

"В июне 1794 года Ж.Фурье стал президентом революционного комитета в г. Осер. После этого Фурье направился в Париж на встречу с Робеспьером, которая не была успешной, т.к. 4 июля, сразу по возвращению в Осер, он был арестован. Он уже ожидал гильотины, когда в результате переворота 9 термидора Робеспьер был арестован и казнён, после чего Фурье был освобождён." Из биографии Жана Батиста Жозефа Фурье (1768-1830)/

ТЕМА 5

НЕСИНУСОИДАЛЬНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ И ТОКИ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

В 1807 году на заседании Французской академии в присутствии Лапласа, Лагранжа и Лежандра инженер Ж.Б.Ж.Фурье высказал смелое предположение, что любая периодическая функция ($u(t)$) с периодом T может быть представлена бесконечным рядом в следующей *синусно-косинусной* форме:

$$u(t) = U_{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} C_{(k)} \cos(\omega_k t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_{(k)} \sin(\omega_k t), \quad \text{где } \omega_k = k\omega_1, \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

$$U_{(0)} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt, \quad C_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos(\omega_k t) dt, \quad B_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin(\omega_k t) dt.$$

Здесь мы воспользуемся *синусной* формой ряда Фурье. Расчет линейной электрической цепи, в которой действует один или несколько *несинусоидальных периодических* э.д.с. и источников тока, может быть выполнен в следующие три этапа (см. задачи 5.1 и 5.2):

1. Разложение э.д.с. и источников тока на постоянную и синусоидальные составляющие (получение *дискретного спектра* сигнала):

$$u(t) = U_{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} u_{(k)}(t) = U_{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} U_{m(k)} \sin(\omega_k t + \psi_{(k)}),$$

$$U_{m(k)} = \sqrt{B_k^2 + C_k^2},$$

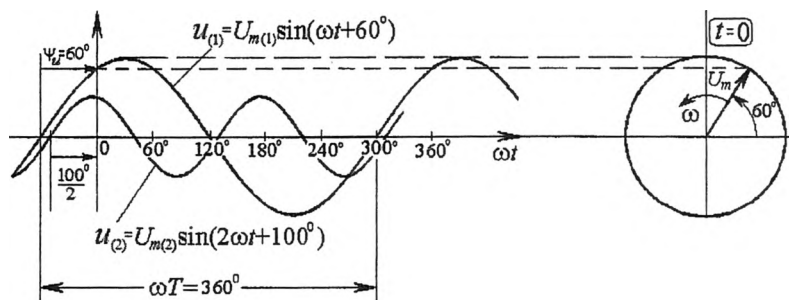
$$\psi_{(k)} = \begin{cases} \arctg \frac{C_k}{B_k} & \text{при } B_k > 0 \\ \pi + \arctg \frac{C_k}{B_k} & \text{при } B_k < 0 \end{cases},$$

2. Расчет токов и напряжений в цепи от каждой из **составляющих** (*гармоник*) в отдельности (реализация *принципа наложения*).

3. Совместное рассмотрение (*суммирование*) решений, полученных для каждой из **составляющих** (с целью получения кривых токов, напряжений, вычисления мощностей и т.д.). На практике этот этап, как правило, реализуется *приближенно*: приходится ограничиваться *конечным* числом гармоник.

Еще один путь решения рассматриваемых проблем – применение **дискретного преобразования Фурье**, широко используемого в настоящее время. Ему посвящены задачи 5.3 - 5.5. В задаче 5.6 этот метод используется для определения реакции цепи при действии *одиночного импульса*.

Замечание. Поскольку период k -й гармоники равен $T_k = T / k$, то при ее изображении на графике, в котором по оси абсцисс отложено ωt (где $\omega = 2\pi / T$), вместо начальной фазы $\psi_{(k)}$ надо откладывать угол $\psi_{(k)} / k$. На рисунке видно, что начальная фаза ($\psi_{(2)} = 100^\circ$) второй гармоники напряжения $u_{(2)}(t)$ поделена на номер гармоники: $\psi_{(2)} / 2 = 100^\circ / 2 = 50^\circ$.



ТЕСТОВАЯ ЗАДАЧА. При действии на зажимах двухполюсника периодического напряжения $u(t)$ в нем протекает ток $i(t)$, как показано в таблице:

Вариант	$u(t)$	$i(t)$
1	$20 + 50 \sin(\omega t + \pi/3) - 25 \sin(3\omega t + \pi/6)$	$12 + 4 \sin(\omega t - 2\pi/3) + 5 \sin(3\omega t + \pi/4)$
2	$-150 \sin(\omega t + \pi/3) + 15 \sin(2\omega t - \pi/6)$	$18 \sin(\omega t - 4\pi/3) - 5 \sin(2\omega t + \pi/4)$
3	$15 \sin(\omega t) - 5 \sin(3\omega t + \pi/6) + 3 \sin(5\omega t - \pi/3)$	$20 \sin(\omega t - \pi/8) - 50 \sin(3\omega t - \pi/12)$
4	$2 - 3 \sin(\omega t - \pi/3) - 5 \cos(3\omega t + \pi/6)$	$12 + 15 \cos(3\omega t - 5\pi/6)$
5	$20 + 50 \cos(\omega t + \pi/3) + 25 \cos(3\omega t + \pi/6)$	$-6 + 5 \sin(\omega t + \pi/4) - 2 \cos(3\omega t + \pi/4)$
6	$40 + 30 \sin(\omega t - \pi/3) + 25 \sin(2\omega t + \pi/6)$	$3 + 5 \sin(\omega t + 4\pi/3) + \sin(2\omega t - \pi/4)$
7	$20 + 50 \sin(\omega t + \pi/3) - 25 \sin(7\omega t + \pi/6)$	$9 - 5 \sin(7\omega t + \pi/6)$
8	$1 - 3 \cos(\omega t - \pi/3) - 2 \sin(3\omega t + \pi/6)$	$10 - 20 \cos(\omega t + \pi/6) - 16 \sin(3\omega t - \pi/3)$
9	$10 \cos(\omega t) - 5 \sin(3\omega t + \pi/6) + 3 \sin(4\omega t + \pi/3)$	$15 \cos(\omega t + \pi/3) - 10 \sin(4\omega t - \pi/6)$
10	$4 \cos(\omega t - \pi/4) - 5 \sin(3\omega t) + 3 \sin(6\omega t + \pi/6)$	$40 \cos(\omega t + \pi/3) - 15 \sin(3\omega t + \pi/4)$
11	$4 \sin(\omega t - \pi/4) - 5 \cos(3\omega t + \pi/6) + 3 \sin(9\omega t)$	$25 \cos(3\omega t) + 30 \sin(9\omega t - \pi/6)$
12	$-6 + 7 \sin(\omega t + 2\pi/3) - 5 \cos(5\omega t - \pi/6)$	$40 + 17 \cos(\omega t - \pi/3) + 5 \sin(5\omega t + \pi/4)$
13	$7 + 8 \sin(\omega t - 2\pi/3) - 2 \sin(3\omega t + 5\pi/6)$	$4 + 9 \sin(\omega t + \pi/3) + 5 \sin(3\omega t - \pi/6)$
14	$9 \cos(\omega t - 3\pi/4) - 4 \sin(3\omega t) + 3 \sin(5\omega t + \pi/6)$	$10 \sin(\omega t + \pi/4) - 5 \cos(5\omega t + \pi/6)$
15	$6 \sin(\omega t + 3\pi/4) - 3 \cos(3\omega t) + 2 \sin(6\omega t - \pi/3)$	$4 \cos(\omega t - 5\pi/4) - 2 \sin(3\omega t - \pi/3) + \sin(6\omega t)$

По этим данным определите величины: U , I , P , S , коэффициент мощности $\lambda = \cos \theta = P / S$, а также коэффициенты искажения кривых напряжения $k_u^H = U_{(1)} / U$ и тока $k_i^H = I_{(1)} / I$.

