

Лабораторная работа № 6. ИЗУЧЕНИЕ ПРОЦЕССОВ ЗАРЯДА И РАЗРЯДА КОНДЕНСАТОРА

Цель работы: изучение процессов заряда и разряда конденсатора при различных параметрах емкости, определение электроемкости конденсатора и активного сопротивления при разрядке конденсатора.

Теоретические сведения

1. Установление тока при разрядке конденсатора.

Если обкладки заряженного конденсатора соединить проводником, то по проводнику потечет ток. Найдем зависимость разрядного тока конденсатора от времени t .

Обозначим через I , q и u мгновенные значения тока, заряда положительной обкладки и разности потенциалов между обкладками конденсатора. Для этих величин справедливы соотношения

$$RI = u, \quad I = -\frac{dq}{dt}, \quad q = Cu, \quad (1)$$

где C – емкость конденсатора и R – сопротивление проводника.

Исключая u и I из формул (1) как из системы трех уравнений, получим

$$\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC}. \quad (2)$$

Интегрирование дифференциального уравнения (2) приводит к выражению

$$\ln q = -\frac{t}{RC} + \ln A, \quad (3)$$

где A – постоянная интегрирования.

Потенцируя (3) и используя определение логарифма, находим

$$q = Ae^{-\frac{t}{RC}}. \quad (4)$$

Постоянную A найдем из начального условия $q(0) = q_0$, где q_0 – первоначальный заряд конденсатора.

Подставляя $t = 0$ в (4), имеем $q(0) = A$.

Таким образом

$$q = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (5)$$

Продифференцировав равенство (5) по времени t и учитывая (1), получим зависимость разрядного тока конденсатора от времени

$$I = \frac{q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (6)$$

где $I_0 = q_0/(RC) = u_0/R$ – начальное значение силы тока (ток в момент времени $t = 0$); u_0 – первоначальная разность потенциалов на обкладках конденсатора.

На рис. 1 приведен график зависимости разрядного тока конденсатора от времени. Постоянная $\tau = RC$ имеет размерность времени и называется *временем релаксации*. Из формулы (6) следует, что за время τ разрядный ток уменьшается в e раз. Значение τ может быть найдено из графика разрядного тока конденсатора (см. рис. 1).

2. Установление тока при зарядке конденсатора.

Аналогично решается задача о нахождении зависимости зарядного тока конденсатора от времени.

Предположим, что в цепь конденсатора включен источник питания с электродвижущей силой \mathcal{E} . При замыкании цепи возникает ток, заряжающий конденсатор. Накапливающиеся на обкладках конденсатора электрические заряды препятствуют прохождению тока, уменьшая его величину.

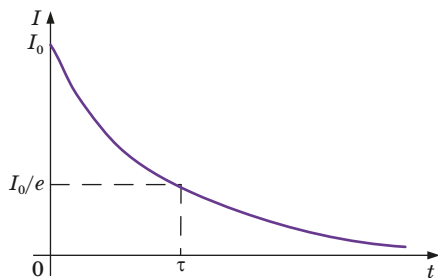


Рис. 1. График зависимости разрядного тока конденсатора от времени

Заряд q на обкладках конденсатора и зарядный ток I в произвольный момент времени по определению

$$q = Cu; I = \frac{dq}{dt}. \quad (7)$$

По второму закону Кирхгофа (алгебраическая сумма ЭДС, действующих в контуре равна алгебраической сумме падений напряжения в ветвях контура)

$$RI + u = \varepsilon, \quad (8)$$

где R – полное сопротивление цепи, включая внутреннее сопротивление источника тока r ; u – разность потенциалов на обкладках конденсатора.

Воспользовавшись равенствами (7), исключим u и I из (8). После преобразования полученного выражения будем иметь

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \varepsilon \Rightarrow \frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} q = \frac{\varepsilon}{R}. \quad (9)$$

Неоднородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка (9) можно свести к однородному, если ввести зависимую переменную

$$y = q - \varepsilon C.$$

При этом уравнение (9) преобразуется к виду

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{y}{RC}. \quad (10)$$

Решение уравнения (10) после возвращения к переменной q запишется в виде

$$q = \varepsilon C + A e^{-\frac{t}{RC}}, \quad (11)$$

где A – постоянная интегрирования, определяемая из начальных условий.

Если в начальный момент времени $t = 0$ заряд на обкладках конденсатора отсутствует $q(0) = 0$, то из (11) находим $A = -\varepsilon C$.

