$  по-прежнему статистически значим, но его значимость была переоценена обычным МНК из-за автокорреляции.

## Резюме

1. **Автокорреляция** — это корреляция ошибок во времени, характерная для временных рядов.
2. **Основная проблема** — занижение стандартных ошибок МНК и, как следствие, завышение значимости коэффициентов.
3. **Обнаружить** ее можно с помощью графиков остатков во времени и формальных тестов (Дарбина-Уотсона, Бреуша-Годфри).
4. **Решить проблему** проще всего с помощью **робастских стандартных ошибок Ньюи-Уэста (НАС)**, которые делают выводы корректными.
5. Более сложные методы (**ОМНК, преобразование Прайса-Уинстена**) могут повысить эффективность, но требуют знания структуры автокорреляции.

**На следующей лекции:** Мы начнем большую тему **временных рядов** и изучим такие понятия, как стационарность, единичные корни и коинтеграция.

**Вопросы для самопроверки:**

1. Почему наличие положительной автокорреляции делает обычные  $t$ -статистики слишком оптимистичными?
2. В чем главное преимущество теста Бреуша-Годфри перед тестом Дарбина-Уотсона?
3. В какой ситуации использование лагированной зависимой переменной  $Y_{t-k}$  в правой части модели может быть особенно оправданным?