ЗАДАЧА 5.1. На входе цепи (табл.5.1) действует периодическое несинусоидальное напряжение (табл.5.2). Наибольшее (максимум максимум) значение напряжения на периоде ($T=0,01$ с.) равно $U_{mm} = 100$ В. Около R -элементов табл.5.1 проставлены значения активных сопротивлений (в омах). Около L -и C -элементов проставлены значения реактивных сопротивлений (в омах) для первой гармоники (т.е. на частоте $\omega_1 = 2\pi / T$). Найдите:

Таблица 5.1

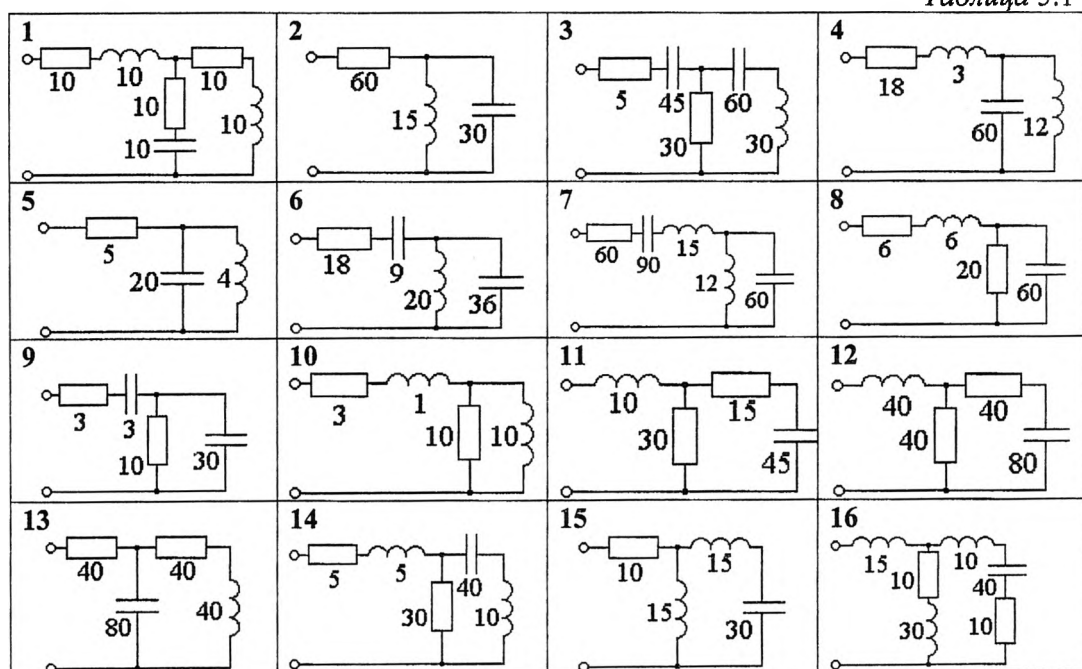
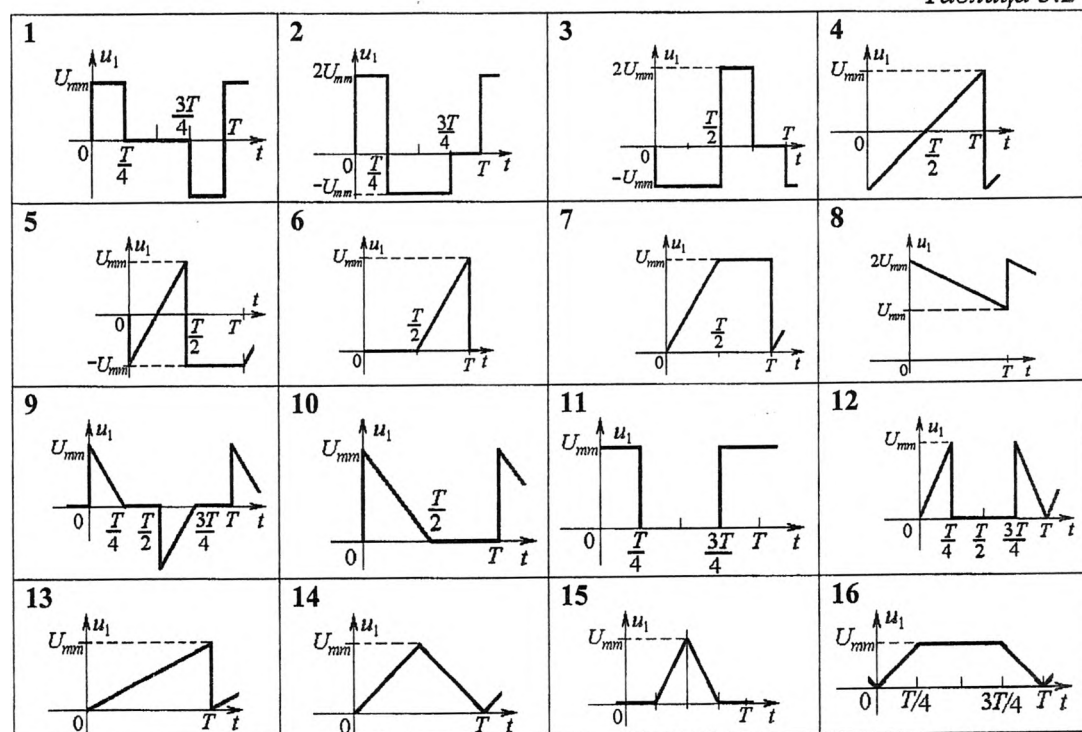


Таблица 5.2



- мгновенные и действующие значения всех токов и входного напряжения цепи, ограничиваясь постоянной составляющей, основной гармоникой и еще двумя последующими высшими гармониками напряжений и токов;
- коэффициенты гармоник кривых входного напряжения и тока;
- активную мощность, потребляемую в каждой ветви, и подтвердите правильность решения проверкой баланса активной мощности цепи;
- коэффициент мощности ($\lambda = P/(UI)$) цепи для полученного периодического несинусоидального режима;
- постройте графики входного напряжения и входного тока цепи;
- выполните аналогичные действия с учетом 20 и 100 гармоник напряжений и токов цепи и сопоставьте полученные результаты друг с другом;
- решите задачу применением дискретного преобразования Фурье.