Подставим найденное значение A в (11) и преобразуем

$$q = \varepsilon C \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) = \varepsilon C \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (12)$$

Из (12) следует, что при $t \rightarrow \infty$ заряд на обкладках конденсатора стремится к своему предельному значению $q_{\infty} = \varepsilon C$.

Продифференцировав равенство (12) по времени и учитывая (7), найдем ток зарядки конденсатора

$$I = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

где $I_0 = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{q_{\infty}}{RC}$ – ток в начальный момент времени $t = 0$ (R – полное сопротивление цепи).

Из сравнения (6) и (13) следует, что функциональная зависимость от времени токов зарядки и разрядки конденсатора одинакова. График этой зависимости приведен на рис. 1.

Определение ёмкости и сопротивления в цепи разрядки конденсатора.

Вычислим натуральный логарифм разрядного тока (6)

$$\ln I = \ln I_0 - \frac{1}{RC} t. \quad (14)$$

Таким образом, логарифм силы тока I линейно зависит от времени t , что можно записать в виде

$$y = a + bt, \quad (15)$$

где $y = \ln I$, $a = \ln I_0$, $b = -1/(RC)$.

График этой зависимости представляет собой прямую линию (рис. 2).

Сняв экспериментально зависимость разрядного тока конденсатора от времени $I(t)$ и вычислив натуральные логарифмы полученных значений, можно найти параметры a и b с помощью численного и графического методов, а затем вычислить сопротивление R и электроемкость C .

Графический метод. Для определения R и C графическим методом строят график зависимости $\ln I$ от времени t в виде отрезка прямой (рис. 2). Продолжая прямую до пересечения с осями координат, находят значения:

$$t_1; a = \ln I_0; b = -\frac{\ln I_0}{t_1}.$$

Затем по найденному значению $\ln I_0$ определяют начальное значение разрядного тока I_0 вычисляют R и C по формулам

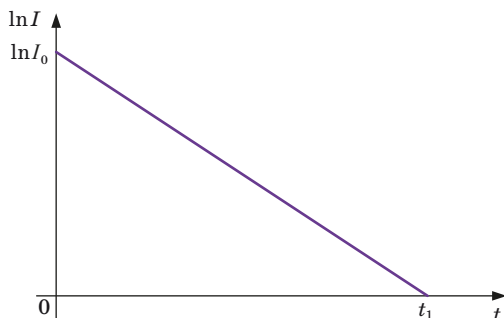


Рис. 2. График зависимости логарифма силы тока от времени представляет собой линейную функцию

$$R = \frac{u_0}{I_0}, \quad C = \frac{1}{R|b|}, \quad (16)$$

где u_0 – первоначальная разность потенциалов на обкладках конденсатора).

Численный метод. Данный метод определения параметров a и b основан на применении *метода наименьших квадратов (МНК)*.

Предположим, что опытным путем для каждого из дискретного ряда значений независимой переменной x_i получены значения зависимой переменной y_i (в данной работе $x_i = t_i$, $y_i = \ln I_i$). По этим данным можно провести оптимальную прямую вида $y = a + bx$, параметры которой определяются из условия

$$\sum_{i=1}^n \left(\sigma_i [y_i - (a + bx_i)]^2 \right) = \min. \quad (17)$$

Здесь σ_i – весовые коэффициенты, величина которых зависит от точности измерений.

В данной работе относительная погрешность силы тока увеличивается с увеличением времени разрядки t . Поэтому весовые коэффициенты σ_i должны быть различны для различных значений силы тока I_i .

Для упрощения вычислений можно положить все $\sigma_i = 1$. Однако при этом следует избегать использования экспериментальных значений I_i при относительно больших t .

Анализ требования (17) при условии, что все $\sigma_i = 1$, приводит к формулам

$$b = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{D(x)}, \quad a = \langle y \rangle - b \langle x \rangle,$$

$$\text{где } \langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \langle y \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \quad \langle xy \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i; \quad (18-20)$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad D(x) = \sum_{i=1}^n \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2.$$

Можно также определить среднеквадратические погрешности параметров, a и b :

$$S_b = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{D(y)}{D(x)} - b^2}; \quad S_a = S_b \sqrt{D(x)},$$

$$\text{где } D(y) = \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2. \quad (21)$$

Найденные значения параметров a и b используются для вычисления R и C по формулам (16).

Погрешности вычислений определяются на основании вычисленных среднеквадратических погрешностей S_b и S_a .

Описание лабораторной установки

Электрическая схема лабораторной установки изображена на рис. 3.