Пример. Пусть на входе цепи (рис.5.1,а) действует периодическое напряжение, имеющее в первой половине периода форму треугольника, а во второй половине напряжение, равное нулю (рис. 5.1,б):

$$u(t) = \begin{cases} U_{mm} \cdot 2t/T & \text{при } 0 < t < T/2 \\ 0 & \text{при } T/2 < t < T \end{cases}, \quad \text{где } U_{mm}=100 \text{ В}; \quad T=0,01 \text{ с.}$$

Сопротивления $R_2 = R_3 = 24 \text{ Ом}$. Значения сопротивлений L - и C -элементов на частоте $\omega_1 = 2\pi/T$ равны: $\omega_1 L_1 = 4 \text{ Ом}$; $1/\omega_1 C_4 = 90 \text{ Ом}$; $\omega_1 L_5 = 1/\omega_1 C_5 = 30 \text{ Ом}$.

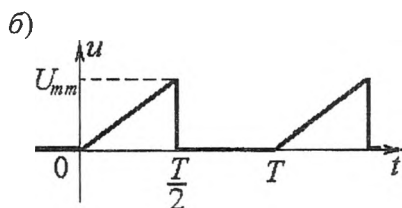
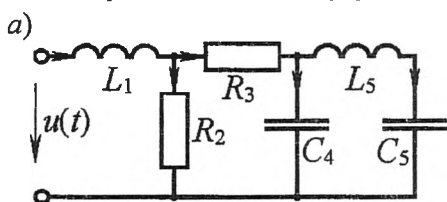


Рис.5.1

Перед выполнением задания найдем действующее значение напряжения

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt} = \sqrt{\frac{4U_{mm}^2}{T^3} \int_0^{T/2} t^2 dt} = \frac{U_{mm}}{\sqrt{6}} = \frac{100}{\sqrt{6}} = 40,8 \text{ В.}$$

Решение задачи представим отдельными этапами.

Этап 1. Разложение периодической функции входного напряжения $u(t)$ в ряд Фурье:

$$u(t) = U_{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} U_{m(k)} \sin(k\omega_1 t + \psi_{(k)}).$$

Постоянная составляющая ряда Фурье равна среднему значению $u(t)$:

$$U_{(0)} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} \left(\frac{2U_{mm}t}{T} \right) dt = \frac{U_{mm}}{4} = \frac{100}{4} = 25 \text{ В.}$$

Для определения амплитуды $U_{m(k)}$ и начальной фазы $\psi_{(k)}$ k -й гармоники вна-

чале выводим формулы для вычисления коэффициентов $B_{(k)}$ и $C_{(k)}$:

$$B_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin k\omega_1 t dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \left(\frac{2U_{mm}}{T} t \right) \sin \left(k \frac{2\pi}{T} t \right) dt = -U_{mm} \frac{\cos k\pi}{k\pi};$$

$$C_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos k\omega_1 t dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \left(\frac{2U_{mm}}{T} t \right) \cos \left(k \frac{2\pi}{T} t \right) dt = -U_{mm} \frac{1 - \cos k\pi}{(k\pi)^2}.$$

Далее для k -й гармоники частоты $\omega_k = k\omega_1$ находим:

$$U_{m(k)} = \sqrt{B_{(k)}^2 + C_{(k)}^2}; \quad \operatorname{tg} \Psi_{(k)} = C_{(k)} / B_{(k)}; \quad \dot{U}_{m(k)} = B_{(k)} + jC_{(k)} = U_{m(k)} e^{j\Psi_{(k)}}$$

Результаты этих вычислений для нескольких гармоник сведены в табл.5.3, причем угол $\Psi_{(k)}$ определялся с учетом формулы из предисловия в начале раздела.

Таблица 5.3

Номер гармоники (k)	B_k (Вольт)	C_k (Вольт)	$U_{m(k)}$ (Вольт)	$\Psi_{(k)}$ (град.)
0	—	—	25,0	—
1	31,8	-20,3	37,7	-32,5°
2	-15,9	0	15,9	-180°
3	10,6	-2,25	10,8	-12°
4	-7,95	0	7,95	-180°
5	6,37	-0,81	6,42	-7,25°
6	-5,30	0	5,30	-180°
7	4,54	-0,414	4,57	-5,19°
8	-3,98	0	3,98	-180°
9	3,54	-0,25	3,54	-4,05°
10	-3,18	0	3,18	-180°

Дискретный спектр амплитуд входного напряжения, построенный по данным табл.5.3, представлен на рис.5.2. Спектр фаз по табл.5.3 постройте самостоятельно.

Примечание 1. Для получения данных табл.5.3 и построения спектр спектров (рис.5.2) следует, помимо ручного счета, воспользоваться известными Вам математическими средствами ЭВМ. Например, при использовании системы **MATLAB** с целью вычисления значений $U_{m(k)}$, $\Psi_{(k)}$ для гармоник до k_{max} включительно, а также сравнения точной и приближенной (при учете ограниченного числа гармоник) кривых напряжения можно воспользоваться следующей программой:

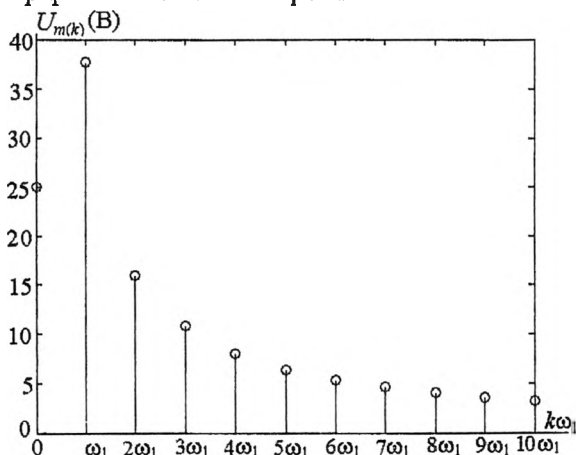


Рис.5.2

```

clear                                % Очистка всех переменных в рабочем пространстве
echo off                             % Исключение просмотра на экране листинга программы
% ЧАСТЬ 1
% Параметры сигнала:
Umm=100; T=0.01;
kmax=input('kmax – максимальное число используемых гармоник; ЗАДАЙТЕ kmax=');
% -----
% Расчет коэффициентов B(k), C(k) для гармоник порядков k=(1 - kmax) по
% выведенным нами формулам:
k=1:1: kmax;                        % Перебор гармоник от 1 до kmax
Bk=-(Umm./(pi*k)).*cos(pi*k)        % Столбец B(k), (k=1- kmax)
Ck=-(Umm./(pi*k)).*(1-cos(pi*k))./(k*pi) % Столбец C(k), (k=1- kmax)
% -----
% Расчет величин Um(k) и начальных фаз PciU(k) гармоник (k=1 - kmax):
    Umk = sqrt(Bk.^2+Ck.^2)          % Столбец Um(k), (k=1- kmax)
    PciUk = atan2(Ck,Bk);             % Начальные фазы гармоник в радианах
    PciUgr=(PciUk/pi)*180;           % Начальные фазы гармоник в градусах
% -----
% Построение амплитудного и фазового спектров входного напряжения u(t)
Uo=Umm/4;                           % Uo – постоянная составляющая ряда Фурье
Uspectr=[1:kmax+1];                 % Задание размера столбца спектра амплитуд с учетом Uo
Uspectr(1)=Uo;                       % Первый элемент столбца, равный Uo
q=2 : kmax+1;
Uspectr(q)=Umk(q-1);                 % Номера гармоник сдвинуты на +1
Fspectr(q)=PciUgr(q-1);              % Номера гармоник сдвинуты на +1
% -----
figure(1)
kk=0 : kmax;                         % Построение дискретной последовательности (спектра ампл-
Stem(kk,Uspectr),grid               % литуд) при обычной нумерации гармоник (без сдвига)
pause
% -----
figure(11)
kk=0 : kmax;                         % Построение дискретной последовательности (спектра нач-
Stem(kk, Fspectr),grid              % альных фаз) при обычной нумерации гармоник (без сдвига)
pause
% -----
% Сравнение кривых заданного напряжений и приближенного (ограничен. ряд Фурье)
figure(3)
omg1=2*pi/T;                         % угловая частота 1-й гармоники
nt=1;                                % nt – номер элемента столбца времени tt[nt]
for t=0 : T/(10*kmax) : T;           % t – текущее время (при интервале равным: T/(10*kmax))
    tt(nt)=t;                         % tt[nt] – столбец времени с интервалом равным: T/(10*kmax)
    % 1. Построение столбца точных значений u(nt) для ЗАДАННОЙ кривой (рис.5.1,б)
    u(nt)=0;
    if t <= T/2;
        u(nt)=2*Umm*t/T;
    end
end

```

```

% 2. Построение столбца приближенных значений uu(nt) (ограниченный ряд Фурье)
a=Uo;
for v=1:kmax;                                % v – номер гармоники, начиная с 1-й
a=a+Umk(v)*sin(v*omg1*t+pciUk(v));           % суммирование гармоник для момента времени t
end
uu(nt)=a;                                     % приближенное значение u(t) в момент t=nt
nt=nt+1;                                     % переход к следующему моменту времени t
end
% -----
plot(tt,[u', uu']),grid                     % кривые точного и приближенного напряжений
pause

```

Э т а п 2. Построение приближенной кривой напряжения $u(t)$ с учетом четырех членов ряда Фурье. По данным первых четырех строк табл.5.3 имеем

$$\begin{aligned}
 u(t) &\approx U_{(0)} + u_{(1)} + u_{(2)} + u_{(3)} = \\
 &= 25 + 37,7 \sin(\omega_1 t - 32,5^\circ) + 15,9 \sin(2\omega_1 t + 180^\circ) + 10,8 \sin(3\omega_1 t - 12^\circ) \text{ В.}
 \end{aligned}$$

Точная и приближенная кривые напряжения на интервале $0 \leq t \leq 2T$ изображены сплошными линиями на рис.5.3. Обе кривые $u(t)$ построена с помощью программы, аналогичной приведенной выше (с построением кривых на двух периодах), при задании $k_{\max}=4$.

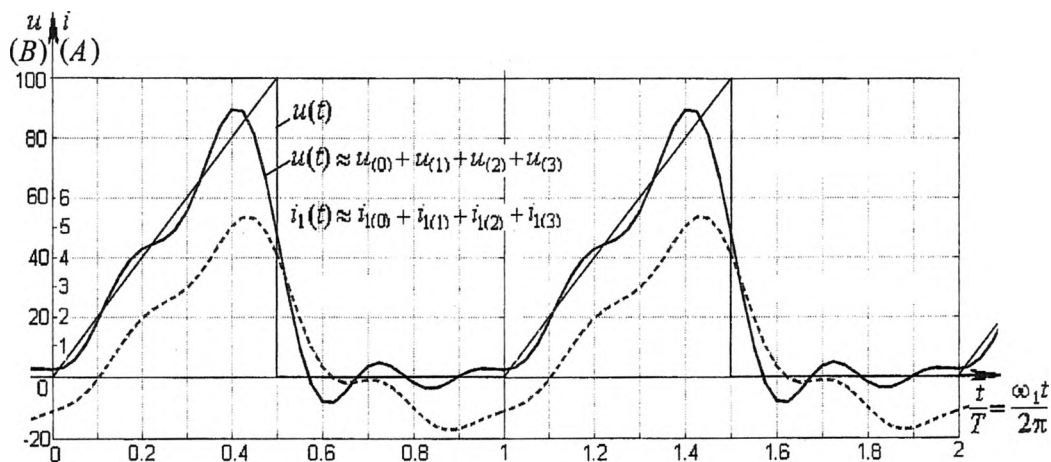


Рис.5.3

Действующее значение приближенного напряжения

$$U_{\text{прибл}} = \sqrt{U_{(0)}^2 + \frac{U_{m(1)}^2 + U_{m(2)}^2 + U_{m(3)}^2}{2}} = \sqrt{25^2 + \frac{37,7^2 + 15,9^2 + 10,8^2}{2}} = 38,9 \text{ В.}$$

Таким образом, относительная погрешность, связанная с пренебрежением высшими гармониками входного напряжения, начиная с четвертой, составляет

$$\Delta U = \frac{U_{\text{прибл}} - U}{U} 100\% = \frac{38,9 - 40,8}{40,8} 100\% = -4,7\%.$$

Примечание 2. В электронике и радиотехнике для оценки искажения кривой (в смысле ее отклонения от синусоиды) пользуются коэффициентом гармоник k^r , равным отношению действующего значения высших гармоник к действующему значению основной гармоники. В нашем случае коэффициент гармоник кривой приближенного напряжения равен:

$$k_u^r = \frac{1}{U_{(1)}} \sqrt{\sum_{k=2,3,\dots} U_{(k)}^2} = \frac{\sqrt{U_{(2)}^2 + U_{(3)}^2}}{U_{(1)}} = \frac{\sqrt{15,9^2 + 10,8^2}}{37,7} = 0,51.$$

Этап 3. Расчет гармонических составляющих токов цепи при действии на входе цепи (рис.5.1,а) напряжения из четырех составляющих (рис.5.3):

$$\begin{aligned} u(t) &= U_{(0)} + u_{(1)} + u_{(2)} + u_{(3)} = \\ &= 25 + 37,7 \sin(\omega_1 t - 32,5^\circ) + 15,9 \sin(2\omega_1 t + 180^\circ) + 10,8 \sin(3\omega_1 t - 12^\circ) \text{ В.} \end{aligned}$$

Согласно принципу наложения, наш этап распадается на подэтапы расчета токов для каждой гармоники в отдельности. Для ясности будем эти подэтапы выделять указанием угловой частоты соответствующей гармоники.