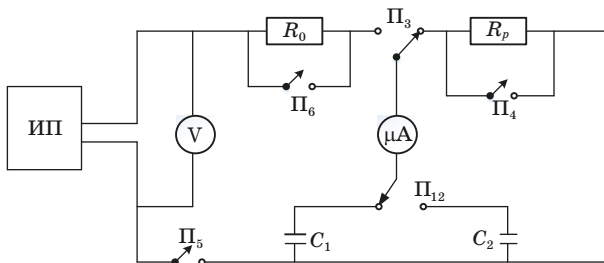


Рис. 3. Электрическая схема лабораторной установки для наблюдения процесса зарядки и разрядки конденсаторов C_1 и C_2

Напряжение на выходе источника питания (ИП) измеряется вольтметром V .

Сила тока зарядки и разрядки конденсаторов C_1 и C_2 измеряется при помощи микроамперметра μA . R_0 и R_p – сопротивления цепей зарядки и разрядки конденсаторов.

Переключатель Π_{12} служит для подключения к схеме одного из двух конденсаторов C_1 или C_2 , Π_3 – для зарядки или разрядки конденсаторов, ключ Π_5 – для включения питания схемы. Ключи Π_4 и Π_6 используются для ускорения процессов полной зарядки и полной разрядки конденсаторов. При измерениях тока ключи Π_4 и Π_6 разомкнуты.

Порядок выполнения прямых измерений

При помощи ключей Π_6 и Π_4 полностью разрядить конденсаторы C_1 и C_2 .

Включить источник питания и дать ему прогреться несколько минут. Установить такое напряжение U на выходе источника питания, чтобы наибольшее отклонение стрелки микроамперметра при зарядке и разрядке конденсаторов было близко к максимальному по шкале. Записать это напряжение U на выходе источника питания.

Снять зависимость от времени зарядного тока для конденсатора C_1 . При этом отсчет времени начинать ($t = 0$) в момент включения зарядки. Показания микроамперметра можно начать записывать спустя несколько секунд. Записав примерно 10 (8–12) «точек» (время–ток), полностью закончить зарядку с помощью ключа Π_6 .

Затем, действуя аналогично, снять зависимость от времени разрядного тока для конденсатора C_1 .

Такие же измерения провести для конденсатора C_2 . Для повышения точности можно провести несколько циклов измерений.

Измеренные данные занести в табл. 1.

Таблица 1

C_1						C_2					
Зарядка			Разрядка			Зарядка			Разрядка		
t, c	$I, \text{мкА}$	$\ln I$	t, c	$I, \text{мкА}$	$\ln I$	t, c	$I, \text{мкА}$	$\ln I$	t, c	$I, \text{мкА}$	$\ln I$

Обработка результатов измерений

Графический метод

Построить графики зависимостей от времени разрядного и зарядного токов для конденсаторов C_1 и C_2 , а также логарифмов этих токов.

Из графиков разрядного тока определить t_1 и $\ln I_0$.

Затем, определив I_0 и b , по формулам (16) определить R и C (при полной предварительной зарядке конденсатора первоначальная разность потенциалов на его обкладках при разрядке будет равна напряжению на выходе источника питания $u_0 = U$).

Численный метод (МНК)

По формулам (19) и (20) вычислить $\langle x \rangle$, $\langle y \rangle$, $\langle xy \rangle$, $D(x)$.

Затем по формулам (18) вычислить a и b .

Потом, определив I_0 считая $u_0 = U$, по формулам (16) определить R и C .

Результаты вычислений занести в табл. 2.

Таблица 2

Методы	C_1	C_2	R_1	R_2
Графический				
Численный (МНК)				

Оценить погрешности окончательных результатов.

Вопросы для допуска к выполнению лабораторной работы

1. Какие токи называются квазистационарными?
2. Нарисуйте схему зарядки конденсатора; напишите для нее второе правило Кирхгофа.
3. Нарисуйте график зависимости напряжения на конденсаторе от времени при его зарядке.
4. То же самое (см. пп. 2 и 3) для процесса разрядки конденсатора. Как изменится график, если увеличить сопротивление резистора, через который происходит разрядка конденсатора? Если уменьшить емкость?
5. Что называется, временем релаксации (постоянной времени RC -цепочки)?
6. Что такое «половинное время»? Как связано со временем релаксации?

7. Опишите способы экспериментального определения постоянной времени RC -цепочки τ .

Контрольные вопросы

1. Как выводится зависимость зарядного тока от времени?
2. Как выводится зависимость разрядного тока от времени?
3. Как определяется время релаксации τ ?
4. Как выглядят графики зависимости логарифмов зарядного и разрядного токов конденсатора от времени?
5. Напишите формулы для вычисления R и C .