$\omega = 0$. Определение постоянных составляющих токов цепи при действии на входе цепи (рис.5.1,а) постоянного напряжения, равного, согласно табл.5.3, $U_{(0)} = 25 \text{ В}$. Очевидно, постоянный ток в цепи может замыкаться лишь по первой и второй ветвям, так как ветви 4 и 5, содержащие конденсаторы, постоянного тока не проводят. Поскольку сопротивление катушки L_1 при постоянном токе равно нулю, то

$$I_{1(0)} = I_{2(0)} = \frac{U_{(0)}}{R_2} = \frac{25}{24} = 1,04 \text{ А}; \quad I_{3(0)} = I_{4(0)} = I_{5(0)} = 0.$$

Мощность, потребляемая цепью от постоянной составляющей напряжения $P_{(0)} = U_{(0)} I_{1(0)} = 25 \cdot 1,04 = 26 \text{ Вт}$.

$\omega = \omega_1$. Определение реакции цепи от воздействия первой гармоники напряжения, равной, согласно табл.5.3,

$$u_{(1)}(t) = U_{m(1)} \sin(\omega_1 t + \psi_{(1)}) = 37,7 \sin(\omega_1 t - 32,5^\circ); \quad \dot{U}_{(1)} = \frac{37,7}{\sqrt{2}} e^{-j32,5^\circ} \text{ В.}$$

Комплексные сопротивления ветвей на частоте $\omega = \omega_1$ даны в условии задачи:

$$\begin{aligned} Z_1 &= j\omega_1 L_1 = j4 \text{ Ом}; \quad Z_2 = Z_3 = R_3 = 24 \text{ Ом}; \quad Z_4 = -j/(\omega_1 C_4) = -j90 \text{ Ом}; \\ Z_5 &= j\omega_1 L_5 - j/(\omega_1 C_5) = j30 - j30 = 0. \end{aligned}$$

Для эквивалентных сопротивлений получаем:

$$Z_{345} = Z_3 + Z_4 Z_5 / (Z_4 + Z_5) = 24 + (-j90 \cdot 0) / (-j90 + 0) = 24 \text{ Ом};$$

$$Z_{2345} = Z_2 Z_{345} / (Z_2 + Z_{345}) = 24 \cdot 24 / (24 + 24) = 12 \text{ Ом};$$

$$Z_3 = Z_{2345} + Z_1 = 12 + j4 = 12,6 e^{j18,4^\circ} \text{ Ом.}$$

Найдем комплекс входного тока и его мгновенное значение:

$$\dot{I}_{(1)} = \frac{\dot{U}_{(1)}}{Z_9} = \frac{(37,7/\sqrt{2}) \cdot e^{-j32,5^\circ}}{12,6e^{j18,4^\circ}} = \frac{3}{\sqrt{2}} e^{-j50,9^\circ} \text{ A}; \quad \boxed{i_{(1)} = 3 \sin(\omega_1 t - 50,9^\circ)}.$$

Для напряжения и тока 2-й ветви можем написать:

$$\dot{U}_{2(1)} = \dot{I}_1 \cdot Z_{2345} = \frac{3}{\sqrt{2}} e^{-j50,9^\circ} \cdot 12 = \frac{36}{\sqrt{2}} e^{-j50,9^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{I}_{2(1)} = \frac{\dot{U}_{2(1)}}{Z_2} = \frac{36/\sqrt{2} \cdot e^{-j50,9^\circ}}{24} = \frac{1,5}{\sqrt{2}} e^{-j50,9^\circ} \text{ A}; \quad \boxed{i_{2(1)} = 1,5 \sin(\omega_1 t - 50,9^\circ)}.$$

В нашем случае $Z_5 = 0$, поэтому $\dot{U}_{4(1)} = \dot{U}_{5(1)} = 0$ и $\dot{U}_{3(1)} = \dot{U}_{2(1)}$. Следовательно

$$\dot{I}_{3(1)} = \frac{\dot{U}_{3(1)}}{Z_3} = \frac{\dot{U}_{2(1)}}{Z_3} = \frac{36/\sqrt{2} \cdot e^{-j50,9^\circ}}{24} = \frac{1,5}{\sqrt{2}} e^{-j50,9^\circ} \text{ A}; \quad \boxed{i_{3(1)} = 1,5 \sin(\omega_1 t - 50,9^\circ)};$$

$$\dot{I}_{4(1)} = 0; \quad \boxed{i_{4(1)} = 0};$$

$$\dot{I}_{5(1)} = \dot{I}_{3(1)} = \frac{1,5}{\sqrt{2}} e^{-j50,9^\circ} \text{ A}. \quad \boxed{i_{5(1)} = 1,5 \sin(\omega_1 t - 50,9^\circ)}$$

Сдвиг между фазами входного напряжения $\dot{U}_{(1)}$ и входного тока $\dot{I}_{(1)}$ на частоте первой гармоники равен

$$\varphi_{(1)} = \psi_{u_{(1)}} - \psi_{i_{(1)}} = (-32,5^\circ) - (-50,9^\circ) = 18,4^\circ.$$

Мощность, потребляемая цепью на частоте первой гармоники напряжения

$$P_{(1)} = U_{(1)} I_{(1)} \cos \varphi_{(1)} = \frac{37,7}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \cos 18,4^\circ = 53,65 \text{ Вт}.$$

$\omega = \omega_2 = 2\omega_1$. Определение реакции цепи от воздействия **второй** гармоники напряжения, равной, согласно табл.5.3,

$$u_{(2)}(t) = U_{m(2)} \sin(2\omega_1 t + \psi_{(2)}) = 15,9 \sin(2\omega_1 t + \pi); \quad \dot{U}_{(2)} = \frac{15,9}{\sqrt{2}} e^{j\pi} \text{ В}.$$

При пересчете комплексных сопротивлений ветвей на частоту $2\omega_1$ получаем:

$$Z_1 = j2\omega_1 L_1 = j8 \text{ Ом};$$

$$Z_2 = Z_3 = R_3 = 24 \text{ Ом};$$

$$Z_4 = -\frac{j}{2\omega_1 C_4} = -j45 \text{ Ом}; \quad Z_5 = j \left(2\omega_1 L_5 - \frac{1}{2\omega_1 C_5} \right) = j45 \text{ Ом}.$$

Для эквивалентных сопротивлений имеем:

$$Z_{345} = Z_3 + Z_4 Z_5 / (Z_4 + Z_5) = 24 + (-j45 \cdot j45) / (-j45 + j45) = \infty;$$

$$Z_{2345} = Z_2 Z_{345} / (Z_2 + Z_{345}) = 24 \cdot \infty / (24 + \infty) = 24 \text{ Ом};$$

$$Z_9 = Z_{2345} + Z_1 = 24 + j8 = 25,3e^{j18,4^\circ} \text{ Ом}.$$

Входной ток

$$\dot{I}_{1(2)} = \frac{\dot{U}_{(2)}}{Z_3} = \frac{(15,9/\sqrt{2}) \cdot e^{j180^\circ}}{25,3e^{j18,4^\circ}} = \frac{0,628}{\sqrt{2}} e^{j161,6^\circ} \text{ А}; \quad \boxed{\dot{i}_{1(2)} = 0,628 \sin(2\omega_1 t + 161,6^\circ)}.$$

В нашем случае, очевидно

$$\dot{I}_{2(2)} = \dot{I}_{1(2)} = \frac{0,628}{\sqrt{2}} \cdot e^{j161,6^\circ} \text{ А}; \quad \boxed{\dot{i}_{2(2)} = 0,628 \sin(2\omega_1 t + 161,6^\circ)},$$

$$\dot{I}_{3(2)} = 0. \quad \boxed{\dot{i}_{3(2)} = 0}.$$

Для определения токов $\dot{I}_{4(2)}$ и $\dot{I}_{5(2)}$ найдем напряжение $\dot{U}_{4(2)} = \dot{U}_{5(2)}$, которое с учетом равенства $\dot{U}_{3(2)} = 0$, можно представить в виде

$$\dot{U}_{4(2)} = \dot{U}_{2(2)} = \dot{I}_{2(2)} Z_2 = \frac{0,628}{\sqrt{2}} \cdot e^{j161,6^\circ} \cdot 24 = \frac{15,1}{\sqrt{2}} \cdot e^{j161,6^\circ} \text{ В.}$$

В результате получаем

$$\dot{I}_{4(2)} = \frac{\dot{U}_{4(2)}}{Z_4} = \frac{15,1/\sqrt{2} \cdot e^{j161,6^\circ}}{-j45} = \frac{0,335}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j108,4^\circ} \text{ А}; \quad \boxed{\dot{i}_{4(2)} = 0,335 \sin(2\omega_1 t - 108,4^\circ)}$$

$$\dot{I}_{5(2)} = \frac{\dot{U}_{4(2)}}{Z_5} = \frac{15,1/\sqrt{2} \cdot e^{j161,6^\circ}}{j45} = \frac{0,335}{\sqrt{2}} \cdot e^{j71,6^\circ} \text{ А}; \quad \boxed{\dot{i}_{5(2)} = 0,335 \sin(2\omega_1 t + 71,6^\circ)}.$$

Сдвиг между фазами входного напряжения $\dot{U}_{(2)}$ и входного тока $\dot{I}_{1(2)}$ на частоте второй гармоники равен

$$\varphi_{(2)} = \psi_{u_{(2)}} - \psi_{i_{1(2)}} = 180^\circ - 161,6^\circ = 18,4^\circ.$$

Мощность, потребляемая цепью на частоте второй гармоники напряжения

$$P_{(2)} = U_{(2)} I_{1(2)} \cos \varphi_{(2)} = \frac{15,9}{\sqrt{2}} \cdot \frac{0,628}{\sqrt{2}} \cos 18,4^\circ = 4,737 \text{ Вт.}$$

$\omega = \omega_3 = 3\omega_1$. Определение реакции цепи от воздействия *третьей* гармоники напряжения, равной, согласно табл.5.3,

$$u_{(3)}(t) = U_{m(3)} \sin(3\omega_1 t + \psi_{(3)}) = 10,8 \sin(3\omega_1 t - 12^\circ); \quad \dot{U}_{(3)} = \frac{10,8}{\sqrt{2}} e^{-j12^\circ} \text{ В.}$$

При пересчете комплексных сопротивлений ветвей на частоту $3\omega_1$ получаем:

$$Z_1 = j3\omega_1 L_1 = j12 \text{ Ом}; \quad Z_2 = Z_3 = R_3 = 24 \text{ Ом}; \\ Z_4 = -j/(3\omega_1 C_4) = -j30 \text{ Ом}; \quad Z_5 = j(3\omega_1 L_5 - 1/(3\omega_1 C_5)) = j80 \text{ Ом}.$$

Для эквивалентных сопротивлений имеем:

$$Z_{45} = Z_4 Z_5 / (Z_4 + Z_5) = (-j30 \cdot j80) / (-j30 + j80) = -j48 \text{ Ом}$$

$$Z_{345} = Z_3 + Z_{45} = 24 - j48 = 53,7e^{-j63,4^\circ} \text{ Ом};$$

$$Z_{2345} = Z_2 Z_{345} / (Z_2 + Z_{345}) = 24 \cdot (24 - j48) / (48 - j48) = 18 - j6 = 19e^{-j18,4^\circ} \text{ Ом};$$

$$Z_3 = Z_1 + Z_{2345} = j12 + (18 - j6) = 18 + j6 = 19e^{j18,4^\circ} \text{ Ом}.$$

Далее последовательно находим:

$$\dot{I}_{1(3)} = \frac{\dot{U}_{(3)}}{Z_3} = \frac{(10,8/\sqrt{2})e^{-j12^\circ}}{19e^{j18,4^\circ}} = \frac{0,568}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j30,4^\circ} \text{ A}; \quad \boxed{\dot{i}_{1(3)} = 0,568 \sin(3\omega_1 t - 30,4^\circ)};$$

$$\dot{U}_{2(3)} = \dot{I}_1 Z_{2345} = \frac{0,568}{\sqrt{2}} e^{-j30,4^\circ} \cdot 19e^{-j18,4^\circ} = \frac{10,8}{\sqrt{2}} e^{-j48,8^\circ} \text{ B};$$

$$\dot{I}_{2(3)} = \frac{\dot{U}_{2(3)}}{Z_2} = \frac{(10,8/\sqrt{2}) \cdot e^{-j48,8^\circ}}{24} = \frac{0,45}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j48,8^\circ} \text{ A}; \quad \boxed{\dot{i}_{2(3)} = 0,45 \sin(3\omega_1 t - 48,8^\circ)};$$

$$\dot{I}_{3(3)} = \frac{\dot{U}_{2(3)}}{Z_{345}} = \frac{(10,8/\sqrt{2}) \cdot e^{-j48,8^\circ}}{53,7e^{j63,4^\circ}} = \frac{0,20}{\sqrt{2}} \cdot e^{j14,6^\circ} \text{ A}; \quad \boxed{\dot{i}_{3(3)} = 0,20 \sin(3\omega_1 t + 14,6^\circ)};$$

$$\dot{U}_{4(3)} = \dot{U}_{5(3)} = \dot{I}_{3(3)} Z_{45} = \frac{0,20 \cdot e^{j14,6^\circ}}{\sqrt{2}} \cdot (-j48) = \frac{9,6}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j75,4^\circ};$$

$$\dot{I}_{4(3)} = \frac{\dot{U}_{4(3)}}{Z_4} = \frac{(9,6\sqrt{2}) \cdot e^{-j75,4^\circ}}{-j30} = \frac{0,32}{\sqrt{2}} \cdot e^{j14,6^\circ} \text{ A}; \quad \boxed{\dot{i}_{4(3)} = 0,32 \sin(3\omega_1 t + 14,6^\circ)};$$

$$\dot{I}_{5(3)} = \frac{\dot{U}_{4(3)}}{Z_5} = \frac{(9,6\sqrt{2}) \cdot e^{-j75,4^\circ}}{j80} = \frac{0,12}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j165,4^\circ} \text{ A}; \quad \boxed{\dot{i}_{5(3)} = 0,12 \sin(3\omega_1 t - 165,4^\circ)}.$$

Сдвиг между фазами входного напряжения $\dot{U}_{(3)}$ и входного тока $\dot{I}_{1(3)}$ на частоте третьей гармоники равен

$$\varphi_{(3)} = \psi_{u_{(3)}} - \psi_{i_{1(3)}} = (-12^\circ) - (-30,4^\circ) = 18,4^\circ.$$

Мощность, потребляемая цепью на частоте третьей гармоники напряжения

$$P_{(3)} = U_{(3)} I_{1(3)} \cos \varphi_{(3)} = \frac{10,8}{\sqrt{2}} \cdot \frac{0,568}{\sqrt{2}} \cos 18,4^\circ = 2,91 \text{ Вт}.$$

Э т а п 4. *Определение мгновенных и действующих значений токов цепи.*

Суммируя мгновенные значения токов, найденные для каждой гармоники отдельно, находим токи всех ветвей цепи в функции времени:

$$i_1 = 1,04 + 3 \sin(\omega_1 t - 50,9^\circ) + 0,628 \sin(2\omega_1 t + 161,6^\circ) + 0,568 \sin(3\omega_1 t - 30,4^\circ) \text{ A};$$

$$i_2 = 1,04 + 1,5 \sin(\omega_1 t - 50,9^\circ) + 0,628 \sin(2\omega_1 t + 161,6^\circ) + 0,45 \sin(3\omega_1 t - 48,8^\circ) \text{ A};$$

$$i_3 = 1,5 \sin(\omega_1 t - 50,9^\circ) + 0,2 \sin(3\omega_1 t + 14,6^\circ) \text{ A};$$

$$i_4 = 0,335 \sin(2\omega_1 t - 108,4^\circ) + 0,32 \sin(3\omega_1 t + 14,6^\circ) \text{ A};$$

$$i_5 = 1,5 \sin(\omega_1 t - 50,9^\circ) + 0,335 \sin(2\omega_1 t + 71,6^\circ) + 0,12 \sin(3\omega_1 t - 165,4^\circ) \text{ A}.$$

Действующее значение входного тока

$$I_1 = \sqrt{I_{1(0)}^2 + I_{1(1)}^2 + I_{1(2)}^2 + I_{1(3)}^2} = \sqrt{1,04^2 + \frac{3^2 + 0,628^2 + 0,568^2}{2}} = 2,43 \text{ A}.$$

Вычисляя аналогичным образом действующие значения токов других ветвей, получаем

$$I_2 = 1,58 \text{ A}; \quad I_3 = 1,06 \text{ A}; \quad I_4 = 0,252 \text{ A}; \quad I_5 = 1,1 \text{ A}.$$

Примечание 3. Коэффициент гармоник кривой входного тока

$$k_i^r = \frac{1}{I_{1(1)}} \sqrt{\sum_{k=2,3,\dots} I_{1(k)}^2} = \frac{\sqrt{I_{1(2)}^2 + I_{1(3)}^2}}{I_{1(1)}} = \frac{\sqrt{0,628^2 + 0,568^2}}{3} = 0,282,$$

что меньше по сравнению с коэффициентом гармоник кривой напряжения $k_u^r = 0,51$. Почему?

Этап 5. Расчет активных мощностей, потребляемых резисторами:

$$P_{R_2} = R_2 I_2^2 = 24 \cdot 1,58^2 = 60 \text{ Вт}; \quad P_{R_3} = R_3 I_3^2 = 24 \cdot 1,06^2 = 27 \text{ Вт}.$$

Суммарная активная мощность, потребляемая резисторами

$$P_R = P_{R_2} + P_{R_3} = 60 + 27 = 87 \text{ Вт}$$

равна мощности, выдаваемой источником несинусоидального напряжения

$$P = P_{(0)} + P_{(1)} + P_{(2)} + P_{(3)} = 26 + 53,65 + 4,737 + 2,91 = 87 \text{ Вт}.$$

Коэффициент мощности цепи при несинусоидальном токе и напряжении

$$\lambda \equiv \cos \theta = \frac{P}{UI_1} = \frac{87}{39 \cdot 2,43} = 0,918,$$

что, как и следовало ожидать, меньше коэффициента мощности при синусоидальном режиме цепи на основной частоте, равного $\cos \varphi_{(1)} = \cos(18,4^\circ) = 0,948$.

Этап 6. Построение приближенной кривой тока $i_1(t)$ с учетом четырех членов ряда Фурье. Кривая входного напряжения, содержащего 4 члена его разложения в ряд Фурье, была построена на рис.5.3 на этапе 1. На этом же рисунке пунктиром построена кривая входного тока $i_1(t)$ по найденному (на этапе 4) выражению, также содержащему 4 гармоники тока.

Примечание 4. Для построения $i_1(t)$ в системе **MATLAB** можно воспользоваться программой, приведенной в примечании 1 (**ЧАСТЬ 1**), дополнив ее следующими процедурами для вычисления гармоник тока:

% ЧАСТЬ 2

% Напомним, что интервал изменения ($k=1,2,3 \dots k_{max}$) задан в первой части программы!

% Подготовка сопротивлений цепи для всех гармоник:

Z1=j*(k*4); Z2=24; Z3=24; Z4=-j*(90./k); % Столбцы сопротивления (содержат k_{max} строк)

Z5=j*(30.000001*k)-j*(30./k); % Значение L , чуть увеличено во избежание трудностей с резонансом

Z45=(Z4.*Z5)./(Z4+Z5); Z345=Z3+Z45;

Z2345=(Z2.*Z345)./(Z2+Z345);

Z=Z1+Z2345; % Z – Столбец эквивалентных сопротивлений (содержат k_{max} строк)

```

% Расчет спектров тока: амплитудного Im(k) и фазового pciI(k) (k=1,2,3 ... k_max):
Io=Uo/Z2; % постоянная составляющая входного тока I1(0)
Imk=Umk./abs(Z); % амплитуда k-й гармоники тока Im1(k)
Phik=angle(Z); % phi(k) - угол "фи" между током и напряжением k-й гармоники
pciIk=pciUk-phiK; % pciI(k) - фаза тока k-й гармоники в радианах
% -----
% Кривые напряжения и тока на общем графике
nt=1;
for t=0 : T/(10*kmax) : T; % t – текущее время
    b=0;
    for v=1:kmax; % v – номера гармоник, начиная с 1-й
        b=b+Imk(v)*sin(v*omg1*t+pciIk(v)); % суммирование гармоник для момента t
    end
    TOK(nt)=b+Io;
    nt=nt+1;
end
% -----
plot(tt/T, [uu',u',10*TOK']), grid
pause

```

Также, как и приближенная кривая напряжения, на графике (рис.5.3) приближенная кривая входного тока построена для двух периодов его изменения на интервале $0 \leq t \leq 2T$.

Для сравнения на рис.5.4 представлены кривые при учете соответственно 10 и 100 гармоник на интервале $0 \leq t \leq T$. Как видно, аппроксимирующая кри-

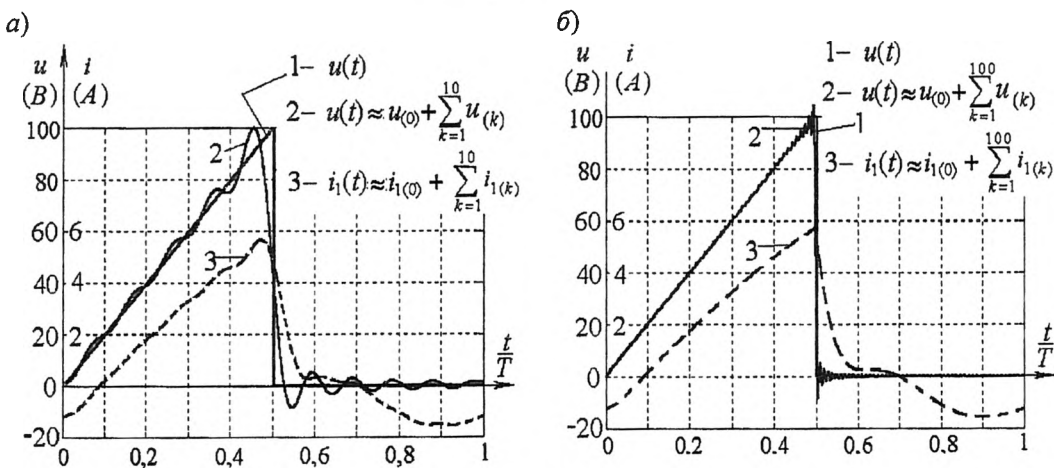


Рис.5.4

вая 2 дает “звон” в окрестности точки разрыва заданной функции $u(t)$, что связано с так называемым явлением Гиббса. Отсутствие звона в кривой тока 3 объясняется сглаживающим эффектом индуктивности L_1 . Если на входе вместо L_1 вставить емкость C_1 (приняв, например, $1/(\omega C_1 = \omega L_1)$), то звон появится и в кривой тока $i_1(t)$. Проверьте это самостоятельно.

Этап 7. Определение входного тока применением дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Для решения задачи этим методом целесообразно вначале познакомиться с его описанием в примерах к **Задачам 5.3 и 5.4.** Для схемы рис.5.1,а соответствующая программа в системе **MATLAB** для определения входного тока при действии периодического импульса (рис.5.1,б) принимает следующий вид:

```
% Расчет входного тока в схеме (рис.5.1,а) с помощью ДПФ – цель программы!
% Заданы параметры цепи для 1-й гармоники:
  ZL1=j*4; R2=24; R3=24; ZC4=-j*90; ZL5=j*30; ZC5=-j*30;
  T=1; Umm=100;
% -----

% 1. Дискретизация сигнала u(t), заданного на рис.5.1,б.
p=input('напомним: p = (3 – 9); ЗАДАЙТЕ p=');
N=2^p; h=T/N; % Шаг дискретизации сигнала; N=2^p – число гармоник
% -----

% 2. Построение решетчатой функции u[v] (Полагая вначале Umm=1)
for v=1:N
  u(v)=0;
  if v <= N/2+1;
    u(v)=(v-1)/(N/2);
  end
end
% -----

% 3. ДПФ для решетчатой функции u[v]
U=fft(u);
% -----

% 4. Построение  $Y(jk\omega_1)=1/Z(jk\omega_1)$ 
kk=0:(N/2); q=1:(N/2-1); kkk(q)=-(N/2-q); k=[kk kkk];
Z1=k.*ZL1; Z2=R2; Z3=R3; Z4=ZC4./(k+0.0000001); Z5=k.*ZL5+ZC5./(k+0.0000001);
Z345=Z3+Z5.*Z4./(Z5+Z4); Zk=Z1+Z2.*Z345./(Z2+Z345);
Yk=1./Zk; % Столбец проводимостей содержит N=2^p строк
% -----

% 5. ДПФ для входного тока
TT=U.*Yk;
% -----

% 6. ОДПФ для входного тока
Tok=ifft(TT); % Отсчеты для входного Тока
Tok=Umm*real(Tok); % Учтено, что Ua=40 В
Figure(1)
v=1:N;
plot(v*h,[u',Tok']),grid % здесь u/Umm для согласования с графиком тока
title('Ток рассчитан с помощью ДПФ и ОДПФ')
pause
% -----
```

```
% ДОПОЛНЕНИЕ: представление тока через тригонометрический ряд Фурье
TT=TT/N;          % Учтено, что MATLAB использует ДПФ без деления на N
M=100;            % Задаемся числом точек на периоде M = (100 - 300)
Ht=T/M;           % Шаг по времени
% -----
```

```
% 7. Формирование ряда Фурье для тока i(t)
```

```
w1=2*pi/T;
for kt=1:2*M
    t(kt)=ht*(kt-1);          % текущее время с нуля
    tok(kt)=TT(1)+abs(TT(N/2+1))*sin((N/2)*w1*t(kt)+angle(TT(N/2+1))+pi/2);
for k=2:N/2
    tok(kt)=tok(kt)+2*abs(TT(k))*sin((k-1)*w1*t(kt)+angle(TT(k))+pi/2);
end
end
```

```
tok=Umm*tok;          % Учтено заданное значение Umm
```

```
% -----
```

```
% Построение графика тока
```

```
figure(2)
plot(t,tok),grid,...
title('Два периода тока, рассчитанного рядом Фурье, полученного через ДПФ')
```

На рис.5.5 представлены полученные с помощью этой программы кривые на-

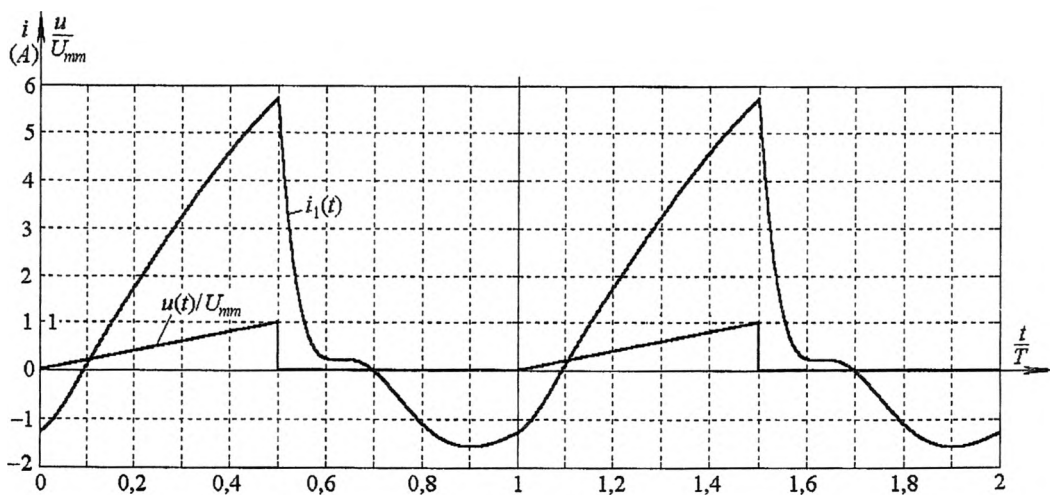


Рис.5.5

пряжения и тока на интервале времени $0 \leq t \leq 2T$ при выборе числа отсчетов напряжения равным $N = 2^8$. График для напряжения представлен в относительных единицах $u(t)/U_{mm}$.